Elementi di Topologia
Prof. M. Spera 2008/09
Lezione **VI**

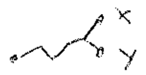
★ Caratterizzazione degli aperti di Scott nel dominio di Kahn $P = 2^{*\omega}$

[⚠ senza 0 e $\mathbb{1}$]

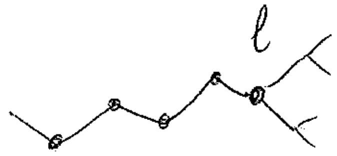
P è <u>directed complete</u>; infatti un insieme diretto è necessariamente composto da <u>sequenze</u> in un unico "ramo"

e il sup è o una sequenza finita o una infinita

[non sarebbe così se ci fosse $\mathbb{1}$]



★ Osserviamo che starts l (l finita) è <u>aperto</u>: se $\sup D \in \uparrow l$, $\exists\, d \in D \cap \uparrow l$



qui D è finito, $\sup D = l$
$\sup D \in D$

Se s è infinita, $\uparrow s = \{s\}$
sia $D = \{\text{appr. finite}\}$ $\sup D = s$ ma $\nexists\, d \in \{s\} \cap D$
$\Rightarrow$ $\uparrow s$ <u>non</u> è <u>aperto</u>

Ora $U \underset{\text{ap. di Scott}}{=} \bigcup \{ \text{starts}\, \ell \mid \ell \in \bar{U} \ [\ell \text{ finite}] \}$

ovviamente vale $\supseteq$

se $\ell \in \bar{U}$

$\text{starts}\, \ell \subset \bar{U} = \uparrow \bar{U}$

$\Rightarrow \bigcup \text{starts}\, \ell \subset \bar{U}$

Sia ora $s \in \bar{U}$. Se $s \equiv \ell$ è finita,

$s \in \text{starts}\, \ell$, $\ell \in \bar{U}$.

Se $\overset{\in \bar{U}}{s}$ è infinita, sia $D = \{\text{appr. finite di } s\}$

$\sup D = s$. Poiché U è aperto, $\exists\, \ell_0$,

appr. finita di s, in $\bar{U}$: $\ell_0 \in U \cap D$

Ma allora $s \in \text{starts}\, \ell_0$.

Dunque vale $\subseteq$ $\square$

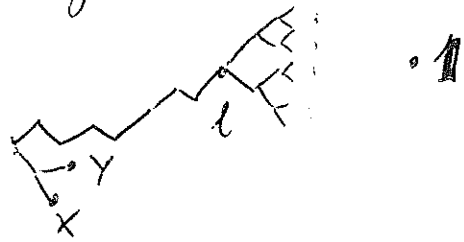
☆ Pertanto un aperto di Scott non può contenere

‖ solo successioni infinite, sicché ad esempio

$\underset{\uparrow \text{succ. infinite}}{2^{\omega}}$ non è Scott open.

Nota! Se aggiungessi $\mathbb{1}$

starts ℓ =

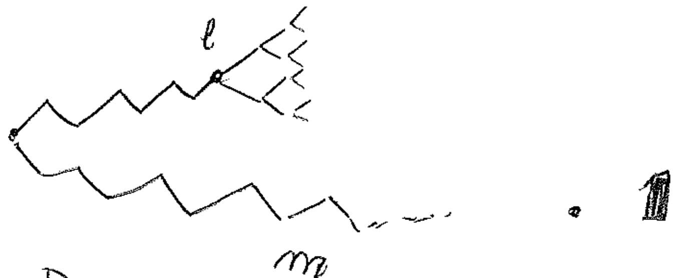


$D = \{x, y, \mathbb{1}\}$ è diretto [$\{x,y\}$ non lo è..]

$\sup D = \mathbb{1} \in$ starts $\ell \cap D$

— . — .

$D = \{$appr. finite di m, infinita, m, $\mathbb{1}\}$



$\sup D = \mathbb{1} \in D$

Non sembrano esserci problemi:

se D è diretto e $\sup D \in$ starts ℓ,

e $D \cap$ starts $\ell \setminus \{\mathbb{1}\} = \emptyset$

deve essere $\sup D = \mathbb{1}$ e $\mathbb{1} \in D$

$\Rightarrow$ starts ℓ è ancora aperto

Si consideri $\{\mathbb{1}\} = \bar{U}$ è $\uparrow \mathbb{1} = \{\mathbb{1}\}$

Se D, diretto, è tale che $\sup D = \mathbb{1}$

è necessariamente $\mathbb{1} \in D \Rightarrow \{\mathbb{1}\}$ è aperto.

Ma $\{\mathbb{1}\}$ non è unione di Scott $S\,\ell$, $\ell \in \bar{U}$ finita

poichè non possiede successioni finite.

Dunque la caratterizzazione testè descritta per il dominio di Scott ordinario non vale in generale.

Quantum mechanics $\qquad\qquad$ $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert

$\mathbb{P}$: $\{E\}$ op. di proiezione

poset $\qquad$ $E^2 = E^* = E$

$E \leq F$ $\qquad$ $E\mathcal{H} \leq F\mathcal{H}$

s. spazi

E

F

$E \vee F$: pr. su $E\mathcal{H} + F\mathcal{H}$

join

somma di s. spazi

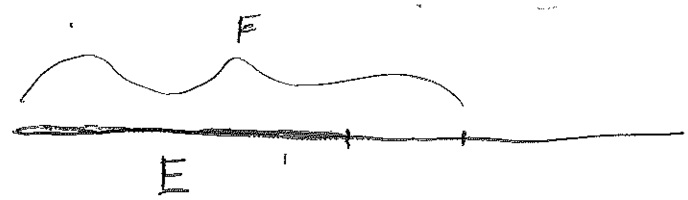
$= \langle E\mathcal{H} \cup F\mathcal{H} \rangle$

$E \wedge F$: pr. su $E\mathcal{H} \cap F\mathcal{H}$

meet $\qquad$ (int.)

E $\qquad$ $\uparrow E = \{ F \,/\, E \leq F \}$

aperto di Scott ?



$\mathcal{H}$ dim (inf.)

E dim (inf.)

Sia $E > E_1 > E_2 > \dots \{0\}$

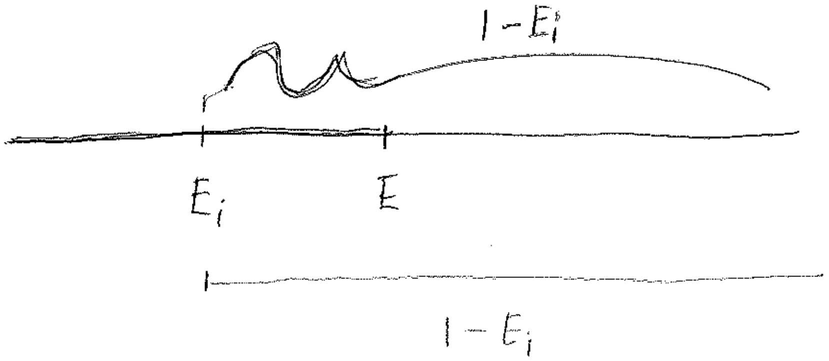
$E \equiv E_0$

$1-E_i < 1-E_{i+1} \dots$

$D = \{1-E_i\}$ $\quad \sup D = I \quad \in \uparrow E$

proiettori

ma $1-E_i \geq E$? **NO**



Ma è un aperto di Alexandrov

|DCPO|

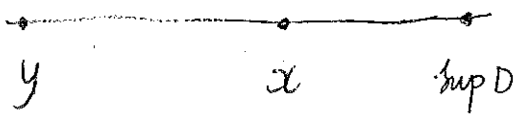
$\boxed{y \ll x \quad \text{way below}}$ "ben al di sotto"

$\forall$ D diretto, $\sup D \in \uparrow x$

$\Rightarrow D \cap \uparrow y \neq \emptyset$

in altre parole: se $x \le \sup D$, $y \le d$ per qualche $d \in D$

es: (banale)



★★ Topologia di Scott $\sigma(L)$

$U \subseteq L$ è in $\sigma(L)$ aperto di Scott
se è superiormente chiuso
se $\forall$ D diretto $\sup D \in U$
$\Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$

se $\twoheaddownarrow x := \{ u \in L : u \ll x \}$ è diretto
e $\sup \twoheaddownarrow x = x$ si parla di **dominio**

★ nel "dominio di Kahn" ordinario $\twoheaddownarrow x = \{\text{appr. finite di } x\}$
e 'sup' $\twoheaddownarrow x = x$ in ogni caso.

Si osservi che $x \not\ll x$ se x è infinita:

sia $D = \{\text{appr. finite}\}$ $\sup D = x$ ma $\nexists\, d \in D$ t.c.
$x \le d$!!

$\boxed{\text{Il "dominio di Kahn" è un dominio}}$

☆ Osservazione banale:

$$y \ll x \Rightarrow y \leq x$$

Sia infatti $D = \{x\}$ $\sup D = x$

Allora $y \ll x \Rightarrow \exists\, d \in D : y \leq d$

$\Rightarrow$ poiché $d = x$, $y \leq x$ $\square$

$x \ll y$ $y \ll z$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $x \ll z$?

Sia D t. che $z \leq \sup D$

$\exists\, d \in D$ t.c. $y \leq d$

Ma allora $x \leq y \leq d$ $(x \ll y \Rightarrow x \leq y)$

$\Rightarrow$ $x \ll z$

$\Rightarrow$ $\ll$ è transitiva

$\ll$ non è in gen. riflessiva

★ **Prop:** U insieme sup. chiuso $U = \uparrow U$

U aperto di Scott $\iff$ $\forall x \in U$, $\exists n \in U$ con $n \ll x$

---

senza 1

Esempi: ★ 2^{ω} non è un aperto di Scott.

è sup. chiuso, ma data $s \in 2^{\omega}$,

è vero che $s \ll s$?

già visto intuitivamente in precedenza: se s, infinita, appartiene ad un aperto di Scott, questo possiede sequenze finite.

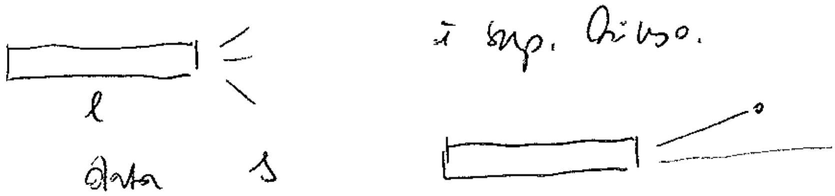
. Sia D t.c. $\sup D = s$

è vero che $s \leq d$, con $d \in D$?

NO: sia $D = \{ d:$ appr. finita di $s \}$

$\sup D = s$, ma non è vero che $s \leq d$ per qualche D }

★ starts l è un aperto di Scott (rivisitazione)



è sup. chiuso.

l

data s finita o no

$1 \ll 1$? (controllo)

sì

infatti $\{1\}$ è aperto

1 è isolato

sia D diretto, con $\sup D \in$ starts l

Allora $\exists\, d \in D \in$ starts l

<u>Dim</u> $U = \uparrow U$ ap. Scott

$(\Rightarrow)$ Sia $x \in U$, e D diretto tale che $\sup D = x$

(sicché $\sup D \in \bar{U}$)

allora $\exists$ $d \in D \cap \bar{U}$

posto $d = u$, è dunque $u \ll x$.

$(\Leftarrow)$ Sia D diretto, con $x := \sup D \in \bar{U}$

$(U = \uparrow U)$

$\exists$ $u \in \bar{U}$ con $u \ll x$

sicché $\exists$ $d \in D$ con $u \leq d$

ma, dato che $u \in U$ e $U = \uparrow U$, è pure

$d \in \bar{U}$ $\Rightarrow$ $\bar{U}$ è aperto di Scott $\square$

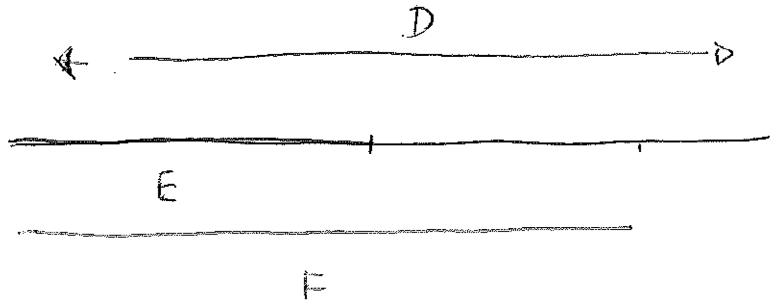
$E \le F$ proiettori (ort.) in $\mathcal{H}$

Quando è che $E \ll F$? $E \neq F$

dim ∞

MAI :

$\mathcal{D}$ insieme diretto



$\sup \mathcal{D} = I$

Nell'esempio è $\sup \mathcal{D} = I$ $\quad F \le \sup D$

ma $\nexists\, D$ tale che $E \le D$ $\quad (e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

Dettagli: chiusura hilbertiana

abuso di notazione

$E \Leftrightarrow \overline{\langle e_{-1}, e_{-2} \dots \rangle}$

$F \Leftrightarrow \overline{\langle e_{-1}, e_{-2} \dots, e_0, e_1 \dots e_N \rangle}$ finito

$\mathcal{D} = \{ \langle e_{-n} \dots e_0 \dots e_n \rangle \}$ $n = 1, 2 \dots$

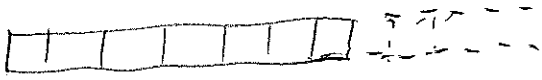
---

sia $E = F$; è $E \ll E$? $\quad E =$ pr. su $\langle e_0 \dots \rangle$

sia $\mathcal{D} = \{ \langle e_0 \dots e_n \rangle \}_{n=0,1,\dots}$

$\sup \mathcal{D} = E \qquad \exists\, D \in \mathcal{D} : E \le D$? NO

$2^{*\omega}$ dominio di Kahn ☆ Esempio importante

$s =$ 

s infinita

punta $\mathbb{1}$

$\uparrow s = \{s\}$ sia D diretto $\sup D \in \uparrow s$

$\Rightarrow \sup D = s$

D è nec. costituito da appr. finite di s, o da $\{s\}$

$\Downarrow s = \{ s' \,/\, s' \ll s \}$ = appr. finite

☆ già visto

è diretto, e $\sup \Downarrow s = s$

$\Rightarrow$ si ha effettivamente un dominio.

---

oss: $\mathbb{1}$ è isolato [i.e. non di accumulazione]

$\uparrow \mathbb{1} = \{\mathbb{1}\}$ è aperto e contiene solo se stesso

è $\mathbb{1} \ll \mathbb{1}$

se aggiungo

$\uparrow s = \{s, \mathbb{1}\}$ $\sup \uparrow s = \mathbb{1}$

$\Downarrow \mathbb{1} = \{ s \,/\, s \ll \mathbb{1} \}$

$\sup \Downarrow \mathbb{1} = \mathbb{1}$

$$\begin{array}{ccc} \text{dcpo} & & \text{dcpo} \\ f : S & \longrightarrow & T \end{array}$$

sono equivalenti

Continuità di Scott ☆

(1) f continua (top. di Scott)

(2) f conserva i sup degli insiemi diretti, i.e. conserva l'ordine e $f(\sup D) = \sup f(D)$ $\forall D$ diretto, $D \subset S$

$((1) \Rightarrow (2))$ Se $f(x) \not\leq f(y)$ $(x \leq y)$

$V = T \setminus \downarrow f(y) \ni f(x)$

$\Rightarrow U = f^{-1}(V)$ è un aperto di Scott $\ni x$ ma non y. Ma ciò non è possibile, poiché $U = \uparrow U$. Dunque $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Sia $D \subset S$ diretto; allora $f(D)$ è diretto e $\sup f(D) \leq f(\sup D)$ (f conserva l'ordine)

$$\left[\begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ \underset{D}{\overset{\cap}{x}} \leq \sup D \Rightarrow f(x) \leq f(\sup D) \\ \qquad\qquad \Rightarrow \sup f(D) \leq f(\sup D) \end{array}\right]$$

Poniamo $x = \sup D$ $t = \sup f(D)$

Proviamo che $f(x) \leq t$. Sia $f(x) \not\leq t$, p.a.

$T \setminus \downarrow t$, aperto, $\ni f(x)$. $U = f^{-1}(T \setminus \downarrow t)$ è aperto e $\ni x \Rightarrow \exists\, d \in D$ con $d \in U$

$\Rightarrow f(d) \in T \setminus \downarrow t$ ovvero $f(d) \not\leq t = \sup f(D)$, assurdo.

((2) $\Rightarrow$ (1))

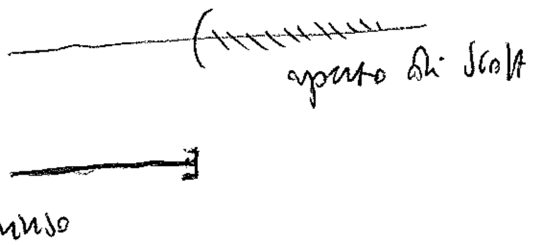
Sia $A \subset T$ chiuso. Dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è chiuso.

Sia D diretto in $f^{-1}(A)$

$f(\sup D) = \sup f(D)$; Ma $\sup f(D) \in A$

[un chiuso di Scott è inf. chiuso e contiene i sup degli insiemi diretti.]

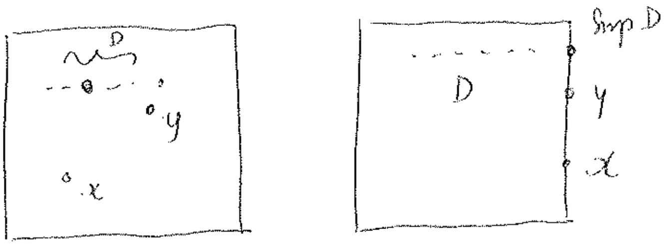
es:



Allora $f(\sup D) = \sup f(D) \in A$

$\Rightarrow \sup D \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è chiuso $\square$

Caratterizzazione alternativa di $\ll$ in un reticolo completo



$x \ll y$ $\qquad$ $x \leq y$

$\left(x \leq y \ :\ \begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array} \right)$ $\qquad$ ma $\quad x \not\ll y$

$L = [0,1] \times [0,1]$

$$x \ll y \iff \forall X \subseteq L, \ y \leq \sup X \Rightarrow \exists A \text{ finito}, \ A \subseteq X \text{ con } x \leq \sup A \qquad (*)$$

Se $y \leq \sup X$, posto $X^+ = \{\sup A, \ A \text{ finito}, \ A \subseteq X\}$

è $\sup X^+ = \sup X$

Se $x \ll y$, $\exists A \subseteq X$ con $x \leq \sup A$

Viceversa, se vale $(*)$ dato D diretto con $\sup D \geq y$

$\exists A \subset D$ finito con $x \leq \sup A$

Ma $\sup A \in A$ poiché A è finito, sicché

$x \leq d$ per qualche $d \in D$

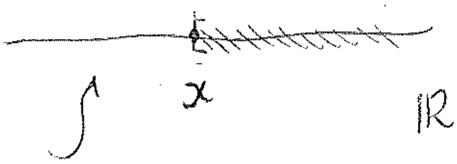
Dunque $x \ll y$.

★ Topologia di Lawson L poset

"lower topology": generata da $L \setminus \uparrow x$
(complementi dei filtri principali (l.i. qui $\uparrow x$)) (essi formano una sottobase)

Notazione: $\omega(L)$

$\uparrow x = \{ y : y \geq x \}$



$\mathbb{R} \setminus \uparrow x = (-\infty, x)$

Se L è un dcpo,
$\underset{\text{scott}}{\sigma(L)} \vee \underset{\text{lower}}{\omega(L)}$ è detta
raffinamento comune
topologia di Lawson,

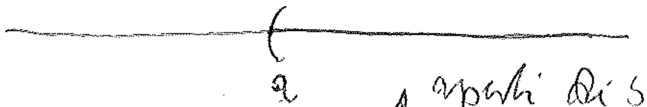
notazione $(L, \lambda(L))$ oppure ΛL

Dunque: sottobase di $\lambda(L)$: (prebase) (subbase)
$$\begin{cases} U \in \sigma(L) & \text{(Scott)} \\ L \setminus \uparrow x \end{cases}$$

i.e.: intersezioni finite di danno una base

base: $U \setminus \uparrow F$, $U \in \sigma(L)$, F finito

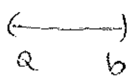
Es: $\mathbb{R}$



aperti di Scott

aperti della lower topology

$\Rightarrow$ (a,b) è un aperto di Lawson



$\Rightarrow$ è la topologia ordinaria.

☆ Se S e T sono (semi)reticoli
e $f: S \to T$ è omomorfismo
(di (semi)reticoli)

f è (Lawson-) continua $\Leftrightarrow$ equiv.

1. conserva i sup degli insiemi diretti [è Scott-continua]
e inf non vuoti

2. conserva i limiti inferiori

[3. f è Scott-continua e "inppa"
v. GHKLMS 2003]

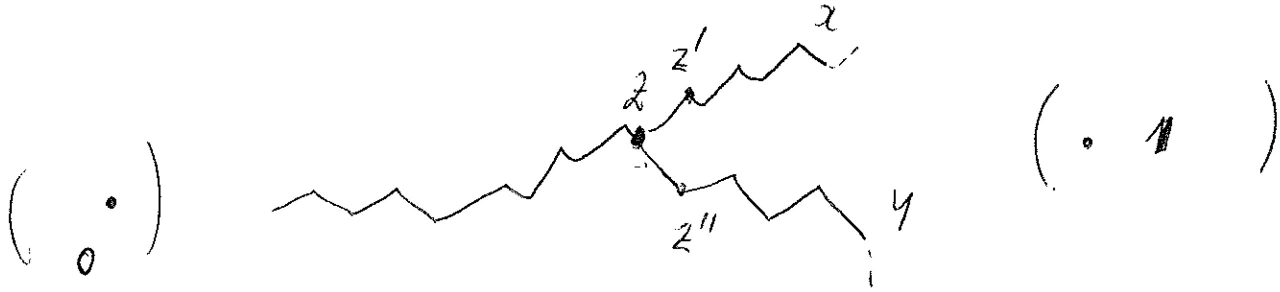
Scopo principale: avere una topologia T_2

★ Il dominio di Kahn $L = 2^{*\omega}$, T_2 [esempio]

[aggiungendovi 0 e 1 diviene un reticolo completo]

Siano $x \neq y$ in L

troviamo intorni disgiunti $U_x \ni x$, $U_y \ni y$



situazione generale

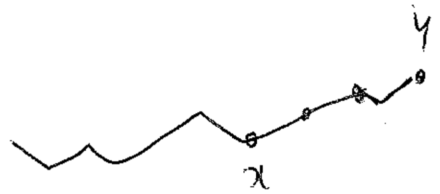
$U_x = \uparrow z'$ (scelt.) ⚠ (x $1 \notin L$)

$U_y = \uparrow z''$ (scelt)

Altrimenti: $U_x = \uparrow z'$ qui $= \uparrow z' = \text{starts } z'$

$U_y = L \setminus \uparrow z'$

Se



$U_y = \uparrow y$

$U_x = L \setminus \uparrow y$

Se y è infinita $U_y = \uparrow d$ $U_x = L \setminus \uparrow d$

finita oss.

VI-17