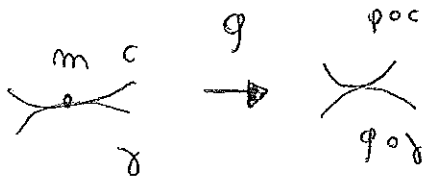
☆ Spazio tangente : tre approcci (in aggiunta a quello descritto nelle note)

① vettore tangente in m : classe di eq. di $c : I \to M$

$c(0) = m$

$c \sim \gamma \iff$ in una carta $(U, \varphi)$ attorno ad m

$$\left[ (\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ c)'(0) \right] \quad (☆)$$




☆ tale nozione non dip da $(U, \varphi)$

(☆) rimane vera ...

Dunque : un vett. tangente è $[c]$ (curva) ; i.e. ess. una velocità

② Siano

$(U, \varphi, u) \sim (V, \psi, v)$ (carta; $u \in \mathbb{R}^n$) se: $(\psi \circ \phi^{-1})'_{\phi(m)}\, u = v$

vettore tangente in M $= [(U, \varphi, u)]$, $u \in \mathbb{R}^n$

coll. con ② : $u = (\phi \circ c)'(0)$

☆ Isom. naturale : $\Theta_{U,\varphi,m} : u \to [(U, \phi, u)]$

③ punt. algebrico

Elementi di Topologia
Prof. M. Spera a.a. 2008/09
Lezione IX-bis

Complementi

$C^\infty_m(M)$ algebra dei germi in $m$ delle funzioni lisce

classi di equivalenza di : $(f : U \to \mathbb{R}) \sim (g : V \to \mathbb{R})$

$U \ni m$ $\quad$ $V$ $\qquad$ se $\exists$ $W \subset U$, $W \subset V$ t.c. $f|_W = g|_W$.

[ ex: nel caso analitico $C^\omega_m \cong$ serie di potenze $\simeq \{a_n\}$ coefficienti ]

vettore tangente in $m$ : è una derivazione di $C^\infty_m(M)$

$f, g \in C^\infty_m(M)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (rappresentanti)

linearità

1) $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \delta f + \beta \delta g$

2) $(\delta fg)(m) = \delta(f)(m)\, g(m) + f(m)(\delta g)(m)$

Leibniz

[ si arriverà a:
Campo vettoriale ($\equiv$ sezione del fibrato tangente)

$\updownarrow$ Derivazione di $C^\infty(M)$ ("tout court") ]

Il collegamento con gli approcci precedenti discende 1) dal seguente

Teorema : ogni derivazione di $C^\infty_0(M)$ può scriversi :

germi

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(x^j) \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{x=0}$$

Infatti, si assumi che

$$\delta(f) = \delta(f - f(0))$$

$$\left( \delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1)\,1 + 1\,\delta(1) \right. \Rightarrow \delta(1) = 0$$

e che, localmente,

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} x^j h_j(x)$$

[ dim: $f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt =$ idea fond. $v \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial v}$

$$= \sum_{j=1}^{n} x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\,dt}_{\equiv h_j(x)} \quad ]$$

Per globalizzare:

)

Si introduca l'applicazione

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto L_X f(m) = \sum X^i(m)\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

Essa è <u>iniettiva</u>: se $X|_m \neq 0$, $\exists$ f loc. tale che $L_X f \neq 0$; ☆ con una <u>partizione</u> <u>dell'unità</u> il tutto si globalizza.

⚠ attenzione qui!

È anche <u>suriettiva</u>: ogni derivazione $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ induce una der. sui germi, $\delta : f \to \delta(f)(a)$ e dunque un <u>vettore</u> <u>tangente</u>: $\underbrace{L_{X(a)}} = \delta_a$

Ma $a \mapsto X_a$ è liscia

$$\delta|_U = \sum_{i=1}^{n} \underset{\overset{\parallel}{x^i(a)}}{\delta(x^i)} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

4 Flussi di campi vettoriali

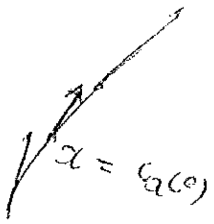
$$\dot c(t) = X(c(t)) \quad \text{su } M$$
$$(X\circ c)(t)$$

$$c : I \subset \mathbb{R} \to M$$

$\forall x \in M \ \exists I_x \ni 0$ ed una unica $c_x : I_x \to M$

tale che $\dot c_x(t) = X(c_x(t))$ $\quad c_x(0) = x$

[ esistenza e unicità per eq. diff. 1° ordine ]




$\forall m \in M \ \exists V \ni m$, $I \ni 0$ tale che $\forall x \in V$, $c_x$ è def. in $I$ e $(t,x) \mapsto c_x(t)$ è liscia


$$\underbrace{(t,x)\mapsto c_x(t)}_{\text{flusso locale di } X}$$

$$t \equiv \theta_t(x)$$

Si ha (se i due membri sono definiti)

$$\boxed{\theta_t \circ \theta_{t'} = \theta_{t+t'}}$$

Dim $c_x(t_1+t_2)$ : sol con $c_x(0) = x$ in $t_1+t_2$

ma anche valore in $t_1$ della sol $= c_x(t_2)$

MO

gruppo locale a un par. di diffeomorfismi

☆ Se $X$ ha supporto compatto (ad es., se $M$ è compatto) $\underline{\theta_t \text{ è def } \forall\, t \in \mathbb{R}}$

(gruppo ad un par. di diffeo)

Dim: $\Big( \; \Big)_k$ ric. da un numero finito di aperti

Le ipotesi implicano che si può trovare

t.c. $t \to c_m(t)$ sia def.

$\varepsilon_0 \overset{\text{def}}{=}$ il più piccolo $\varepsilon(m,t)$    $|t| < \varepsilon$.

$$\text{Se } \begin{matrix} |t| \\ |s| \end{matrix} < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{è} \quad \boxed{\vartheta_s \circ \vartheta_t = \vartheta_{s+t}} \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Se } |t| > \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad t = k\,\frac{\varepsilon_0}{2} + r \qquad |r| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

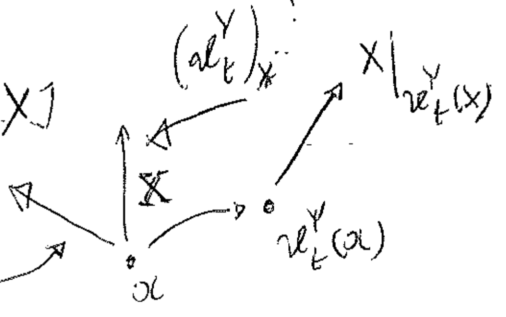
$$\text{e si pone} \quad \theta_t = \left(\theta_{\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^k \circ \theta_r$$

Si trova ancora $(*)$ $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$ □

☆ Se $\varphi : M \to N$ diffeo (attenzione ai controesempi)

$\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ e se $X \leftrightarrow \theta_t$

è $\varphi_* X \leftrightarrow \varphi \circ \theta_t \circ \varphi^{-1}$




Teorema
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\theta^Y_{-t}\right)_* X}_{\to\, L_Y X} \Big|_{t=0} = [Y, X]$$

derivata di Lie

$$L_Y X \big|_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[ (\vartheta^Y_t)^{-1}_* X \circ \vartheta^Y_t(x) - X(x) \right] = [Y, X]$$

$$= \cdots$$

$$L_X f(x) = X(f)(x)$$

$\nexists\ \varphi_*$ , se $\varphi : M \to N$ diffeo  Si ricordi

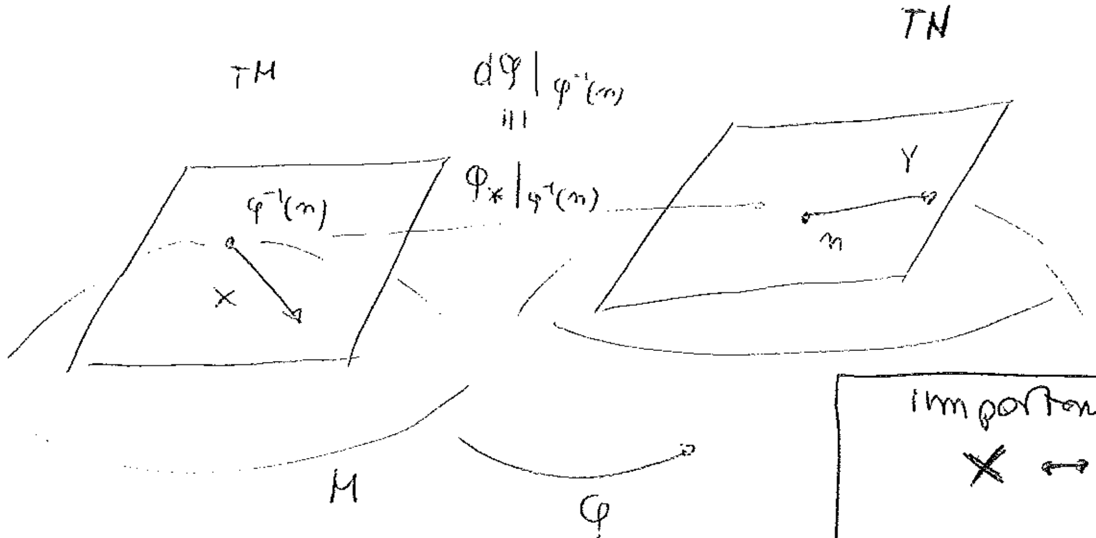
$\bar{X}$ campo vett.

naturale !!

$\varphi_* \bar{X} = Y$  $\downarrow$ coinvolge è l'invertibilità di $\varphi$ !

in generale è def. solamente $Y_{\varphi(m)} = \varphi_*|_m \bar{X}_m$

$$n \mapsto Y(n) = \varphi_*|_{\varphi^{-1}(n)} \bar{X}(\varphi^{-1}(n))$$




importante

$X \leftrightarrow \theta_t$

$\phi \circ \theta_t \circ \phi^{-1} \leftrightarrow \phi_* \bar{X}$

In termini di derivazioni

$f \in C^\infty(N)$

$$(L_Y f)(n) = L_X(f \circ \phi)(\varphi^{-1}(n)) = L_X(f\circ\phi)\circ\phi^{-1}$$

---

Nota: $L_X$ si generalizza ai campi tensoriali (sezioni lisce dei corr. fibrati tensoriali $\overset{k}{\otimes} TM \otimes \overset{h}{\otimes} T^*M$) non richiede l'intr. di metriche p. ex e non va confusa con $\nabla_X$ (o con una connessione)

(Attenzione: per un fibrato vettoriale qualsiasi non ha senso: per derivare c'è bisogno di una connessione)

$\star \quad L_X Y = [X, Y]$ (cf. Dombrowski, Novikov Fomenko)

Approccio "classico"

$\xi = (\xi^i)$ campo vettoriale $\to F_t$ gruppo ad un par. di diffeo

$\eta = (\eta^i)$ =

$$\begin{cases} F_t: & x^i(t, x_0^1 \dots x_0^n) = x_0^i + t\,\xi^i(x_0^1 \dots x_0^n) + o(t) \\ & x = x_0 + t\,\xi + o(t) \\ F_t^{-1}: & x_0 = x - t\,\xi + o(t) \end{cases}$$

$x_0 \xrightarrow{F_t} x$, $x \xrightarrow{F_t^{-1}} x_0$

$\left( \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} \right)$ matrice jacobiana

$$\star \begin{cases} (F_t)_* = I + t\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x_0} + o(t) \\ (F_t)^{-1}_* = I - t\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + o(t) \end{cases} \qquad \delta^i_j - t\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$$

$$(F_t^{-1})_*\,\eta = \boxed{\eta^i(x_0) = \eta^j(x)\,\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j}}$$

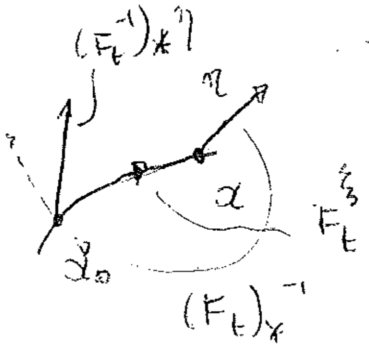
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \qquad \eta\,\frac{\partial x_0}{\partial x} = \eta^j\,\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\eta^j \frac{\partial x_0^i}{\partial x^j}\right)^{\dot{}} = \dot{\eta}^j\,\frac{\partial x_0^i}{\partial x_j} + \eta^j\left(\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j}\right)^{\dot{}} = \ (\text{in } t=0) \\ &\frac{\partial \eta^i}{\partial x_0^j}\,\xi^j - \eta^j\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} \ \star \\ &\left(\text{Si ricordi: } n \mapsto Y(n)\right) \end{aligned}}$$

(ove $\eta^j = \eta^j(t)$)

$$L_\xi \eta \qquad \left[ \frac{d (F_t^{-1})_* \eta}{dt} \Big|_{t=0} \right]^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_k^0}\,\xi^k - \eta^j\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$$

$$\| $$




$$= \boxed{\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\,\xi^j - \eta^j\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}} = [\xi, \eta]$$

$\star$ derivata del pescatore

IX-2-7

# ★ Partizioni dell'unità

[ cf. Kunii - Fomenko / versione semplificata ]

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

varietà

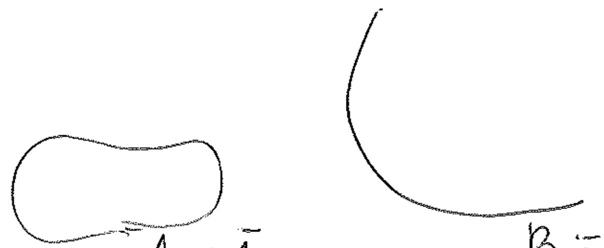
chiusura

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{ x : f(x) \neq 0 \}}$$

"supporto di $f$"

È il più piccolo chiuso al di fuori del quale $f$ si annulla

$\mathbb{R}^n$



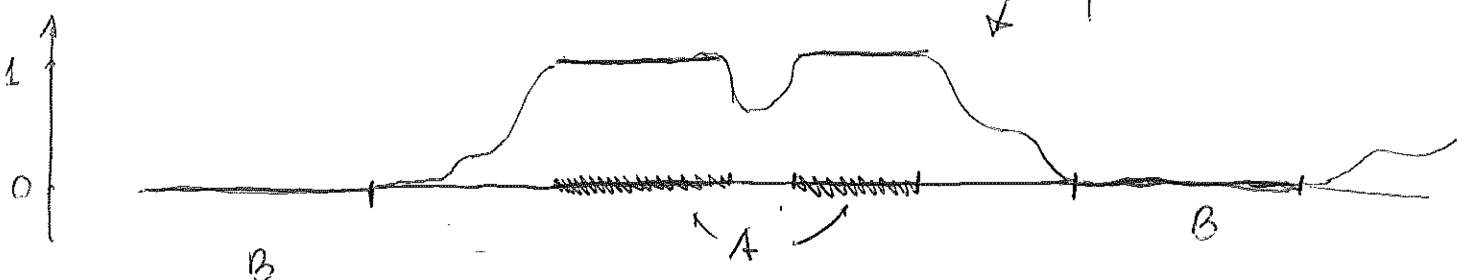
$A = \bar{A}$

limitato

$B = \bar{B}$

$\exists\ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\varphi|_A \equiv 1$, $\varphi|_B \equiv 0$

e $0 \leq \varphi \leq 1$ altrove




$\varphi|_B \equiv 0$ equivale a dire $\operatorname{supp} \varphi \cap B = \emptyset$

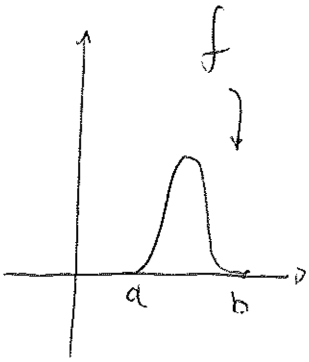
poiché $B$ è chiuso

"Mollificatore"

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a}} \cdot e^{-\frac{1}{b-x}} & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\tilde{x} = \frac{a+b}{2} \qquad f(\tilde{x}) = e^{-\frac{2}{b-a}\cdot 2} = e^{-\frac{4}{b-a}}$$

$$\tilde{x} - a = \frac{b-a}{2} = b - \tilde{x} \qquad f \text{ è } C^{\infty}$$

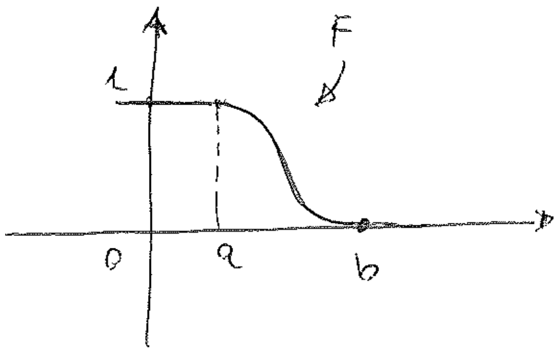



Poniamo

$$F(x) := \frac{\int_x^b f(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\,dt}$$

Si ha $F(x) = 0$ per $x \geq b$

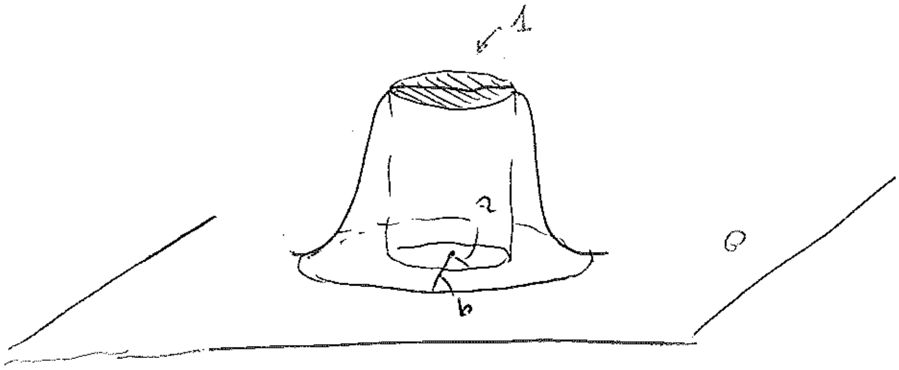
$F(x) = 1$ per $x \leq a$, e $F$ è monotona decrescente



Sia ora $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita così:

$\psi(x_1 \dots x_n) := F(r^2)$ $\qquad r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

(funzione radiale)




A è compatto (chiuso & limitato)

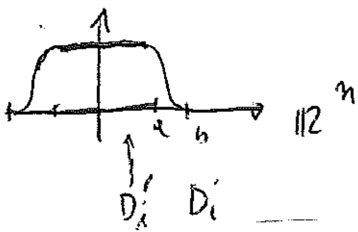
B è chiuso e $A \cap B = \phi$

In base alla compattezza di A, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ m finito
e alla proprietà di Hausdorff palle aperte

dati che $\overline{D}_i \cap B = \phi \quad \forall i$

Si può fare in modo che $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} D'_i$. $\qquad D_i$ e $D'_i$ concentriche e $D'_i \subset D_i$

Sia ora $\psi_i$:

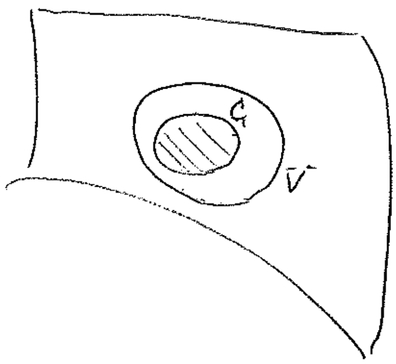



e $\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \psi_i(x))$

$\varphi$ è la funzione cercata

★ <u>Lemma</u>: Sia $\underset{\text{compatto}}{C} \subset M$ e $C \subset \underset{\text{aperto}}{V}$

$\exists\ \varphi : \quad 0 \le \varphi \le 1 \quad , \varphi|_C \equiv 1 \quad , \quad \varphi|_{M \setminus V} \equiv 0$




[ Urysohn ]

Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una carta locale

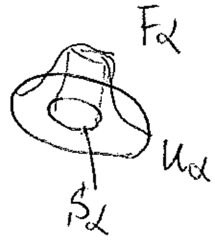
$\underset{\text{compatto}}{S_\alpha} \subset U_\alpha$

$\varphi_\alpha(S_\alpha)$ è compatto, e contenuto in $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, aperto.
Applico la proprietà precedente e trovo $f_\alpha$ su $\mathbb{R}^n$,
liscia, con $\operatorname{supp} f_\alpha \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ , $f_\alpha|_{\varphi_\alpha(S_\alpha)} \equiv 1$

$0 \le f_\alpha \le 1$ . "Trascino" la $f_\alpha$ su $M$:
pull-back

$$F_\alpha(p) = \begin{cases} f_\alpha(\varphi_\alpha(p)) & p \in U_\alpha \\ 0 & p \notin U_\alpha \end{cases}$$

$F_\alpha$ è liscia, $F_\alpha(p) = 1$ su $S_\alpha$, $F_\alpha(p) = 0$ fuori da $U_\alpha$



Torniamo a $C_1$,

$$C_1 \subset \bigcup_{\alpha=1}^{m} S_\alpha \subset \bigcup_{\alpha=1}^{m} U_\alpha \subset V$$ per certi $U_\alpha$ e $S_\alpha$ come prima

Troviamo $F_\alpha$ come sopra.

Poniamo $F = 1 - \prod_{\alpha=1}^{m} (1 - F_\alpha)$ : è la f. richiesta.

$M$ varietà liscia; sia $M = \bigcup_{i=1}^{N} U_\alpha$ ed $\exists\ \varphi_\alpha$ : liscia

(1) $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha \quad \forall \alpha$

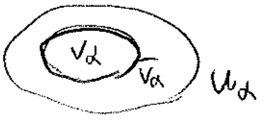
(2) $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall x \in M, \forall \alpha$

(3) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in M$

$\{\varphi_\alpha\}$: partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$ [caso particolare di una definizione più generale]

**Teorema** [caso particolare] Se $M$ è compatta (liscia) e $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento finito di $M$, esiste una partizione dell'unità $\{\varphi_\alpha\}$ a questo subordinata.

Dim: Troviamo $V_\alpha$, aperti, con $V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ e $\{V_\alpha\}$ ricoprimento. Applichiamo il lemma a $\overline{V_\alpha}, U_\alpha$ e troviamo $\psi_\alpha$; sia $\psi = \sum \psi_\alpha$




Posto infine $\varphi_\alpha = \dfrac{\psi_\alpha}{\psi}$ si ha l'asserto

IX-2-12

## Uso delle partizioni dell'unità

$\tau_\lambda : X \to [0,1]$ continua

$X$ sp. topologico $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ partizione dell'unità:

1) loc. finita : $\forall x \ \exists \ U \ni x$ t. che $\tau_\lambda \equiv 0$ per quasi tutti i $\lambda$

2) $\sum_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda(x) = 1$

essa è subordinata ad un dato ricoprimento $\mathcal{U}$ se

supp $\tau_\lambda = \{ x \in X \ / \ \tau_\lambda(x) = 0 \} \subset \mathcal{U}_{\alpha(\lambda)}$

Permettono di costruire oggetti globali da dati locali in caso di "proprietà convesse" Es:

$\pi : E \to X$ fibrato vettoriale su $X$ con partiz. dell'unità sub. ad ogni ricoprimento.

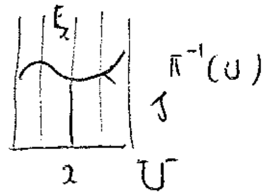
Sia $\Omega \subset E$ convesso fibra per fibra

( $\Omega_x := \Omega \cap E_x$ è convesso )

Se $\exists$ sezioni locali in $\Omega$, ovvero $\forall x \in X \ \exists \ U \ni x$

tale che $\exists \ s_U : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$

$x \longmapsto s(x) \in E_x$




con immagine in $\Omega$, allora $\exists$

$s$ sezione globale con immagine in $\Omega$.

★ Esempi: 1) Estensione dimensione locale di un fibrato vettoriale
(Tietze per fibrati vettoriali)

2) $X$ varietà diff. $\quad E = TX$

Proprietà: campi vett. tangenti a una o più sottovarietà

$$X = \sum \tau_\lambda X_\lambda$$

[è convessa]

3) $\exists$ di metriche riemanniane (euclidee, hermitiane): $E = TX$

$(E \otimes E)^*$ : forme bilineari sulle fibre di E

proprietà: simmetria + positività

è una proprietà convessa

$$\bigstar \quad g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda g_\lambda$$

| ★★★ |
|---|
| in molte questioni di topologia differenziale conviene dotare una varietà differenziabile di una struttura riemanniana |

★ Integrazione sulle varietà (riemanniane): $\displaystyle\int_M f\,\omega^n = \sum \int_{U_\lambda} f\,\tau_\lambda \omega^n$

$U_\lambda \cap \mathbb{R}^n$