*** Formula di Koszul per la connessione di Levi-Civita

$\nabla \equiv \nabla^{LC}$ univocamente definita dalle richieste:

$g(Y,Z) \equiv \langle Y,Z\rangle$ etc.

⇉ ① metricità (compatibilità con la metrica ≡ il trasporto parallelo conserva le lunghezze)

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

[cf. es. in $\mathbb{R}^3$, $\underline{a} = \underline{a}(t)$, $\underline{b} = \underline{b}(t)$,

$$\frac{d}{dt}\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle = \langle \frac{d\underline{a}}{dt}, \underline{b}\rangle + \langle \underline{a}, \frac{d\underline{b}}{dt}\rangle$$

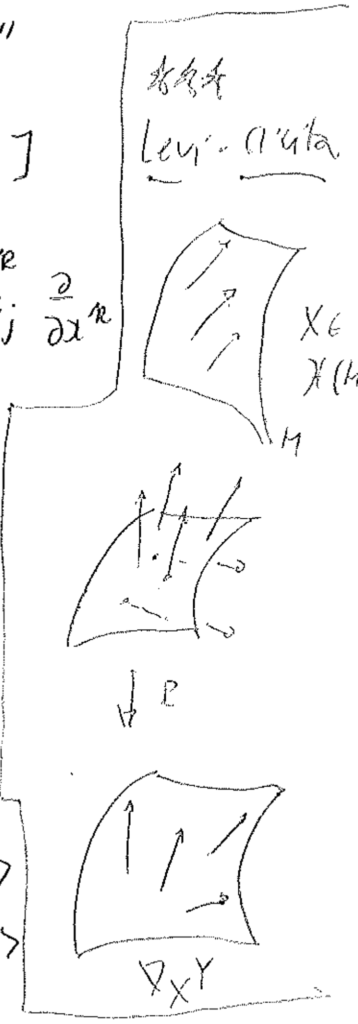
⇉ ② "assenza di torsione" ≡ "simmetria"

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

(se $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$

corrisponde a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

simmetria



Dim. Sia ∇ esistente: allora

$$\begin{array}{c|l} + & X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ + & Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ - & Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{array}$$

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle =$$

$$\langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \underbrace{\nabla_X Z - \nabla_Z X}_{[X,Z]}\rangle + \langle X, \underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}_{[Y,Z]}\rangle$$

$$= \langle 2\nabla_Y X + \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)}_{[X,Y]}, Z\rangle$$

$\Longrightarrow$

$\Rightarrow \quad X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle$

$$= 2\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Z[XY]\rangle + \langle Y[X,Z]\rangle + \langle X[Y,Z]\rangle$$

"formula a 6 termini di Koszul"

$\Rightarrow$

$$(\ast)\quad \boxed{\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\left\{ X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle X[Y,Z]\rangle \right\}}$$

$\Rightarrow$ Se ∇ esiste, è univoc. determinata.

Definendo, viceversa, $\nabla_Y X$ tramite $(\ast)$, è subito visto che valgono le due proprietà caratteristiche.

In coordinate locali

$X = e_j \quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k \qquad \langle \Gamma^k_{ij} e_k, e_l\rangle = \Gamma^k_{ij} g_{kl}$

$Y = e_i$

$Z = e_l$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}$$

inversa

$$\Gamma^k_{ij} \underbrace{g_{kl} g^{lm}}_{\delta_{km}} = \frac{1}{2} g^{lm} \{ \text{——} \} = \quad m = k$$

X-30

Tensore di curvatura di Riemann in coordinate locali

$$\nabla_k \equiv \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}$$

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}}$$

$$\underbrace{(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)}_{(1,2)} T^i = -\overset{(1,2)}{R^i_{qkl}} T^q$$

$$\nabla_k(\overset{(1,1)}{\nabla_l T^i}) = \nabla_k\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ql} T^q\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ql} T^q\right) + \Gamma^i_{pk}\left(\frac{\partial T^p}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql} T^q\right)$$

$$- \Gamma^p_{lk}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^p} + \Gamma^i_{qp} T^q\right)$$

Si ottiene

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}\right) T^q$$

$$+ \left(\Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk}\right) T^q$$

$$+ \underbrace{\left(\Gamma^p_{lk} - \Gamma^p_{kl}\right)}_{=0} \frac{\partial T^i}{\partial x^p}$$

La curvatura di Riemann misura la non commutatività delle derivate covarianti, e rappresenta l'ostruzione a determinare un sistema di coordinate "euclideo" i.e $ds^2 = \sum dy_i^2$

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk}$$

intrinsecamente $R(X Y Z W) = \left(\left(-[\nabla_X, \nabla_Y] + \nabla_{[X,Y]}\right) Z, W\right)$

È possibile, su una varietà Riemanniana, trovare un sistema di coordinate locali tale che

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dy^{i\,2} \qquad \text{(metrica euclidea?!)}$$

In generale no: ciò accade se e solo se

$$\boxed{R^i_{\ qkl} \equiv 0}$$

[Se la metrica è euclidea, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^h} = \underbrace{\Gamma^i_{kh}}_{\equiv 0} \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv 0$

⚠ anche se in un dato pto i Γ sono nulli, in generale non sono nulle le derivate!

La connessione di Levi Civita

(M, g) varietà Riemanniana

è univ. determinata dalla metricità: [richiamo]

$$1) \qquad X\, g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

e dall'assenza di torsione

$$2) \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Si permuti ciclicamente 1), si faccia + + − e si usi 2):

$$2\, g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z\, g(X, Y)$$
$$+ g([X, Y], Z) - g([X, Y], Y) - g([Y, Z], X)$$

$\Rightarrow$ ∇ è unica.

Quanto all'esistenza, si vede che il primo membro, definito tramite il secondo, soddisfa le prop. di connessione e in più 1) e 2).

Localmente:

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right] \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{il} \left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk} \right)}$$

Tensori di Curvatura

Riemann: $R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$

Ricci:

operatore di Ricci

$$Ric(U,V) = Tr\,(W \mapsto R(U,W)V)$$
$$= \sum_i \langle R(U,e_i)V, e_i\rangle$$

base orto

Curvatura sezionale (**Ottonuova Riemann**)

$\langle R(U,V)U,V\rangle$ (= curv. gaussiana di $\exp_p(uU + vV)$)

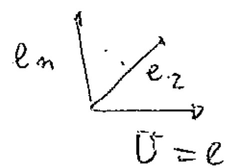
è il tensore originariamente definito da Riemann

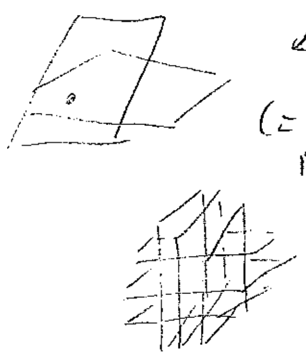
$\|U\| = \|V\| = 1$

superficie

(Ricci $= \sum_{i=1}^{n-1}$ curv. sezionali)

$Ric(U,U)$





$\Delta \log\lambda \equiv 0$

($\Rightarrow \lambda = \text{cost}$) in cond. opportune

Curv. Scalare $\sum_{i,j} R(e_i e_j) e_i e_j)$

R descrive l'ostruzione a trovare un sistema di coordinate in cui la metrica è euclidea ; (*) ciò è chiaro per la curv. gaussiana, usando coordinate isoterme in dim 2 ; ma tale rag. si può fare per tutte le possibili curv. sezionali => tali curvature sono tutte nulle <=> si ha curv. euclidea su tutte le sup. immerse sono piane ; ma in tal caso la metrica è euclidea

(*) (Check!)

X-34

✱ Proprietà del tensore di curvatura

i) $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$

(Chiara) notare

ii) $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$

(Id. di Bianchi) ✱ (si generalizza a connessioni qualsiasi)

(Si calcola $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$

$= -([[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y])$
(Jacobi) $= 0$)

iii) $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$

(Segue da i) e ii) ; non è compl. banale)

Teorema
✱ La curvatura sezionale determina il tens. di curvatura!

Dove:

$$6\,R(X,Y,Z,T) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Big[R(X+\alpha Z, Y+\beta T, X+\alpha Z, Y+\beta T) - R(X+\alpha T, Y+\beta Z, X+\alpha T, Y+\beta Z)\Big]$$

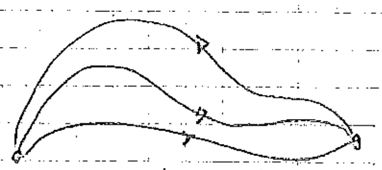
per $\alpha=\beta=0$ (si usa l'id. di Bianchi)

L'equazione delle geodetiche rivisitata

$$I = \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = \int_0^1 (\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt$$

↑ metrica riemanniana

si cons: $\alpha \mapsto \gamma(\alpha, t)$, $\gamma(0,t) = \gamma(t)$



$\gamma(t)$

$\gamma(\alpha, 0) = \gamma(0)$

$\gamma(\alpha, 1) = \gamma(1)$

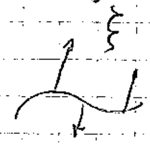
Se $\gamma = \gamma(t)$ è critico per I

deve essere:

$$\left(\frac{\partial \dot\gamma}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}, \dot\gamma \right) = 0 \quad \forall \text{ variazione}$$

Ciò eq. ad assumere, estendendo $\dot\gamma$ } variazioni,

e cons. ξ t.c. $[\underbrace{\dot\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t} = \dot\gamma}, \underbrace{\xi}_{\frac{\partial}{\partial \alpha}}] = 0$



posso lavorare con dei riferimenti mobili

conn. di Levi Civita

$$\boxed{(\nabla_\xi \dot\gamma, \dot\gamma) = 0} \quad \forall \xi$$

ma $\nabla_\xi \dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma} \xi$ (assenza di torsione!)

$\Rightarrow$ su γ $\quad (\nabla_{\dot\gamma}\xi, \dot\gamma) = 0 \Rightarrow (\xi, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) = 0$

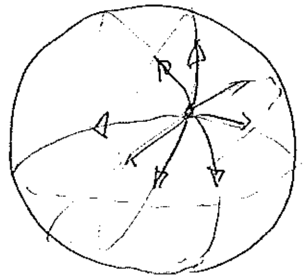
$\Downarrow$ $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \parallel \dot\gamma$

$\Rightarrow$ ★ $\boxed{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0}$ $\Leftarrow$ ma $\dot\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) = \frac{\partial}{\partial s} \|\gamma'\| = 0$

X-35'

Applicazione esponenziale (Riemanniana)
(o mappa esponenziale)

[precursore: Al-Biruni XI sec d.C cerchi massimi]



(M, g) var. Riemanniana

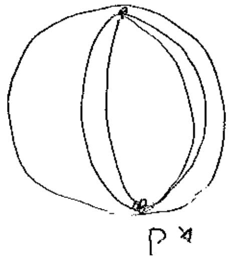
sp. tangente in p

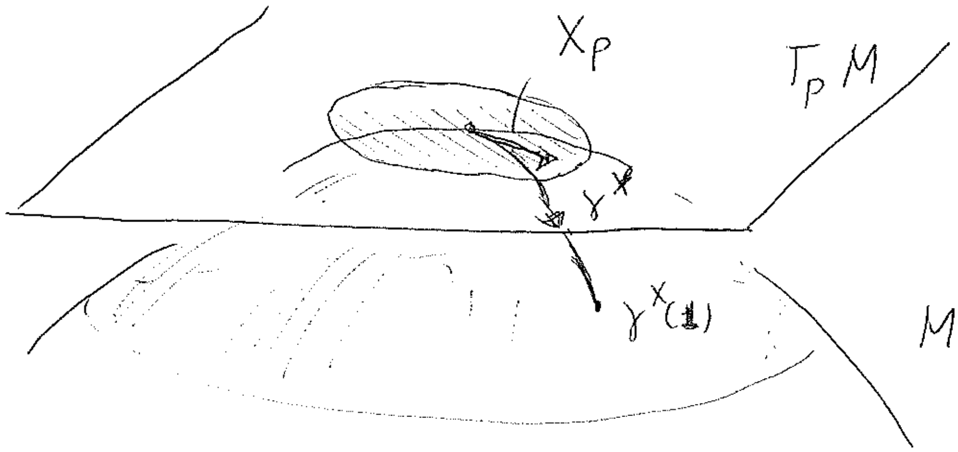
$$\mathrm{Exp}_p \quad T_pM \longrightarrow M$$
$$\cup\!\!\!\!\shortmid \qquad\qquad$$
$$X = X_p \longmapsto \gamma^X(1)$$

vettore tangente

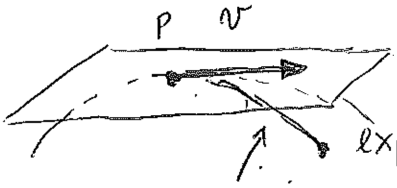
$\gamma^X = \gamma^X(s)$, geodetica uscente da p con velocità $\gamma'(0) = X_p$

[loc. è un diffeomorfismo, non lo è globalmente, in generale





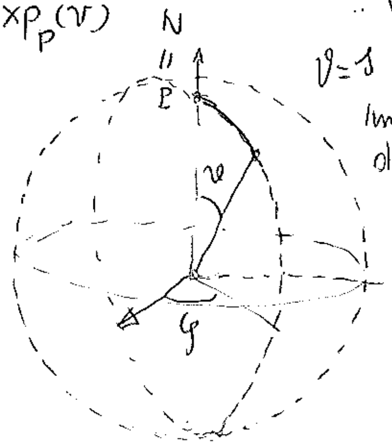
✧ La mappa esponenziale su S^2



$\exp_p(v)$

geodetica uscente da p, direzione $\underline{v}$, lunghezza $\equiv \|\underline{v}\|$

$= \sqrt{g_p(\underline{v},\underline{v})}$



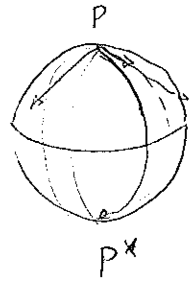
$$\mathbb{R}^2 \supset U \xrightarrow{\exp_p} S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$v = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\vartheta = s$ — lunghezza d'arco

longitudine

Calcoliamo $d\exp_p$



p e p^*: coniugati

$$(d\exp)_p : \quad T_p\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\exp_p} S^2 \subset T_{\exp_p}\mathbb{R}^3$$

$$(d\exp)_p : \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & +\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ se $\vartheta = 0$, φ [illegible] !!

$\vartheta \in (0, 2\pi)$ e

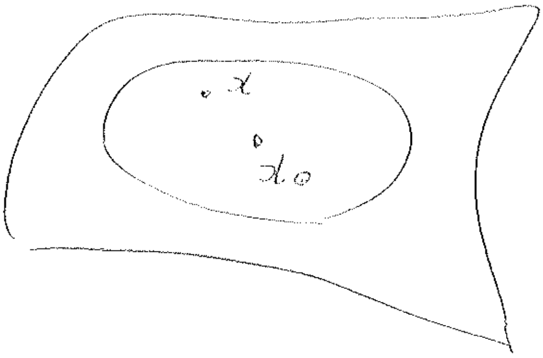
se $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \neq \pi$ rango $= 2$

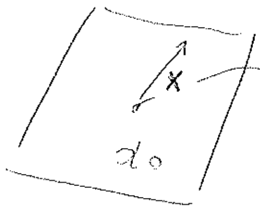
se $\vartheta = \pi$ si ha caduta di rango

$\underline{v} = \begin{pmatrix} \pi \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, d\exp_p$

4 Metrica in <u>coordinate</u> <u>normali</u> (o geodetiche)

$$X \leftrightarrow \exp_{x_0} X$$





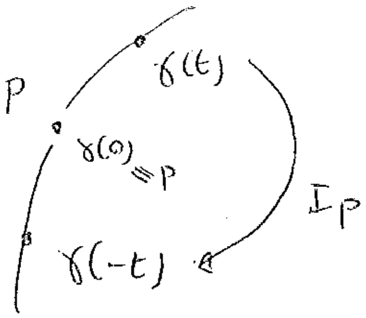
$$g_{ij}(x) = \underset{\underset{\displaystyle g_{ij}(x_0)}{\shortparallel}}{\delta_{ij}} - \frac{1}{3}\sum_{kl} R_{ikjl}(x_0)\, x^k x^l + \dots$$

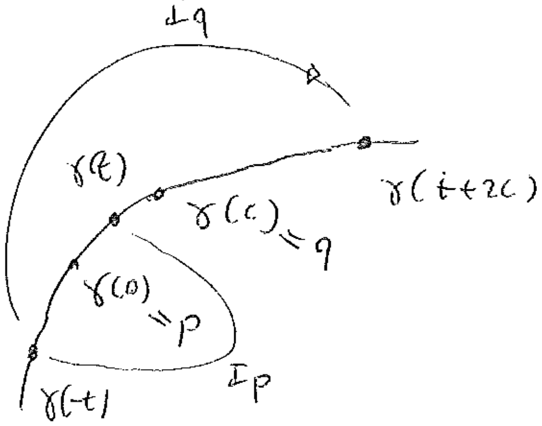
tensore di Riemann

Spazi simmetrici

Uno spazio simmetrico è una varietà Riemanniana connessa tale che $\forall\, p \in M \ \exists\, I_p : M \to M$ (isometria) che lascia p fisso e inverte le geod. per p:

Se γ è geod e $\gamma(0) = p$, $\quad I_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$



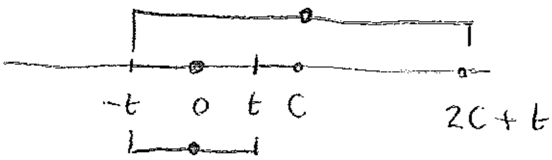


Sia γ una geod.

Allora $\quad I_q I_p(\gamma(t)) =$

$\gamma(t+2c)$

(se $\gamma(t)$ e $\gamma(t+2c)$ sono definiti)



(con $(I)_* p$

Lo stesso vale per qualsiasi $V = V(t)$ parallelo (lungo γ)

(si assume che $I_{p*} V(0) = -V(0)$

$(I_p)_* V$ è parallelo (I_p è isometria) $\Rightarrow$

$$(I_p)_* V(t) = -V(t) \quad \text{e} \quad (I_q)_* (I_p)_* V(t) = V(t+2c)$$

M s. simmetrico $\Rightarrow$ M completa

(Chiaro, le geodetiche si estendono indefinitamente)

inoltre I_p è univ. definita

☆ Corollario (def. originale di E. Cartan di Sp. localmente simmetrico)

Se $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ sono paralleli lungo γ

allora $R(\bar{U}, V)\bar{W}$ è pure parallelo

$(\nabla R = 0)$

Dim. Sia X parallelo; $\langle R(\bar{U}, \bar{V})\bar{W}, X\rangle$ è costante : infatti sia $p = \gamma(0)$ $q = \gamma(c)$;

Si consideri $T = I_{\gamma(c/2)} I_p$: essa manda p in q, e conserva vettori paralleli : perciò

$\langle R(\bar{U}_q, \bar{V}_q), W_q, X_q\rangle = \langle R(T_* U_p\, T_* \bar{V}_p) T_* W_p, T_* X_p\rangle$

(R è inv per isometrie)

$= \langle R(\bar{U}_p, \bar{V}_p) W_p, X_p\rangle$

Check

$\Rightarrow$ Data l'arbitrarietà di p, $R(\bar{U}, \bar{V})\bar{W}$ è parallelo.

[M completa, sempl. conn e loc simm è simm]

☆ Osservazione : si prenda uno spazio simmetrico. Si rimuova un punto : tale spazio non è più completo, e dunque non può essere simmetrico ☆ ma è localmente simmetrico

I gruppi di Lie come spazi simmetrici

Sia G un gruppo di Lie munito di una metrica biinvariante (nel caso compatto esiste sempre: infatti si consideri la misura di Haar di G (biinvariante) e si integri una metrica su $\mathfrak{g} \cong T_eG$.

Ex: metrica di Killing $\langle A, A \rangle = -\mathrm{Tr}\, A^2$ nella rappr. aggiunta)

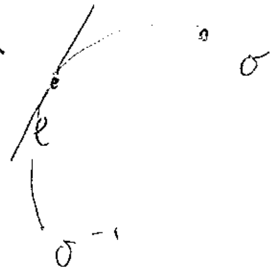
G è allora uno spazio simmetrico e

$$\left[\ I_\tau(\sigma) = \tau\sigma^{-1}\tau\ \right]$$

Dim. Si ponga $I_e(\sigma) = \sigma^{-1}$. Allora

$$(I_e)_* \bar{V} = -\bar{V}$$

e perciò è un'isometria su TG_e



dato per scontato

ora $I_e = R_{\sigma^{-1}} I_e L_{\sigma^{-1}}$

$$\left(\text{Check:} \quad I_e(\tau) = \tau^{-1} \overset{?}{=} (\sigma^{-1}\tau)^{-1}\sigma^{-1} \right)$$

$$\tau^{-1}\cancel{\sigma}\,\cancel{\sigma^{-1}}$$

$\Rightarrow$ $(I_e)_*$ è un'isometria da

$$TG_\sigma \to TG_{\sigma^{-1}}$$

che cambia il verso alle geod. per e e si def. $I_\tau(\sigma) = \tau\sigma^{-1}\tau$, da

$I_\tau = R_\tau I_e R_\tau^{-1}$ si vede che I_τ è una isometria che cambia il verso alle geodetiche.

§ geodetiche e gruppi ad un parametro

Dim. (v. Milnor) $\gamma : \mathbb{R} \to G \quad \gamma(0) = e$

geodetica. Si ha: $I_{\gamma(t)} I_e(\gamma(u)) = \gamma(u+2t)$

ma $I_{\gamma(t)} I_e(\sigma) = \gamma(t)\,\sigma^{-1}\gamma(t)$ (infatti $I_e(\sigma) = \sigma^{-1}$, $I_{\gamma(t)}(\sigma^{-1}) = \gamma(t)\sigma\gamma(t)$)

$\Rightarrow \quad \gamma(u+2t) = \gamma(t)\gamma(u)\gamma(t)$

$\Rightarrow (u=0) \quad \gamma(2t) = \gamma(t)^2$

$\Rightarrow \quad \gamma(nt) = \gamma(t)^n$

Da ciò segue subito che $\boxed{\gamma(t'+t'') = \gamma(t')\gamma(t'')}$

se t'/t'' è razionale; per continuità vale sempre.

Dunque geodetica $\Rightarrow$ gruppo ad un par.

Viceversa dato un gruppo ad un par. si consideri la geod. con lo stesso vettore velocità in e: ma questa def. un s. gruppo ad un parametro, dunque coincide con quello di partenza. □

Importante

Variante. Diamo direttamente la connessione di Levi-Civita: $\nabla_X = \frac{1}{2}[X, \cdot] = \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_X(\cdot)$
(Cartan)

L'assenza di torsione è chiara. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X,Y] - \frac{1}{2}[Y,X] = [X,Y]$.

La metricità segue dal fatto che una metrica biinvariante "coincide" con un prodotto scalare Ad-invariante.

e dunque $\langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle = 0 \quad (\Diamond)$

$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$
$= 0$

X - 41

⌈ check. (caso matriciale)

$$g_t^Y X g_t^{Y\,-1} = e^{tY} X e^{-tY} = (1+tY)\, X\, (1-tY+\dots)$$
$$= 1 + t[Y,X] + \dots \quad ⌋$$

(è chiaro che basta lavorare con i vettoriali g-invarianti
il fibrato tangente di un gruppo di Lie è banale
(o parallelizzabile))

Dunque. $\nabla_X X = \frac{1}{2}[X,X] = 0$

cioè i $\underbrace{\text{campi v. inv. a sinistra}}_{\cong\, \mathfrak{g}}$ sono geodetiche ||

Def. la connessione di Levi Civita

viceversa, da $\nabla_Z Z = 0$ (i s. gruppi ad un parametro sono geodetiche)

$$\nabla_{X+Y}(X+Y) = 0$$

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0$$

Da $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (ass. di torsione)

Segue $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ ||

⌈ $\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle$ ossia, a livello

infinitesimale $g = e^{tZ}$: $\langle e^{tZ} X e^{-tZ}, e^{tZ} Y e^{-tZ}\rangle =$

check di (◁)

$$= \langle X + t[Z,X] + \dots, Y + t[Z,Y] + \dots\rangle$$

$$= \langle X, Y\rangle + t\{\langle \underbrace{[Z,X]}_{ad_Z X}, Y\rangle + \langle X, \underbrace{[Z,Y]}_{ad_Z Y}\rangle\} + \dots$$

$$\Rightarrow \langle [Z,X], Y\rangle + \langle X, [Z,Y]\rangle = 0$$

Curvatura della connessione di Cartan

1) $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z] = \frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_{[X,Y]}Z = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]Z$

2) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \frac{1}{4}\langle [X,Y],[Z,W]\rangle$

Infatti: $\quad (R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y])$

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$= \underbrace{\left\{ \nabla_{[X,Y]} - (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) \right\}}_{R(X,Y)Z} Z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[[X,Y],Z] - \left\{ \frac{1}{4}[X[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y[X,Z]] \right\}$$

$$\frac{1}{4}(*) + \frac{1}{4}(*) + \frac{1}{4}[[Y,Z],X] + \frac{1}{4}[[X,Z],Y]$$

$$= \frac{1}{4}[[X,Y],Z] + \frac{1}{4}\underbrace{(\text{Jacobi})}_{=0}$$

2) Segue facilmente da 1)

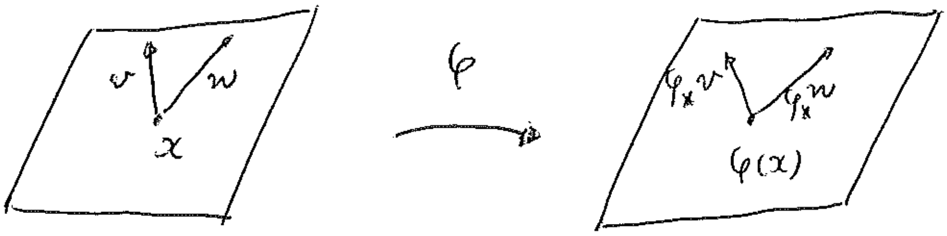
Corollario $\quad \langle R(X,Y)X, Y\rangle = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 \geq 0$

(curvatura sezionale non negativa)

★ Metrica su Sym^+ — matrici simmetriche def. positive

invariante

φ_* : diff di φ $\equiv$ push-forward



★ invarianza

$$\langle \varphi_* v , \varphi_* w \rangle_{\varphi(x)} = \langle v, w \rangle_x$$

$$I \longmapsto A \cdot I \cdot A^T = AA^T = \Sigma$$

$$W' \longmapsto A\, W'\, A^T = W$$

$$\Rightarrow \quad W' = A^{-1} W A^{-T}$$

$$\langle W_1' W_2' \rangle_I := Tr (W_1' W_2'^T)$$

$\downarrow$

si impone $\quad |||$

$$\langle W_1, W_2 \rangle_\Sigma = Tr (A^{-1} W_1 A^{-T} A^{-1} W_2 A^{-T})$$

$$= Tr (A^{-1} W_1 (AA^T)^{-1} W_2 A^{-T})$$

Seguito $\quad \Sigma + t\overline{W}_i$

$$\langle W_1, W_2 \rangle_\Sigma = \mathrm{Tr}\left(A^{-1}\overline{W}_1 (AA^T)^{-1} \overline{W}_2 A^{-T} \right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(A^{-T}A^{-1}\overline{W}_1 (AA^T)^{-1}\overline{W}_2 \right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left((\underbrace{AA^T}_{\Sigma})^{-1}\overline{W}_1 \, (\underbrace{AA^T}_{\Sigma})^{-1}\overline{W}_2 \right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\Sigma^{-1}\overline{W}_1 \, \Sigma^{-1}\overline{W}_2 \right)$$

Dunque $\boxed{\langle W_1, W_2 \rangle_\Sigma = \mathrm{Tr}\left(\Sigma^{-1}\overline{W}_1 \, \Sigma^{-1}\overline{W}_2 \right)}$

in part. se $W_1 = \overline{W}_2 = \overline{W}$

$$\boxed{\| W \|_\Sigma^2 = \mathrm{Tr}\left((\Sigma^{-1}\overline{W})^2 \right)}$$

++ Metrica riemanniana su Sym^+

invariante per congruenza

$G = GL(n, \mathbb{R})$ $\qquad\qquad O^T O = I$

$H = O(n)$

$G \xrightarrow{\pi} G/H$

$A = -A^T$
$S = S^T$

$G/H = Sym^+$ (def. pos)

$(*)\ Tr(A^T S) = -Tr(AS)$
$\parallel$
$Tr((A^T S)^T)$
$\parallel$
$Tr(S^T A)$
$\parallel$
$Tr(SA) = Tr(AS)$
$\Rightarrow (*) = 0$

dec. ortogonale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ matrici $n \times n$; $\mathfrak{h}$ = ASym $\cong \mathfrak{o}(n)$; $\mathfrak{m}$ = Sym

simmetria: $\mathfrak{m} \longleftrightarrow -\mathfrak{m}$ matrice simm

★ Lemma (SW)

$$(\nabla_X Y)_{eH} = \pi([y_{\mathfrak{h}}, x_{\mathfrak{m}}])$$

Levi-Civita $\qquad\qquad x, y \in \mathfrak{g}$

Se $Y|_{eH} = y = y_{\mathfrak{m}}$, è subito

$(\nabla_Y Y)_{eH} = 0 \quad \Rightarrow$ ★★ il s. gruppo ad un parametro gen da $y = y_{\mathfrak{m}}$ (matrice symmetrica) è una geodetica ✓ $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$

☆ Curvatura

$$R_o^M(\pi(x),\pi(y))\,\pi(z) = \pi\,[[x,y],z]$$

$$R^m(x,y)\cdot z = [[x,y],z] \qquad x,y,z \in m$$

$$\begin{array}{r} \| \\ Sym \end{array}$$

$$R(x,y,z,w) = \langle R(x,y)z, w\rangle$$

$$= Tr([[X,Y],Z]\,W)$$

curv. sezionale

$$R(x,y,x,y) = Tr([[X,Y],X]\,Y)$$

$$Tr\;((XY-YX)XY - X(XY-YX)Y\;)$$

$$= Tr\,(XYXY - YX^2Y - X^2Y^2 + XYXY)$$

$$= 2Tr\,(XYXY) - 2Tr\,(YX^2Y)$$

$$YX\ XY$$

$$= 2Tr\,([X,Y]\,XY)$$

X-47

$$\mathrm{Sym}^+ = GL(n, \mathbb{R}) \,/\, O(n)$$

geodetiche ($\equiv$ sottogruppi ad un parametro)

$$\Gamma_{(\Sigma, W)}(t) = e^{tA} \cdot \Sigma \cdot e^{(tA)^T}$$

$$= e^{tA}\, \Sigma \cdot e^{tA^T}$$

W Σ

$e^{tA} = 1 + tA + \dots \qquad e^{tA^T} = 1 + tA^T + \dots$

$$= \Sigma + t\underbrace{(A\Sigma + \Sigma A^T)}_{W} + \dots$$

check $\left[(A\Sigma + \Sigma A^T)^T = \Sigma A^T + A\Sigma \right.$

$$W = A\Sigma + \Sigma A^T \quad \text{"eq. di Sylvester"}$$

Se $\Sigma = I$ è $\bar{W} = A + A^T$! se $\bar{W} \in \mathrm{Sym}^+$

e, dato $\bar{W}$, si può prendere $A = \frac{1}{2}\bar{W}$

$$\Rightarrow \Gamma_{(I, W)}(t) = e^{\frac{t}{2}\bar{W}} \cdot e^{\frac{t}{2}\bar{W}} = e^{t\bar{W}}$$

[In generale: $A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$ in modo che A sia invertibile

$\frac{W}{2} + Z$, $Z \in \mathrm{ASym} \equiv \mathfrak{o}(n)$

Ulteriori riferimenti bibliografici

- G. Gentili, F. Podestà, E. Vesentini
  Lezioni di geometria differenziale
  Bollati-Boringhieri, Torino, 1995

- F. Warner
  Foundations of differential geometry and Lie groups
  Scott, Foresman & Co. Glenview, 1971

- W. M. Boothby
  An introduction to differentiable manifolds & Riemannian geometry
  Academic Press, 1975

- W. Kühnel
  Differential geometry - Curves, surfaces, manifolds
  AMS 2006