★ Compattificazione ad un punto [di Alexandrov]

Sia X localmente compatto

(ogni $x \in X$ ammette un intorno a chiusura compatta) (eq: base di intorni compatti)

ma non compatto.

Sia $p \notin X$

$\tilde{X} := X \cup \{p\}$

ALTRI ESEMPI

Per le nozioni di compattezza e connessione si vedano i rif., e anche le lez. II e III del corso di geometria

intorni di p : $\{p\} \cup X \setminus K$ $\quad K \subset X$ compatto

$\tilde{X}$ è compatto :

sia dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ di $\tilde{X}$

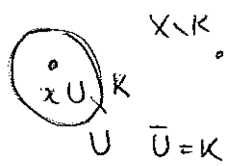
un $U_{\bar{\alpha}} \supset \tilde{X} \setminus K \ni p$. Da $\tilde{X} = (\tilde{X} \setminus K) \cup \underset{\text{compatto}}{K}$

segue che da $\{U_\alpha\}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito, da cui l'asserto

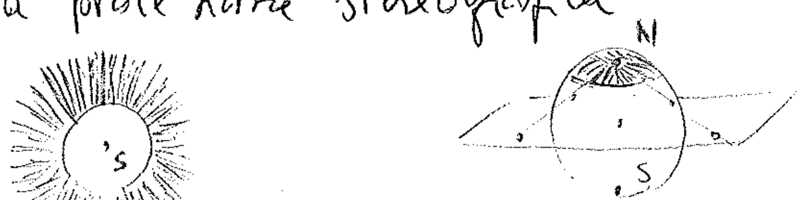
$X \subset \tilde{X}$ è aperto (chiaro)

X è denso in $\tilde{X}$ (chiaro)

Se X è Hausdorff lo è anche $\tilde{X}$:



Es: la proiezione stereografica



★ Dominio di Kahn $\underline{P} = 2^{*\omega}$

[ordinario]

P è compatto; infatti, assumiamo che $\forall\, l$ finita, starts l è compatto: sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ un ricoprimento aperto di starts l.

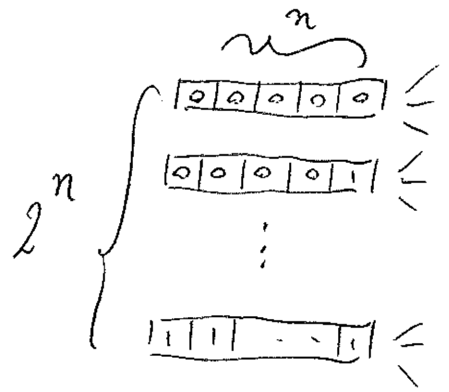
Sia $U_{\bar\alpha} \ni l$; allora, da $U_{\bar\alpha} = \uparrow U_{\bar\alpha}$, si ha che $U_{\bar\alpha} \supset$ starts l $\Rightarrow$ estraggo un ricoprimento finito: $U_{\bar\alpha}$ stesso.

Ovviamente; $\bigcup\limits_{l \in Y \text{ insieme finito}}$ starts l è pure compatto

Ma $P =$ starts $\boxed{0}$ $\cup$ starts $\boxed{1}$, da cui l'asserto.

|| Si noti che in $\mathbb{R}$ (top. ordinaria), l'unico sottoinsieme compatto e aperto è ϕ

$$\bar U_n = \bigvee \{ \text{starts } \ell \;:\; L(\ell) = n \}$$



$\bar U_n$ è aperto e compatto (!!)

$$\bar U_0 = 2^{*\omega} \supseteq \bar U_1 \supseteq \dots$$

$$2^\omega = \bigcap_{N \geq 0} \bar U_N$$

(es. di insieme saturo)

2^ω non è aperto altrimenti $2^{*\omega} \setminus 2^\omega$ sarebbe chiuso, e pertanto conterrebbe i sup degli insiemi diretti

Dimostriamo che 2^ω è compatto

[Osserviamo che 2^ω non è chiuso: infatti, se lo fosse, $2^{*\omega} \setminus 2^\omega$ sarebbe aperto, ma un aperto di Scott non può avere solo stringhe finite, poiché è superiormente chiuso]

$\boxed{\text{☆} \quad 2^\omega \text{ è compatto}}$

Sia $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \supset 2^\omega$ ricoprimento aperto

$\mathcal{U}_\alpha = \{ \text{starts } l \ / \ l \in \mathcal{U}_\alpha \}$

(è un aperto di Scott)

Sia $L_\alpha = \min\{ L(l) \ , \ l \in \mathcal{U}_\alpha \}$

Sia $L = \min\{L_\alpha\}$ $\qquad 2^\omega \subset U_L$

ora $2^\omega \subset \bigcup_\alpha (\underbrace{U_L \cap \mathcal{U}_\alpha}_{\mathcal{V}_\alpha \text{ aperto}})$

e $\mathcal{V}_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha$ per come è stato scelto L

$\Rightarrow \{\mathcal{V}_\alpha\}$ è ric. aperto di U_L

Ma essendo U_L compatto, $U_L = \bigcup_{\beta \in \mathcal{Y}} \mathcal{V}_\beta \qquad \mathcal{Y} \subset \Omega$ finito

$\Rightarrow 2^\omega \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{Y}} \mathcal{U}_\beta$ ∎

☆ Teorema. Se L è un (semi) reticolo completo, la topologia di Lawson $\lambda(L)$ è T_1 e compatta.

Dim. Sia $x \in L$; è $\{x\} = \underbrace{\downarrow x}_{\text{chiuso di Scott}} \cap \underbrace{\uparrow x}_{\text{chiuso nella lower topology}}$

$\Rightarrow \{x\}$ è Lawson-chiuso $\Rightarrow \lambda(T)$ è T_1

Sia L un reticolo completo

Ricordiamo il ☆ criterio di Alexander:

X è compatto se ogni ricoprimento aperto costituito da insiemi di una subbase ammette un sottoricoprimento finito. per dimostrarlo è necessario l'assioma della scelta ($\equiv$ lemma di Zorn)

Siano $\{ U_j , U_j \in \sigma(L) \}$, $\{ L \setminus \uparrow x_k , k \in K \}$ che ricoprano L. Sia $x = \sup \{ x_k \}$ [finisca la completezza]

$\bigcup (L \setminus \uparrow x_k) = L \setminus \bigcap (\uparrow x_k) = L \setminus \uparrow x$! formo un insieme diretto

ma $x \notin L \setminus \uparrow x \Rightarrow x \in U_j$ per qualche j

U_j è aperto di Scott $\Rightarrow \exists\, k_1 .. k_n \,/\, x_{k_1} \vee .. \vee x_{k_n} \in U_j$

$\Rightarrow U_j \cup (L \setminus \uparrow x_{k_1}) \cup .. (L \setminus \uparrow x_{k_n}) = L$

Nel caso di un semireticolo, si considera L^1 ..

(si aggiunge 1). L^1 è compatto

ma $\{1\}$ è Scott $\Rightarrow$ è Lawson $\Rightarrow$ L è compatto nella topologia relativa, che è $\lambda(L)$.

★ <u>Teorema</u> Se L è un <u>dominio</u>, $\lambda(L)$ è T_2

Dim. Siano dati $x \neq y$ in L.

Se $x \not\leq y$, $\exists$ $u \ll x$, $u \not\leq y$ (*)

Allora $\Uparrow u$ è Scott ($\Rightarrow$ Lawson) (†) $\ni x$

e $L \setminus \uparrow u$ è $\omega(L)$ ($\Rightarrow$ Lawson)

aperto $\ni y$. Tali intorni sono disgiunti

Se $x \leq y$ prendiamo $L \setminus \uparrow y$

e $\Uparrow y \subseteq \uparrow y$

x —— y

$(y \ll x \Rightarrow y \leq x)$

L poset è <u>continuo</u> se $x = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow x$

ovvero $\Downarrow x$ è diretto e $\sup \Downarrow x = x$

Un dcpo L continuo, è detto <u>dominio</u>

(*) Se $u \leq y$ ($\forall u$) sarebbe $\sup u \leq y$ $\Rightarrow$ $x \leq y$ contro l'ipotesi.

(†) Oss: Se L è un dominio $\Uparrow x$ è aperto $\forall x$

e, se L è un dcpo e $y \in \mathrm{int}(\uparrow x) \Rightarrow y \ll x$

‖ Se D è diretto e $\sup D \in \Uparrow x$, $\exists$ $d \in D$ t.che $x \ll d$

★ [<u>proprietà di interpolazione</u>: vale nei <u>poset</u> continui

$x \ll z \Rightarrow \exists y: x \ll y \ll z$]

★ Teorema $\qquad X$ sp. topologico

L = reticolo degli aperti ($= \tau$)
è completo

(i) $U, V \in \tau$; sia $U \subseteq \underset{\text{compatto}}{Q} \subseteq V$;

allora $U \ll V$

(ii) X localmente compatto

$U \ll V$ in $L \iff \exists \underset{\text{compatto}}{Q}$ con $U \subseteq Q \subseteq V$

Dim (i) un ricop. di V è ric. ap. di di Q

$\Rightarrow$ Q è ricoperto da un numero finito di aperti,

e dunque V è tale $\Rightarrow U \ll V$ per la caratterizzazione alternativa di $\ll$

(ii) $\forall v \in V$, $\exists Q_v \subseteq V$, con $\underset{\substack{\text{interno} \\ \text{o interiore}}}{\mathring{Q}_v} \ni v$

$V = \bigcup \{\mathring{Q}_v\}$; ma $U \ll V$

$\Rightarrow U \subseteq \mathring{Q}_{v_1} \cup \ldots \mathring{Q}_{v_n} \subseteq \overbrace{Q_{v_1} \cup \ldots Q_{v_n}}^{= Q}$

che è compatto

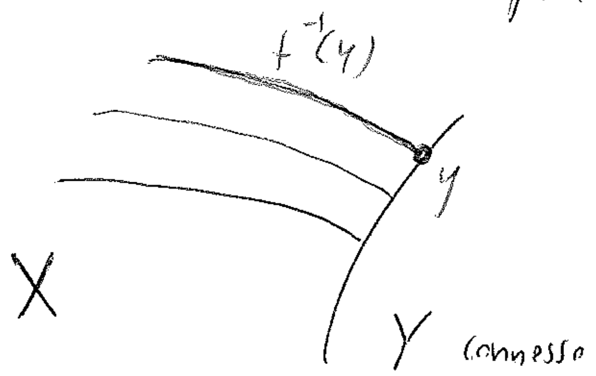
e $U \subseteq Q \subseteq V$

☆ Proposizione $f : X \longrightarrow Y$

continua, suriettiva, aperta o chiusa; Y connesso

$f^{-1}(y)$ connesso $\forall y$

"fibre connesse"



$\Rightarrow X$ è connesso

Dim.

Sia f aperta. Sia $X = A_1 \cup A_2$ aperti non vuoti

voglio mostrare che non sono disgiunti ($\Rightarrow X$ è connesso)

Si ha $Y = \underset{\text{aperto}}{f(A_1)} \cup \underset{\text{aperto}}{f(A_2)}$ (f è aperta)

Ma Y è connesso $\Rightarrow \exists\, y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. $\Rightarrow$

$f^{-1}(y) \cap A_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$

ma $f^{-1}(y)$ è connesso $\Rightarrow f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. $\square$

[se f è chiusa prendo $X = C_1 \cup C_2$ ecc....]

☆ <u>Corollario</u> X, Y connessi $\Rightarrow$ $X \times Y$ connesso

$$f : X \times Y \longrightarrow Y \qquad \text{(proiezione su } y\text{)}$$
$$(x, y) \longmapsto y$$

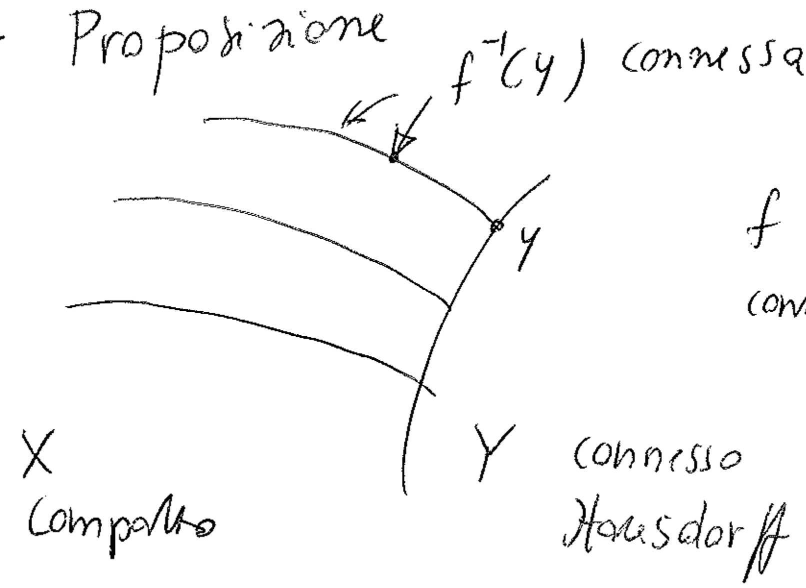
continua
suriettiva

$f^{-1}(y) \approx X$ $\quad$ f è aperta

connesso

($\underbrace{X_1 \times X_2 \ldots X_n}_{\text{connessi}}$ è connesso)

✧ Proposizione



$f: X \to Y$
continua, suriettiva

$\Rightarrow$ X è connesso

$f: \underset{\text{compatto}}{X} \longrightarrow \underset{\text{Hausdorff}}{Y}$

è <u>chiusa</u> : Sia $C \subset X$, chiuso

$\Rightarrow C$ è compatto $\Rightarrow f(C)$ è compatto

$\Rightarrow$ $f(C)$, compatto in un Hausdorff,

è chiuso $\Rightarrow$ f è chiusa.

Si applica allora la prop. precedente.

★ Gruppi lineari

sono gruppi topologici

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \det A \neq 0 \}$ matrici $n \times n$ non singolari (i.e. invertibili)

gruppo lineare generale reale

$SL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \det A = 1 \}$

gruppo lineare speciale reale

$SO(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t A = I \ , \ \det A = 1 \}$

gruppo ortogonale speciale reale

$GL(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ / \ \det A \neq 0 \}$

$SL(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ / \ \det A = 1 \}$

$U(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ / \ U^* U = I \}$

$SU(n, \mathbb{C}) = U(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$

sono s. spazi topologici di $\mathbb{R}^{n^2}$ o $\mathbb{C}^{n^2}$

($\Rightarrow$ sono metrizzabili $\Rightarrow$ Hausdorff)

$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \ / \ \det A > 0 \}$

dimostriamo che è connesso

$GL^+(1,\mathbb{R}) = (0,+\infty) \Rightarrow$ connesso

Assumiamo $GL^+(n-1,\mathbb{R})$ connesso

Proviamo che $GL^+(n,\mathbb{R})$ è allora connesso

L'asserto seguirà per induzione

$$p : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} * & | & | & | \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} * \end{pmatrix}$$

$$p'|_{GL^+(n,\mathbb{R})} \equiv p$$ è continua, aperta.

e $p(GL^+(n,\mathbb{R})) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

una matrice invertibile non può avere una colonna nulla. Dimostriamo che le fibre sono connesse
(sono omeomorfe tra loro)

Sia $e_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $p^{-1}(e_1) \neq \emptyset$, sia

$A \in GL^+(n,\mathbb{R})$ con $p(A) = e_1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & | & | & | \end{pmatrix}}_{A} \longmapsto \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix}$$

$$p^{-1}(e_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \\ 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \approx \underset{\text{connesso}}{\mathbb{R}^{n-1}} \times \underset{\text{connesso p.i.p.}}{GL^+(n-1,\mathbb{R})}$$

$\Downarrow$ connesso

$B \in GL^+(n-1,\mathbb{R})$ (Laplace)

Se $\quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \qquad p^{-1}(y) \neq \emptyset$

Sia $\quad \underset{\substack{\uparrow \\ GL^+(n,\mathbb{R})}}{A} : \quad p(A) = y$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} y & \end{array}\right]}_{A}$$

omeom

$L_A B$

$$p(A \cdot B) = A\, p(B) \qquad \left(\text{moltiplicazione tra matrici}\right)$$

$$L_A\, p^{-1}(e_1) = p^{-1}(y)$$

$\Rightarrow$ le fibre sono tutte omeomorfe tra loro

$\Rightarrow$ connesse.

Dunque $GL^+(n,\mathbb{R})$ è connesso

($GL(n,\mathbb{C})$ è connesso)

$SL(n, \mathbb{R})$ sono connessi
$\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} | & \cdot \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\det A} \Big| & \cdot \end{pmatrix}$$

è continua
e suriettiva $\Rightarrow$ l'asserto

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL^{+}(n, \mathbb{R}) \cup GL^{-}(n, \mathbb{R})$$

(disgiunta)

omeomorfi.. <u>non</u> è un gruppo

★ $SO(n, \mathbb{R})$, $U(n, \mathbb{C})$, $SU(n, \mathbb{C})$

sono <u>compatti</u> e <u>connessi</u>

Dim.

Vediamola per $SO(n, \mathbb{R})$

$SO(n, \mathbb{R})$ è compatto: $A \in SO(n)$

$$A = \left(\; \| \quad \underset{C_i}{\|} \quad \cdots \quad \| \; \right)$$

base ortonormale

(risp. al prodotto scalare standard) $\Rightarrow \| C_i \| = 1$

$$\Rightarrow SO(n) \subset \{ (a_{ij}) \, / \, \sum a_{ij}^2 = n \}$$

limitato.

$SO(n,\mathbb{R})$ è inoltre <u>chiuso</u>

si vede anche dal fatto che le condizioni che lo definiscono sono <u>chiuse</u>

(ad es: $SO(n,\mathbb{R}) = p^{-1}(I, 1)$)

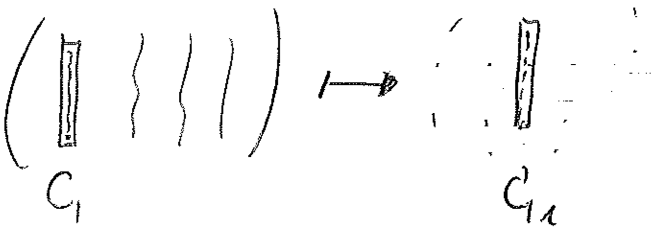
$$p : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto (A^t A, \det A)$$

continua

$\Rightarrow SO(n)$ è compatto

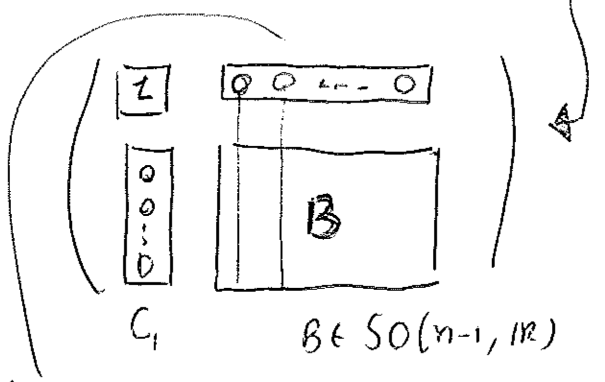
Connessione di $SO(n, \mathbb{R})$

$$p: SO(n, \mathbb{R}) \longrightarrow S^{n-1}$$



è continua

La fibra di e_1 è $SO(n-1, \mathbb{R})$



⚠ $C_2 \dots C_3$ hanno norma 1 e sono ortogonali a $C_1 = e_1$ pertanto le loro prime componenti sono nulle, dunque B consta di vettori mutuamente ortogonali e di norma 1, sicché $B \in SO(n-1, \mathbb{R})$.

Inoltre le fibre sono omeomorfe tra loro.

La connessione è cons. della prop. precedente e dal fatto che $SO(1, \mathbb{R}) = \{1\}$ □

☆ G connesso compatto $\Rightarrow$ G/H è connesso compatto:

($\pi : G \longrightarrow G/H$ è continua).

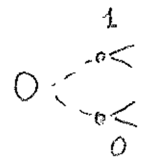
Sia $P = 2^{*\omega}$ dominio di Kahn (senza 0 e 1)

☆ P è sconnesso!

$$P = (\uparrow \boxed{0}) \cup (\uparrow \boxed{1})$$

aperti non vuoti e disgiunti

Se aggiungo 0 diviene connesso



Sia $\tilde{P} = P \cup \{0\} = A_1 \cup A_2$ aperti disgiunti

$0 \in A_1$, per fissare le idee

ma A_1 è sup. chiuso $\Rightarrow$ $A_1 \supseteq \uparrow 0 = \tilde{P}$

$\Rightarrow$ $A_2 = \emptyset$ $\square$