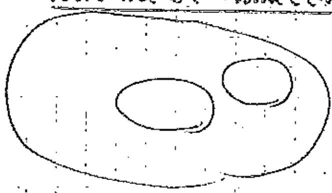
Varietà differenziabili

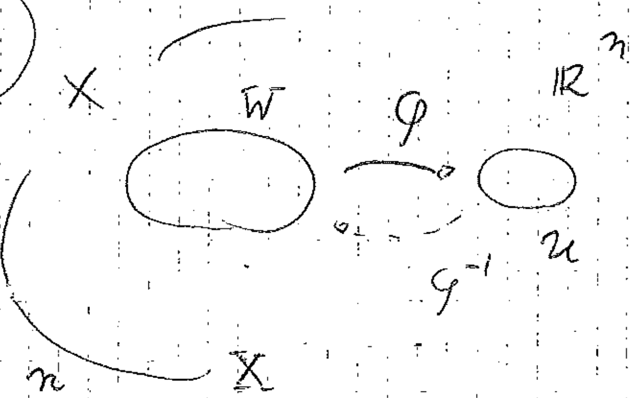
oggetti: di classe C^k, di dimensione n

in genere a porremo infinito C^∞

X : spazio topologico di Hausdorff
a base numerabile
(2° assioma di numerabilità) (*) vedi oltre...

$[(X, \mathcal{O})]$
aperti
(X, τ)
topologia...





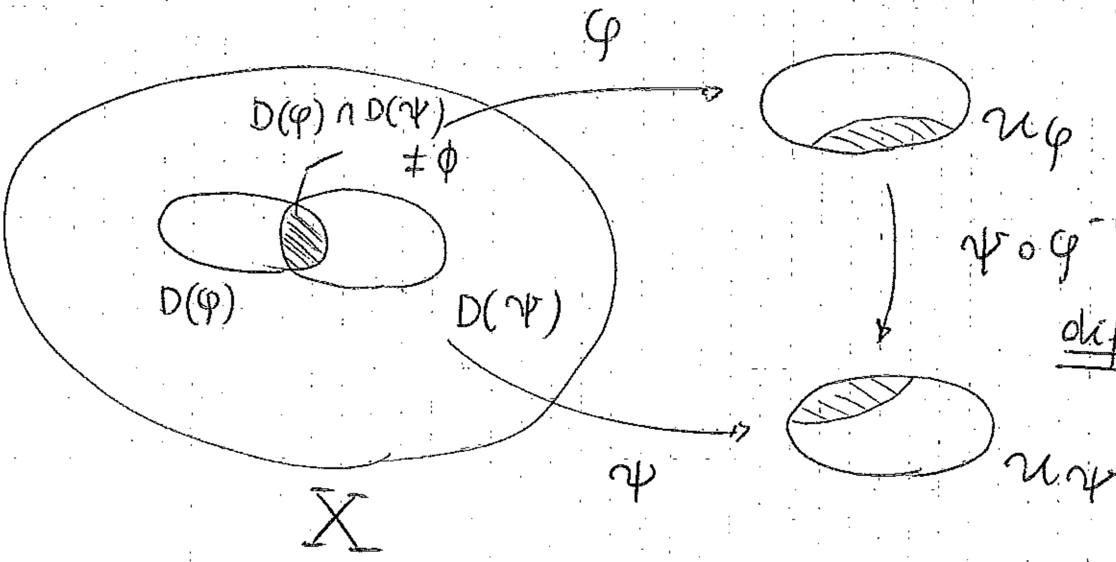
dominio di φ

$$\varphi : \underset{\text{aperto}}{D(\varphi) \equiv W} \longrightarrow \underset{\text{aperto}}{U \subset \mathbb{R}^n} \qquad \varphi \text{ omeomorfismo}$$

carta locale

fin qui:
Varietà topologica

compatibilità di due carte φ e ψ



$$\psi \circ \varphi^{-1} \in C^k$$

diffeo

k fissato
se $k = \infty$
si parlerà di varietà liscia
C^ω var. analitica reale

☆ Atlante : insieme di carte a due a due compatibili tali che ogni punto di X abbia immagine per almeno una carta

$$\Phi = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \quad U_\alpha = D(\varphi_\alpha)$$

ovvero: $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento di X.

(in altre parole ciascun $x (\in X) \in D(\varphi)$ per qualche φ.
["X è localmente euclideo"]

☆ Due atlanti si dicono compatibili (o equivalenti) se la loro unione è nuovamente un atlante
(si ottiene una relazione di equivalenza ...)

☆ In virtù del lemma di Zorn si può considerare un atlante massimale ☆
(unione di tutti gli atlanti compatibili con un atlante fissato)

☆ **Varietà differenziabile di classe C^k**

$(X, [\Phi])$ eq.. X ha una struttura di varietà differenziabile

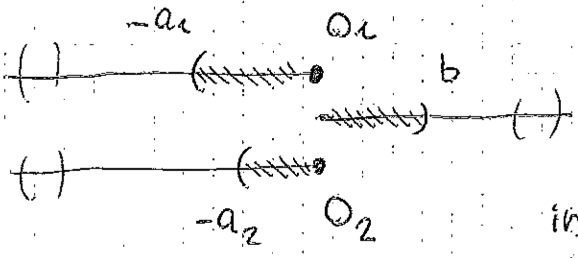
X: sp. top. di Hausdorff (localmente euclideo)

$[\Phi]$: classe di eq. di un atlante (= classe di atlanti equivalenti)

C^ω : var. analitica reale

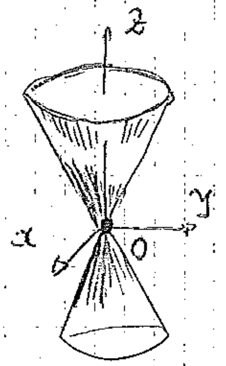
Se $\mathbb{C}^n$ sostituisce $\mathbb{R}^n$ e si richiede l'olomorfia ($\equiv$ analiticità complessa) si ha la nozione di varietà complessa. Se $n=1$ si ha una superficie di Riemann ☆

★ Osservazione. Esistono spazi localmente euclidei ma non Hausdorff



intorni di O_i $i=1,2$

★

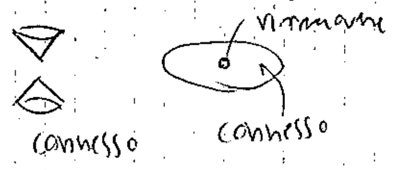


$$x^2+y^2-z^2=0$$

Cono (doppio)

Non è una varietà
(top. indotta da $\mathbb{R}^3$)

non è omeo ad un aperto di $\mathbb{R}^2$!

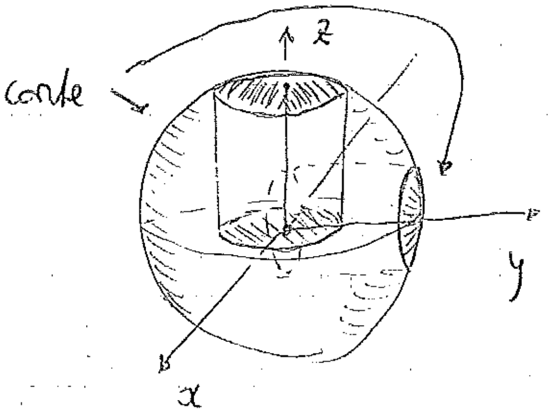


Invece $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ z\geq 0 \end{cases}$

è una varietà $\underline{C^0}$
(varietà topologica)

★ Sfera (unitaria) S^2

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$



etc....

In maggiore dettaglio

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$$

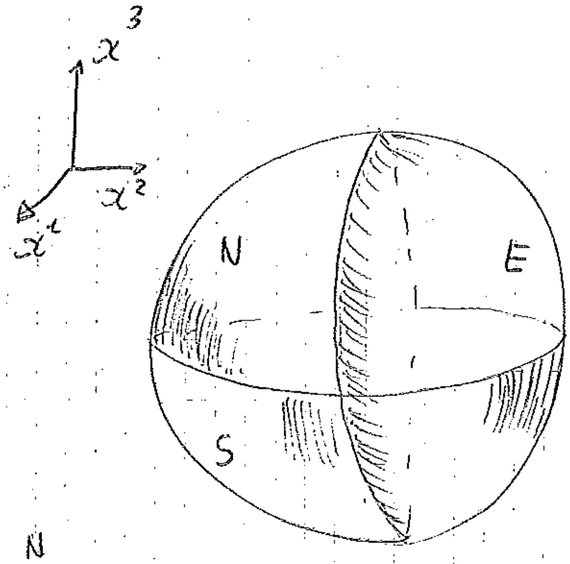
$$D_{i,\varepsilon}=\{(x^1,x^2,x^3)\in S^2 \mid \varepsilon x^i>0\}$$

$\varepsilon=\pm 1$

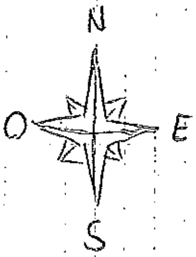
$$\varphi_{i,\varepsilon}: D_{i,\varepsilon}\to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_{i,\varepsilon}(x^1,x^2,x^3)=(x^j,x^k)$$

(i,j,k) permutazione ciclica di $(1,2,3)$ per $\varepsilon=1$
$(1,3,2)$, $\varepsilon=-1$



$$(i,\varepsilon) = (3,+) \equiv N$$
$$(i,\varepsilon) = (3,-) = S$$
$$(i,\varepsilon) = (2,+) = E$$



☆ $\varphi_N \circ \varphi_E^{-1}$ è data da

$\mathcal{C}^\infty \Rightarrow$

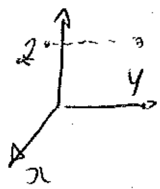
$$\boxed{\begin{cases} x_N^1 = x_E^2 \\ x_N^2 = \sqrt{1-(x_E^1)^2-(x_E^3)^2} \end{cases}}$$

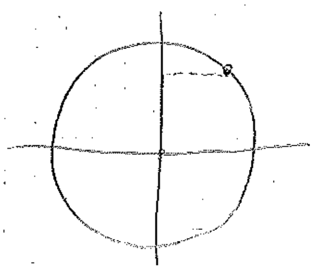
Infatti:

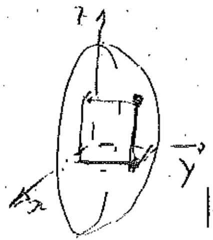
$$\varphi_E(x^1,x^2,x^3) = \varphi_{(2,+1)}(x^1,x^2,x^3) = (x^3,x^1) = (z,x)$$

$$\varphi_N(x^1,x^2,x^3) = \varphi_{(3,+1)}(x^1,x^2,x^3) = (x^1,x^2) = (x,y)$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{1-z^2-x^2} \end{cases}$$







(z,x) φ_E^{-1}

$\longmapsto (z,x,\sqrt{1-z^2-x^2})$

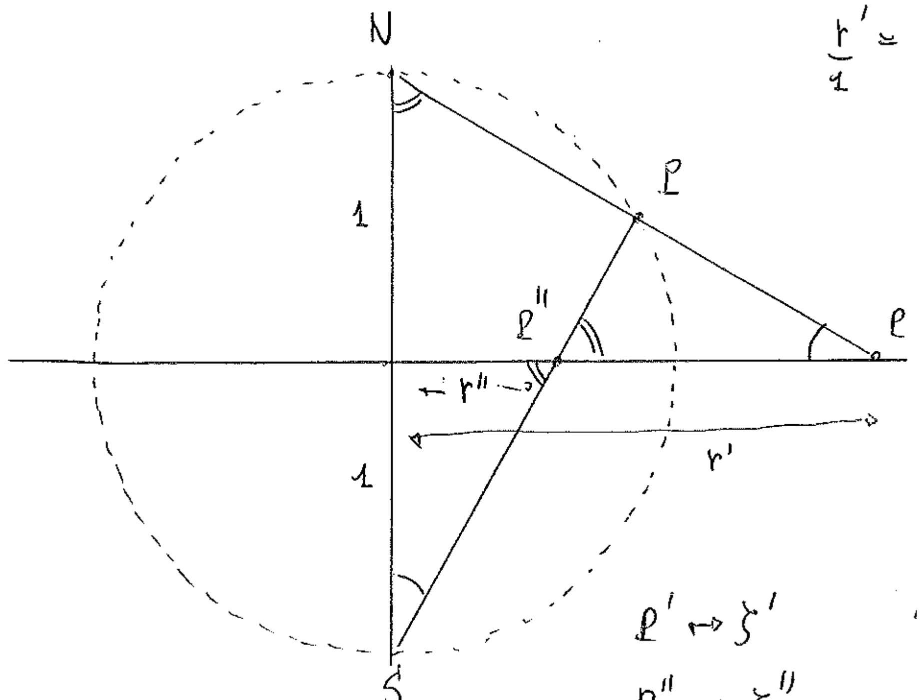
$\longmapsto (x, \underbrace{\sqrt{1-z^2-x^2}}_{y})$

$$(z,x) \longmapsto (x, \sqrt{1-z^2-x^2})$$

$S^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

(come superficie di Riemann)

$$\frac{r'}{1} = \frac{1}{r''}$$



$P' \mapsto \zeta'$, $r' = |\zeta'|$

$P'' \mapsto \zeta''$, $r'' = |\zeta''|$

relazione [con opportuni orientamenti]

$$\boxed{\zeta' = \frac{1}{\zeta''}} \qquad \text{se } P \notin \{N, S\}$$

$U_N = S^2 \setminus \{N\}$

$U_S = S^2 \setminus \{S\}$

$S^2 = U_N \sqcup U_S$

$\varphi_N : P \to P'$

$\varphi_S : P \to P''$

se $P \notin \{N, S\}$ sono definite entrambe

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \quad P'' \xmapsto{\varphi_S^{-1}} P \xrightarrow{\varphi_N} P'$$

$P'' \in$ piano equatoriale $\equiv \mathbb{C}$; $P' \in \mathbb{C}$

$$\zeta'' \longmapsto \zeta' = \frac{1}{\zeta''}$$

in forma reale

$$x' + iy' = \frac{1}{x'' + iy''} = \frac{x'' - iy''}{x''^2 + y''^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x''}{x''^2 + y''^2} \\ y' = \dfrac{-y''}{x''^2 + y''^2} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$$
$$\mathbb{C} \qquad\qquad \mathbb{C}$$

spazi proiettivi: reale e complesso

coord. omogenee

$$\varphi_i([x_0 \ldots\ldots x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i} \ldots \frac{\hat{x}_i}{x_i} \ldots \frac{x_n}{x_i}\right) \in \begin{matrix}\mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n\end{matrix}$$

se $x_i \neq 0$ (=1 omessa)

se anche $x_j \neq 0$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_1 \ldots\ldots x_n) = \left(\frac{x_1}{x_j} \ldots \frac{\hat{x}_j}{x_j}, \ldots \frac{1}{x_j}, \ldots \frac{x_n}{x_j}\right)$$

omessa

$$(x_1 \ldots x_n) \overset{\varphi_i^{-1}}{\longmapsto} [x_1 \ldots \overset{i}{1}, \ldots x_n] \in \mathbb{P}^n$$

$$\left(= \left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots \frac{x_n}{x_i}\right]\right)$$

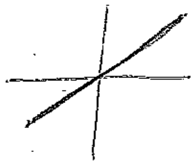
$$\overset{\varphi_j}{\longmapsto} \left(\frac{x_1}{x_j} \ldots \overset{j}{\frac{\hat{x}_j}{x_j}}, \ldots \overset{i}{\frac{1}{x_j}} \ldots \frac{x_n}{x_j}\right)$$

si omette

(che è C^∞ (e, nel caso complesso, olomorfa))

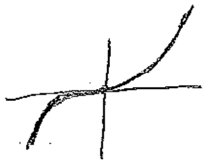
Esempi

$M_1 = (\mathbb{R}, t)$ $\qquad \varphi_1(t) = t$



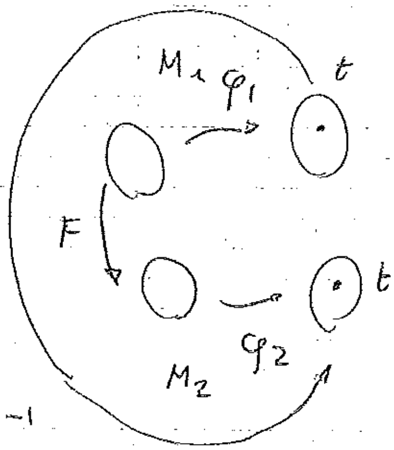
↑
atlante
↓

$M_2 = (\mathbb{R}, t^3)$ $\qquad \varphi_2(t) = t^3$



★ Gli atlanti non sono equivalenti : φ_1 e φ_2 non sono compatibili (se chiedo $\mathbb{R} > 0$!)

★ Tuttavia $M_1 \cong M_2$
(Diffeomorfismo)



★ $\boxed{\begin{aligned} F:\ & M_1 \to M_2 \\ & t \mapsto \sqrt[3]{t} \end{aligned}}$

$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$

$(\varphi_2 F \circ \varphi_1^{-1})(t) = t$ $\qquad t \mapsto t$

$\varphi_2 F \varphi_1^{-1} = id$

$\varphi_1 F^{-1} \varphi_2^{-1} = id$

$(\varphi_1 \circ F^{-1} \circ \varphi_2^{-1})(t) =$

$= \varphi_1 \circ F^{-1}(\sqrt[3]{t}) = \varphi_1(t) = t$ $\qquad t \mapsto t$

★ Richiamo (Analisi II) : differenziabilità (secondo Fréchet)

$f : \mathbb{R}^n \supset \underset{\text{aperto}}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^m$

f è differenziabile in $\mathcal{U}$ se $\forall\, x \in \mathcal{U}$,

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in\, \mathcal{U}} - \underset{\mathcal{U}}{\underset{\cap}{f(x)}} = \underset{\text{applicazione lineare}}{A_x h} + o(h)$$

$$\frac{\|o(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \to 0 \quad \text{se } h \to \underline{0}$$

$A_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\boxed{\text{differenziale di } f \text{ in } x}$

Notazione $A_x \equiv df\big|_x$ ⚠

concretamente $A_x \equiv$ matrice $m \times n$

se f è $\mathcal{C}^1$, e se $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

$$\underset{(x_1 \dots x_n)}{\underset{\|}{df\big|_x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

★ matrice Jacobiana

☆ Esempi $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ f. di due variabili

$$P \equiv (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$df_P = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \right)$$

con abuso di linguaggio: gradiente
(a rigore è coinvolta una metrica)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad$ trasf. piana

$$P \equiv (x,y) \longmapsto (u(x,y),\, v(x,y))$$

$$df_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(derivate parziali calcolate in P)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad$ curva spaziale

$$P \equiv t \longmapsto (x(t),\, y(t),\, z(t))$$

$$df|_P = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \dot{} = \frac{d}{dt}$$

* Richiamo

$\mathbb{R}^n$ sp. vettoriale $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right.$ ← vettori colonna

$(\mathbb{R}^n)^*$ sp. duale : $\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ f$ lineare $\}$

f è determinata sugli el. della base canonica; grazie alla linearità : $f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$

si ponga $f(e_i) \equiv a_i$

viceversa, dati a_i, $i = 1..n$ resta univocamente individuato un funzionale lineare f t.c. $f(e_i) = a_i$

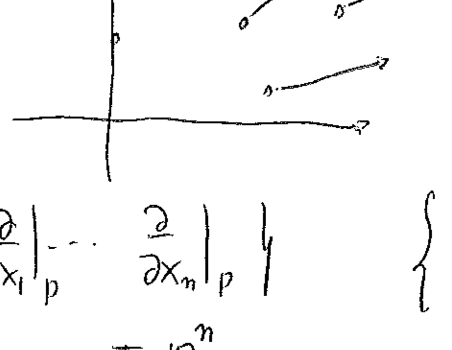
$f \longmapsto \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}}^{a^t}$ ← vettore riga $= \left(\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}_a \right)^t$

$f(x) = \overbrace{\begin{bmatrix} \quad \cdots \quad \end{bmatrix}}^{a^t} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} x = \sum a_i x_i$

$\boxed{e_i^*(e_j) = \delta_{ij}}$ concretamente $e_i^* = e_i^t$ $\left\{ e_i^* : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\}$ ↑ i base duale

$X = \sum \alpha_i e_i \equiv \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ← campo vettoriale

↑ funzioni lisce



$X^* = \sum \alpha_i e_i^* \equiv \sum \alpha_i dx_i$

$\equiv$ 1-forma differenziale

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$ base per $T_p\mathbb{R}^n$. sp. tangente in p

$\left\{ dx_1\big|_p \cdots dx_n\big|_p \right\}$ base per $T_p^*\mathbb{R}^n$ sp. cotangente in p

Esempio $\quad n=2$

$$df(X)\Big|_P = \Big(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}^{\nabla^* \cup} \;,\; \overbrace{\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}}^{\nabla \cup} \Big)\Big|_P$$

$$= \Big(\text{da} \quad (dx, \tfrac{\partial}{\partial x}) = (dy, \tfrac{\partial}{\partial y}) = 1$$

$$(dx, \tfrac{\partial}{\partial y}) = (dy, \tfrac{\partial}{\partial x}) = 0$$

$$= \quad \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}$$ ← tutto calcolato in P

$\equiv$ derivata direzionale di f lungo X, ★★
calcolata in P.

★★★ idea fondamentale: i vettori vengono interpretati come derivate direzionali di una f arbitraria

cf. $\quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots$

$$f'(x_0)h = \frac{df}{dx}\Big|_{x_0}\cdot h \;\equiv\; h\frac{d}{dx}\Big|_{x_0} f$$

↓ vettori

"gradiente" ↖ ⚠ abuso di linguaggio: ↑ sottintesa una metrica!

in gen $\quad f(x+h) = f(x) + h\cdot\nabla f + \ldots$

$$h \leftrightarrow h\cdot\nabla = \sum h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

"dimmi come ti trasformi e ti dirò chi sei"

4 Leggi di trasformazione

$$y \in \mathbb{R}^n, \qquad x^* \in (\mathbb{R}^n)^*$$

vettore — vettore duale

$x =$ $\qquad$ $x^* =$ $\equiv x^t$

$$x^*(y) = x^t y$$

x^t $\quad$ y

Si ha, se $A \in GL(n, \mathbb{R})$

$$x^t y = x^t \underbrace{A^{-1} A}_{I} y = (A^{-t} x)^t A y$$

$$A^{-t} \equiv (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$\Rightarrow$ se $\quad y \longmapsto Ay$, $\qquad$ "contravarianza"

$\qquad\quad x^* \longmapsto A^{-t} x^*$ $\qquad$ "covarianza"

$x^*(y)$ rimane invariato (c.n.e.s.)

così, se $\quad x^* \longmapsto B \cdot x^*$

$\qquad\qquad y \longmapsto B^{-t} y$

Notare:

$$\begin{cases} dx = x_u\, du + x_v\, dv \\ dy = y_u\, du + y_v\, dv \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

J: matrice Jacobiana

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}}_{= J^{-t}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$