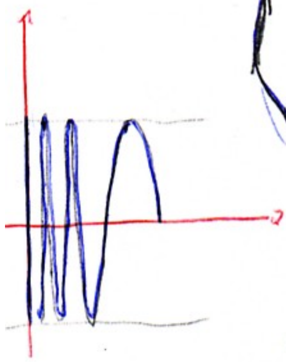
ELEMENTI DI TOPOLOGIA

Mauro Spera
(CDI - Università di Verona)

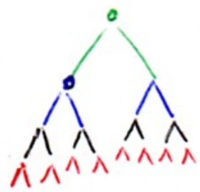
per il Dottorato in Informatica
a.a. 2008/09

★ Elementi di topologia generale

Separazione (Hausdorff vs non-Hausdorff)



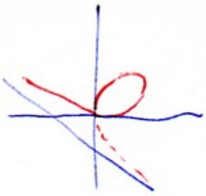
compattezza



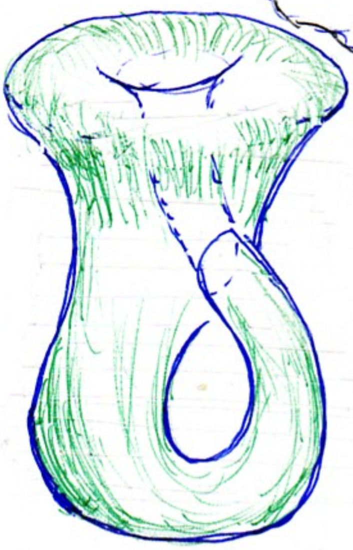
connessione

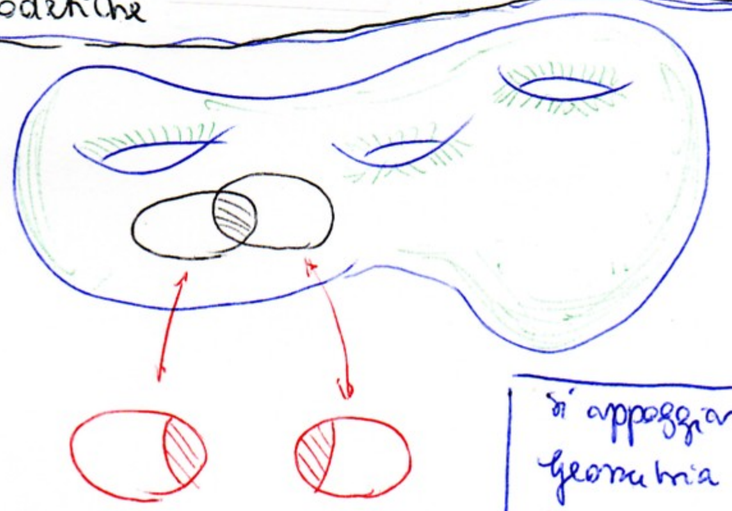
costruzione di funzioni continue

paracompattezza



★ Introduzione alle varietà differenziabili
gruppi di Lie, spazi omogenei, fibrati
Elementi di geometria Riemanniana
connessione di Levi-Civita. Curvature
geodetiche





si appoggiano a
Geometria (M.S.)
a.a. 2007/08
disponibili in rete

INTRODUZIONE STORICA
(traccia)

Lezione I
Prof. Mauro Spera
a.a 2008/09 / DI-Verona

topologia : evoluzione dell' "esprit de géométrie"

Studio delle proprietà invarianti per "deformazioni continue"
ci si svincola in particolare da relazioni metriche

geometria "classica"
(Euclide, Archimede, Apollonio)
III - II sec a. C

* analisi matematica antica: teoria delle proporzioni (V libro) Eudosso

geometria analitica
(Descartes, XVII)

Huygens

calcolo differenziale e integrale
(Newton, Leibniz XVII
Bernoulli, Eulero, Lagrange.. XVIII

meccanica

* esigenze di rigore
XIX Cauchy...
serie di Fourier

geometrie non euclidee XIX
(Gauss, Bolyai, Lobačevski)

Gauss

Riemann
(integrazione; varietà riemanniane)
analisi complessa

$\boxed{\text{Dedekind}}$
Boole
Frege
Cantor
$\boxed{\text{Weierstrass}}$

$\boxed{\text{Poincaré analysis situs TOPOLOGIA ALGEBRICA}}$
1895 →

analisi funzionale
Volterra, Fréchet, Riesz.

$\boxed{\text{Hausdorff TOPOLOGIA GENERALE}}$
1914

G. Ricci Curbastro
T. Levi - Civita
calcolo differenziale assoluto
H. Weyl

→ EINSTEIN

— G. de Rham
varietà differenziabili

Piero della Francesca XV

Guidobaldo del Monte XVII

geometria proiettiva
(Desargues, Pascal, XVII

Monge

geometria proiettiva
(Poncelet)

Klein

computer vision

geometria algebrica
↓
Grothendieck

* La topologia generale permea tutta la matematica moderna

★ Proprietà di separazione

T: Trennung (separazione in tedesco)

T_0 (Kolmogorov) : dati $x, y \in X$ (distinti)

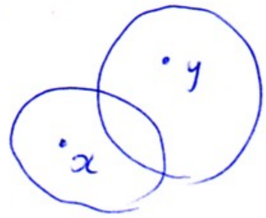
$\exists\, \mathcal{U}_x \ni x \,,\; \mathcal{U}_x \not\ni y$

intorno (aperto) (per fissare le idee)

T_1 (Fréchet) dati $x, y \in X$ (distinti)

$\exists\, \mathcal{U}_x \ni x \,,\; \mathcal{U}_x \not\ni y$

$\exists\, \mathcal{U}_y \ni y \,,\; \mathcal{U}_y \not\ni x$



T_2 (Hausdorff) dati $x, y \in X$ (distinti)

$\exists\, \mathcal{U}_x \ni x \,,\; \mathcal{U}_x \not\ni y$

$\exists\, \mathcal{U}_y \ni y \quad \mathcal{U}_y \not\ni x$

$\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$

Altre proprietà di questo tipo verranno esaminate in seguito.

$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

"unicità del limite"

$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ base per $\mathcal{T}$: ogni aperto è unione (arbitraria) di aperti di $\mathcal{B}$

★ $X = \{a, b\}$ $\quad \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

(Spazio di Sierpinski)

È T_0 ma non T_1

Esempi vari

★ $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$
non è T_0

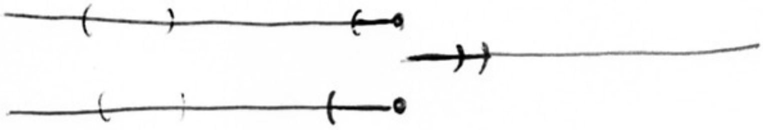
★ retta di Sorgenfrey

base di aperti : intervalli semichiusi $[a, b)$

È più fine di quella euclidea

$$\left((a,b) = \bigcup_{\substack{c>a \\ c<b}} [c, b) \right)$$

★ IMPORTANTE



è uno spazio "localmente euclideo"

ma non T_2 (è T_1)

4 Topologia cofinita

X insieme (non vuoto) [caso di maggior interesse: X infinito]

$C \subset X$ è chiuso se $C = X$

oppure C è finito

Dunque un aperto non vuoto è il complementare di un insieme finito

Sono verificati gli assiomi (conviene lavorare in termini di insiemi chiusi)

T_0? T_1? Siano $x, y \in X$

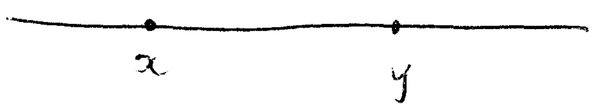
intorno di x che non contiene y:

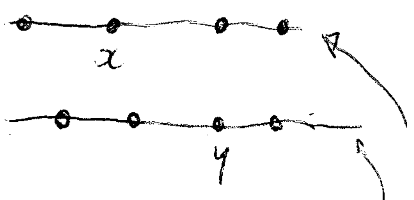
ecco: $U = X \setminus \{y\}$

e così: $V = X \setminus \{x\}$ intorno di y

che non contiene x

È T_2? in genere no:





Siano $U_x \ni x$, $V_y \ni y$ aperti ((compl. di ins. finiti))

$\Rightarrow U_x \cap V_y \neq \emptyset$

Topologia di Zariski

importante in geometria algebrica

$\mathbb{K}$ campo, $n > 0$ intero

$K[x_1 \dots x_n]$ anello di pol. in n coord. a coeff. in K

polinomio

Sia $f \in \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]$

$$D(f) = \{(a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n / f(a_1 \dots a_n) \neq 0\}$$

$$D(1) = \mathbb{K}^n$$

$$D(f) \cap D(g) = D(fg)$$

$\Rightarrow$ i $D(f)$ danno vita ad una base per una topologia, detta di Zariski, su $\mathbb{K}^n$

$$V(f) := D(f)^c$$

$$\underset{\substack{\cap \\ K[x_1 \dots x_n]}}{V(E)} := \bigcap_{f \in E} V(f) = \{(a_1 \dots a_n) \in K^n / f(a_1 \dots a_n) = 0 \ \forall f \in E\}$$

Se $f \in$ ideale generato da E

$$f = \sum_{i=1}^{m} \underset{\substack{\cap \\ E}}{f_i} \underset{\substack{\cap \\ K[x_1 \dots x_m]}}{g_i}$$ si ha

$V(E) \subseteq V(f)$ $f \in I$, id gen da I

$V(E) \subseteq V(I)$

ma $V(I) \subseteq V(E)$

$\Rightarrow V(I) = V(E)$

se I = id gen da E

$$V(E) \subset V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots V(f_m) \subset V(f)$$

Se I è l'id gen di E: $V(I) = V(E)$ $\Rightarrow$ i $V(I)$ sono i chiusi della top di Zariski

I ideale di $K[x_1 \dots x_m]$

Es. $\mathbb{C}[x] = \{$ pol. in x a coeff. complessi $\}$

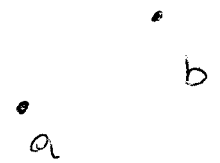
(x var. complessa)

$D(f) = \{ a \in \mathbb{C} \,/\, f(a) \neq 0 \}$ base per la topologia di Zariski (su $\mathbb{C}$)

Siano $a, b \in \mathbb{C}$ (distinti)

Sia $f \equiv$ pol. t.c. $f(a) \neq 0$ e $f(b) = 0$

$a \in D(f)$ ma $b \notin D(f)$



$\Rightarrow$ la top è T_0

Analogamente, la top. è T_1 ...

$g(b) \neq 0 \quad g(a) = 0$

4 Consideriamo $D(f) \cap D(g)$

Esistono certamente punti c tali che $f(c) \neq 0$, $g(c) \neq 0$ (distinti, nec. da a e b)

Dunque $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

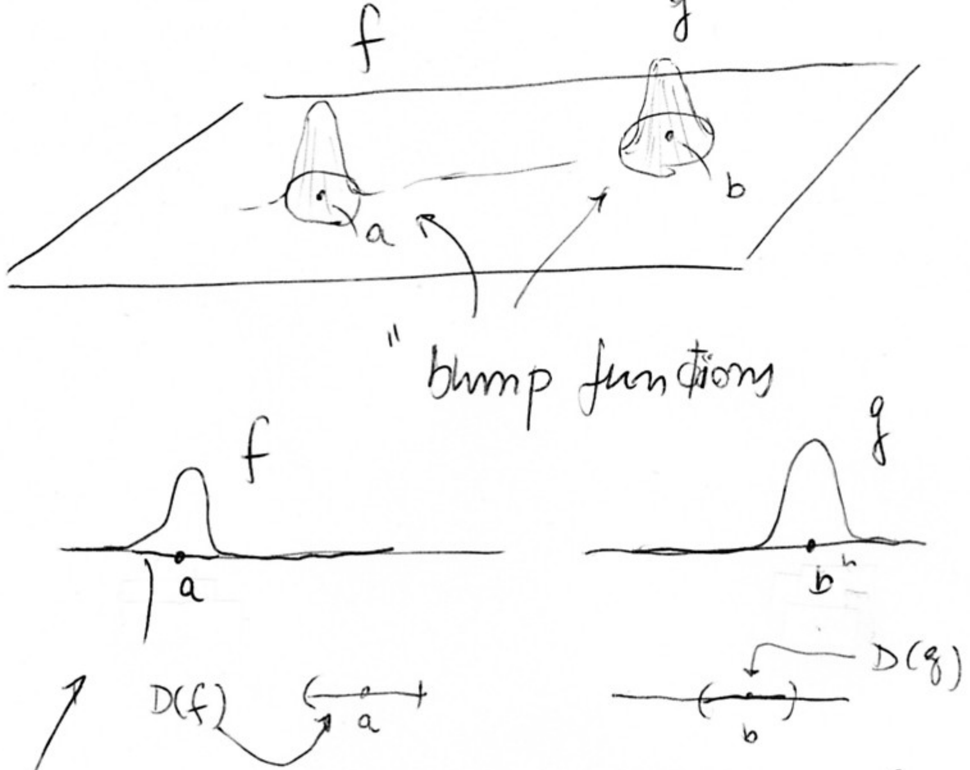
$\Rightarrow$ a e b non possono essere separati da intorni di Zariski disgiunti.

$\boxed{\text{Zariski non è } T_2}$

☆ Osservazione estemporanea
importante per il seguito

Sempre su $\mathbb{C}$ (o su $\mathbb{R}$), immaginiamo di costruire una topologia di tipo Zariski, ma utilizzando tutte le f. continue, e non solo i polinomi.

Tale topologia diviene di Hausdorff:



e di fatto si ottiene la topologia ordinaria

i polinomi non sono "bump".

★ La costruzione di tali funzioni è cruciale in topologia, ma non è possibile effettuarla in generale

$\bigstar$ Esistono infiniti numeri primi
(Cf. Manetti, Topologia, Springer Italia, 2008)
p. 41

[dim. standard (Euclide) p.a. siano $p_1 \dots p_N$ tutti e soli i primi. Allora $a = p_1 \cdots p_n + 1$ non è divisibile per i p_i (il resto è sempre 1). Pertanto è un nuovo numero primo. Assurdo]

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$

Sia $N_{a,b} = \{ a + k b \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$

(progressione aritmetica)

$\mathcal{B} = \{ N_{a,b} \}_{\substack{a \in \mathbb{Z} \\ b > 0}}$ è base per una topologia su $\mathbb{Z}$

(le unioni arbitrarie di $N_{a,b}$ soddisfano gli assiomi (aggiungendo $\emptyset$))

$\bigstar$ $N_{a,b}$ è aperto e chiuso [pertanto lo sp. topologico in questione è sconnesso

È aperto per def.; è chiuso perché il suo complementare è aperto: è infatti l'unione di tutte le $N_{a',b'}$ diverse da quella data.

Se ora $P = \{\text{n. primi}\}$. Si ha $\mathbb{Z} - \{-1, 1\} =$ [1 non è primo]

$\bigcup \{ N_{0,p} \ / \ p \in P \}$ se $\text{Card}\, P < \infty$,

tale unione è finita ed è un chiuso $\Rightarrow \{-1, 1\}$ è aperto: contraddizione.