Varietà topologiche

Uno spazio topologico M è detto varietà topologica (di dimensione n) se
(topological (n)-manifold)

> Si è visto che, ad es. NOTA
> $3 \not\Rightarrow 1$
> Storicamente, la spinta principale è venuta dal Theorema Egregium di Gauss $\longrightarrow$ Dissertazione di Riemann (1854)

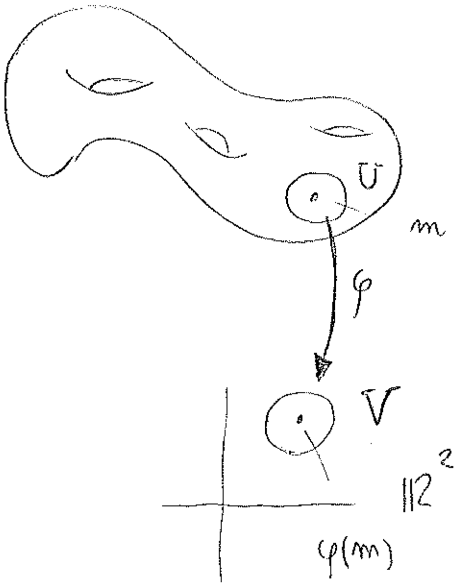
1. M è di Hausdorff
2. M è a base numerabile
3. M è localmente euclideo, i.e.

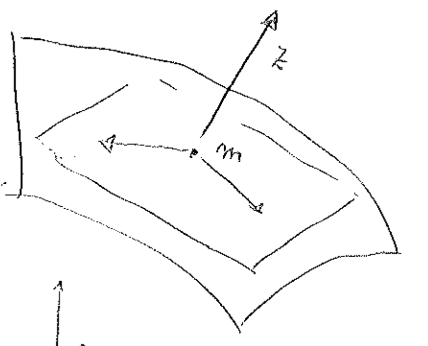
$\forall\, m \in M$, $\exists\, U \ni m$ (intorno (aperto)), V aperto $\subset \mathbb{R}^n$

> n fisso, i.e. indipendente da m

e $\varphi : U \to V$ omeomorfismo (carta locale); a parole:

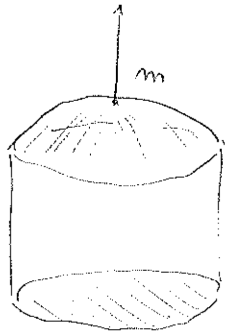
ogni punto di M ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$; senza perdere in generalità, si può considerare un disco (palla) n-dimensionale.





> Gli esempi discussi nella lezione precedente sono tutte varietà topologiche

$$(x, y, f(x,y)) \stackrel{\varphi}{\longmapsto} (x,y)$$



top. relativa per le sup. in $\mathbb{R}^3$

★ <u>Azione</u> propriamente <u>discontinua</u>

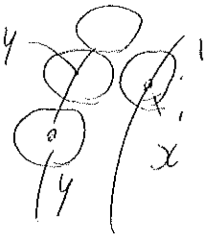
Γ gruppo <u>discreto</u> [i.e. (numerabile), top. discreta]

agisca su X (s.top., T_2) &

(i) $\forall x \in X$, $\exists\ U \ni x$ t.c. $\{h \in \Gamma \,/\, hU \cap U \neq \emptyset\}$ è finito

(ii) & x, y non sono sulla stessa orbita ($hy \neq x\ \forall h$)

$\exists\ U \ni x$, $V \ni y$ t. che $U \cap hV = \emptyset$

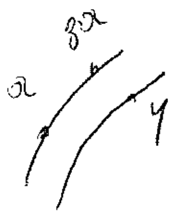


(ii) $\Rightarrow$ X/Γ Hausdorff

[ν : è aperta , e Δ_ν è chiusa]
def. in modo ovvio

<u>Osservazione</u> $\Delta_\nu = \{(x, gx) \,/\, x \in X, g \in G\}$

è chiusa $\Leftrightarrow$ $X \setminus \Delta_\nu = \{(x, y) \,/\, y \neq gx\ \forall g\}$



$= \{(x, g \cdot y) \,/\, y \neq g'x\ \forall g' \in G\}$

è aperto $\Rightarrow$ la condizione (ii)

$f : X \longrightarrow Z$ INCISO

identificazione

[A: aperti di Z t.c. $f^{-1}(A)$ aperto di X]

$A \subset X$ f-saturo se

$A = f^{-1}(B)$, $B \subset Z$

Se X è di Hausdorff,
Z lo è $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in X$, con
$f(x) \neq f(y)$, esistono intorni saturi disgiunti
$U \ni x$, $V \ni y$

v. pag. successiva

importante

Proposizione Sia $\pi : X \to X/G$, Hausdorff

Sia $A \subset X$, A aperto, con

1) $\pi : A \to X/G$ suriettiva

[A interseca tutte le orbite di G]

2) $\{ g \in G \,/\, g(A) \cap A \neq \emptyset \}$ è finito

Allora X/G è Hausdorff.

Es: $X = \mathbb{R}$
azioni intere: $\{ x \mapsto x + k \} = T_k$
$A = (-1, 1)$

$\{ g \in G \,/\, g(A) \cap A \neq \emptyset \} = \{ T_0, T_1, T_{-1} \}$
$X/G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$
è di Hausdorff

in generale
$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$
toro n-dimensionale

Dim. Siano $g_1 \ldots g_n$ gli el. di G per i quali

$$A \cap g_i(A) \neq \emptyset$$

Prendiamo $p, q \in X/G$, $p \neq q$

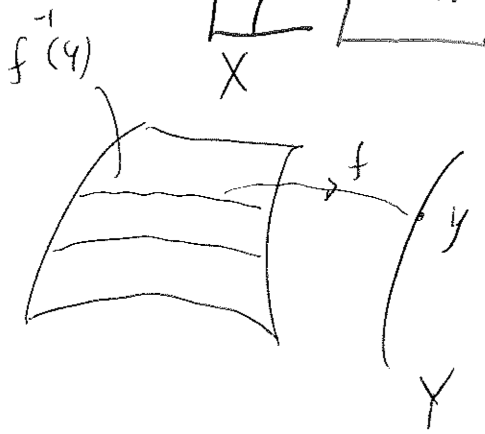
e x, y : $\pi(x) = p$, $\pi(y) = q$ $\quad x, y \in A$

 segue a pag IV-5

4 Identificazioni : proprietà universale

$\boxed{\text{segue}}$ $\boxed{\text{inciso}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "\text{ident}"'] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "h\ ?"] \\ Z & \end{tikzcd}$$



$\exists\, h$ continua $g = h \circ f \iff g$ è "costante sulle fibre di f"

fibra di f: $f^{-1}(y)$, $y \in Y$

g costante sulle fibre: $g(x') = g(x'')$ se x' e $x'' \in f^{-1}(y)$ per qualche y: $f(x') = f(x'') \,(= y)$

questa è una cond. necessaria.

Ma è pure sufficiente:

definiamo $h: Y \to Z$ così:

$$h(y) = g(x), \text{ se } x \in f^{-1}(y)$$

continuità: $U \subset Z$ aperto.

$f^{-1} \circ h^{-1}(U) = g^{-1}(U)$ è aperto

ma f è un'identificazione $\Rightarrow$ $h^{-1}(U)$ è aperto,

sicché h è continua. $\square$

X è Hausdorff $\Rightarrow$ $\exists$ $\forall i = 1 \dots n$

U_i, V_i $\quad U_i \cap V_i = \emptyset$

$x \in U_i$ $\quad g_i(y) \in V_i$

$y \in g_i^{-1}(V_i)$

Definiamo

$U = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i$; $V = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i)$

$x \in U$ $\quad y \in V$

punto cruciale

Dimostriamo che $U \cap g(V) = \emptyset \quad \forall g \in G$

Se $g(A) \cap A = \emptyset$, ok. $(U \subset A, V \subset A)$

Sia $g = g_i$: $\quad U \subset U_i$
$V \subset g^{-1}(V_i)$

$U \cap g(V) \subset U_i \cap V_i = \emptyset$

$\boxed{\text{Dunque } U \cap g(V) = \emptyset \quad \forall g \in G}$

Verifichiamo che x e y $\in$ aperti saturi disgiunti. Basta mostrare che

ciò afferma T_2

$$\left(\bigcup_{g \in G} g(U) \right) \cap \left(\bigcup_{h \in G} h(V) \right)$$

$$= \bigcup_{g,h \in G} (g(U) \cap h(V)) = \emptyset$$

Se $g(U) \cap h(V) \neq \emptyset$ per qualche g e $h \in G$

Sarebbe $U \cap \underbrace{g^{-1} h}_{\tilde{g}}(V) \neq \emptyset$ il che è assurdo.

☆ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \big/ \sim$ "rette complesse" per l'origine in $\mathbb{C}^{n+1}$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$

$x \sim y \iff x = \rho y, \quad \mathbb{C} \ni \rho \neq 0$

$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

spazio proiettivo complesso

($\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$)

(proiezione stereografica

[in generale sia $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert complesso, separabile]

$\mathbb{P}(\mathcal{H}) := \mathcal{H} \setminus \{\underline{0}\} \big/ \sim$

(spazio proiettivo associato)

$\boxed{\text{è lo spazio degli stati (puri) della meccanica quantistica}}$

$\simeq S_{\mathcal{H}} \big/ \sim$ sfera unitaria

$\sim : \ \psi_1 \sim \psi_2, \ \|\psi_i\| = 1$

$\iff \psi_2 = e^{i\alpha} \psi_2$

fase

Descrizione come spazio quoziente [spazio omogeneo, addirittura simmetrico]

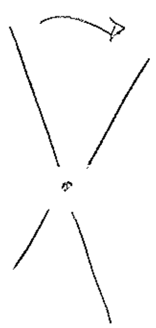
$\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \dfrac{U(n+1)}{U(n) \times U(1)}$

dotato del prod. scalare hermitiano standard

g. isotropia di una retta complessa

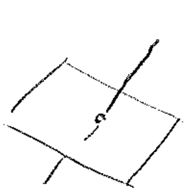
orbita: $G \cdot x$, $G = U(n+1)$

$U(n+1)$



$U(n+1)$ agisce transitivamente.

sottogruppo che lascia fissa una retta: $U(n) \simeq$ trasformazioni unitarie del complemento ortogonale



$U(1)$: trasf. di fase.

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \equiv \mathbb{P}^1 = \frac{U(2)}{U(1)\times U(1)} \approx \frac{SU(2)}{U(1) \approx S^1}$$

$$\mathbb{P}^1 \simeq S^2$$

$$\approx \frac{S^3}{S^1}$$

$\boxed{S^3 \xrightarrow{S^1} S^2}$ ... fibrazione di Hopf

Altra descrizione (più concreta)

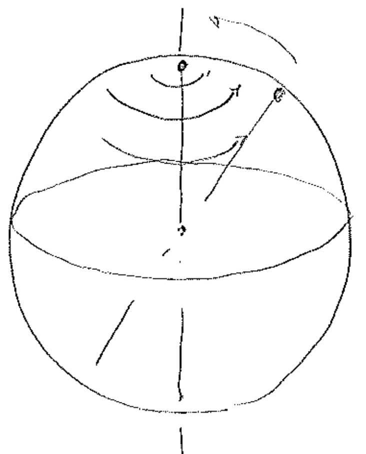
$$S^2 = \frac{SO(3)}{SO(2)}$$

$SO(3)$ ← gruppo ortogonale speciale (det = +1)

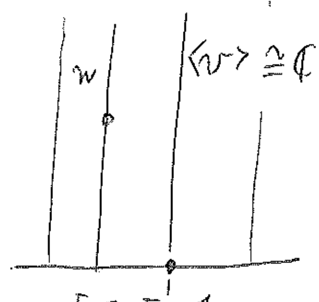
$SO(2) \simeq U(1)$ ← rotazioni del piano

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \longleftrightarrow e^{i\varphi}$$

$SO(2)$ su $\mathbb{R}^2$ · su $\mathbb{C}$



$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$



★ inciso

fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
(fibrato lineare complesso, ovvero in rette complesse)

[non è un fibrato banale (ovvero, non è globalmente isomorfo a $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$)
ciò ha addirittura conseguenze fisiche (fase di Aharonov - Anandan (... Berry)]

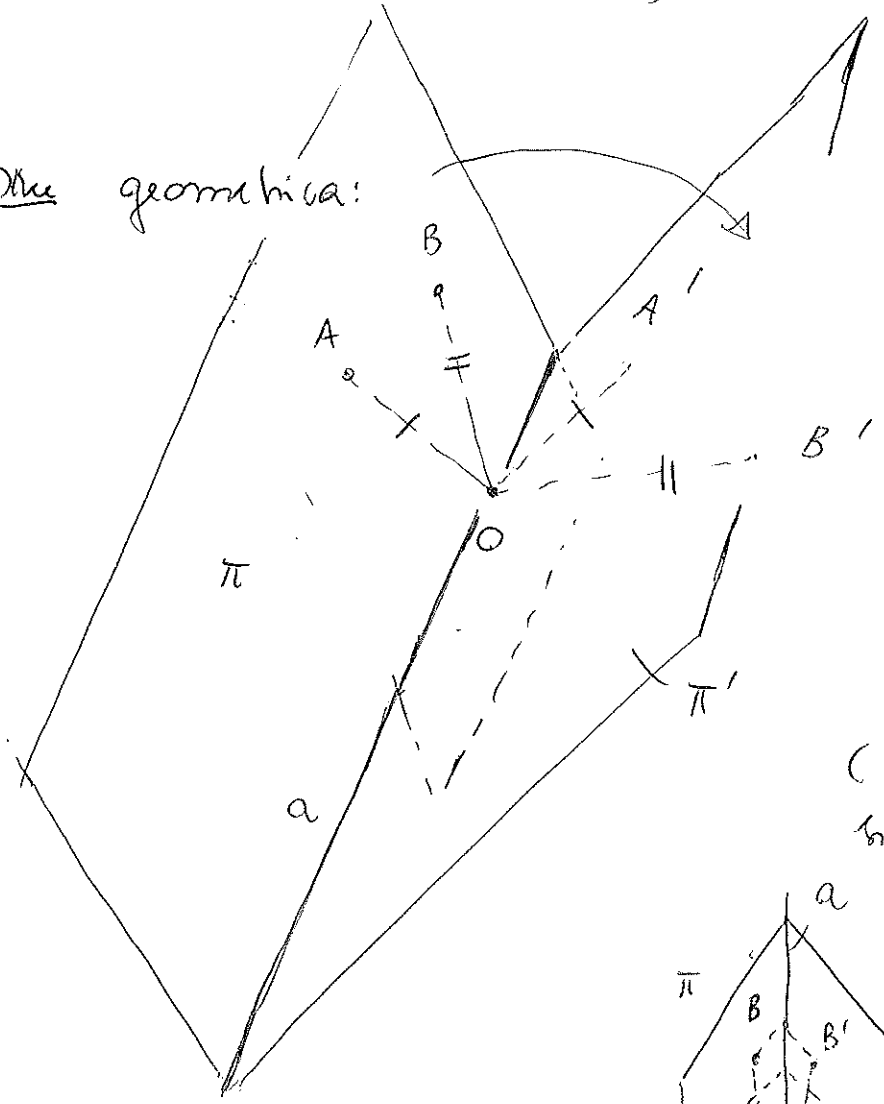
★ Teorema di Eulero

Ogni movimento rigido (isometria), che conserva l'orientamento, e lascia fisso un punto è una rotazione attorno ad un asse (ovviamente passante per il punto dato)

[Versione algebrica : una matrice ortogonale speciale 3×3 ($A \in SO(3)$) ha un autovalore $= 1$]

v. lezioni di "Elementi di geometria"

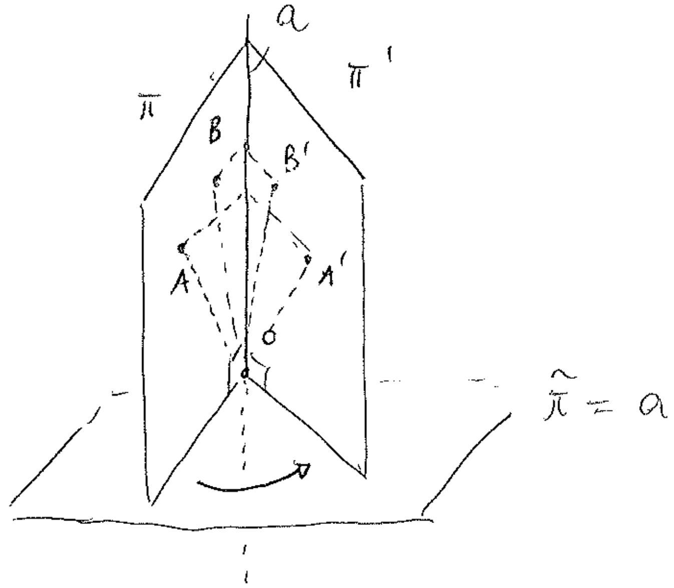
Dim. geometrica:



il piano π: AOB va in π': $A'OB'$

l'asse è $a = \pi \cap \pi'$ che rimane necessariamente fisso.

Poichè le distanze sono conservate ($OA = OA'$ ecc.) si ha l'asserto

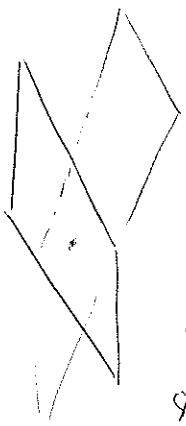


$\star$ $G(n,k)$ Grassmanniana ###

$k \le n$ (reale o complessa)

{sottospazi k-dimensionali di $\mathbb{C}^n$ / $\mathbb{R}^n$ (o V.. n dim)}

$$G(n,k,\mathbb{C}) \approx \frac{U(n)}{U(n-k)\times U(k)} = \frac{Gl(n,\mathbb{C})}{Gl(n-k,\mathbb{C})\times Gl(k,\mathbb{C})}$$



due sott. qualsiasi (della stessa dimensione) possono essere sempre trasformati l'uno nell'altro (azione transitiva di G)

g. isotropia (s. gruppo che lascia fisso un s. spazio): stabilizzatore; consiste nel prodotto diretto delle trasformazioni del complemento ortogonale ($U(n-k)$) e dei cambiamenti di base $Gl(n-k)$ (limitati: $U(k)$; quindi $Gl(n-k)$))

analogamente

R spazio alto.

$$G(n,k,\mathbb{R}) \approx \frac{Gl(n,\mathbb{R})}{Gl(n-k,\mathbb{R})\times Gl(k,\mathbb{R})}$$

$$\approx \frac{O(n)}{O(n-k)\times O(k)}$$

sp. proiettivo: caso particolare: $G(n,1)$

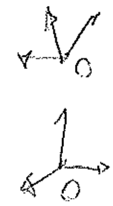
☆ Varietà di Stiefel (dei riferimenti)

(frames)

$$V_{n,k} = \frac{GL(n, \mathbb{C})}{GL(n-k, \mathbb{C})} \qquad (\mathbb{R})$$

pto: V_0

rif. di rif.



[origine fissa ...]

riferimenti unitari $\rightarrow \dfrac{U(n)}{U(n-k)}$

riferimenti ortonormali $\dfrac{O(n)}{O(n-k)}$

Digressione

☆ data una f. quadratica reale q, $A \in Sym(n, \mathbb{R})$ matrici simm.

$q(X) = X^t A X$, $X \in \mathbb{R}^n$

cambiamento base: $X = MY$, $M \in GL(n, \mathbb{R})$

si ha $q(X) = (MY)^t A M Y$

$= Y^t \underbrace{(M^t A M)}_{B} Y$

$A \approx B$ se

$B = M^T A M$

$\approx$: congruenza

⚠ da non confondere con la similitudine

☆ Teorema di Sylvester

la segnatura di A è un invariante completo per congruenza

segnatura (p, q)

notiamo: è $p = \#\{\lambda_i > 0\}$

$q = \#\{\lambda_i < 0\}$

autovalori

☆ forma canonica

[concretamente si può usare l'algoritmo di gauss simmetrico]

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

p, q

$r = p + q =$ rango

V. Sernesi vol I

oppure elegeo VIII. pdf in rete (M.S.)

$$\boxed{\text{Sym}^+ \equiv \text{matrici simmetriche definite positive}}$$

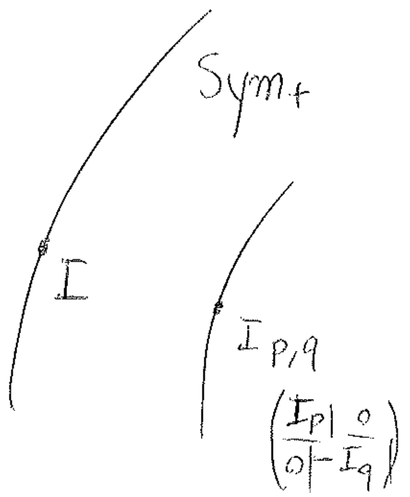
★ Geometricamente: $\text{Sym}^+ = GL(n,\mathbb{R}) \circ I_n$

↑ agisce per congruenza

$$GL(n,\mathbb{R}) \ni A \xrightarrow{M} M^T A M \in GL(n,\mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Orbita di } I}$

$GL(n,\mathbb{R})$



[da Sylvester segue infatti che ogni matrice di Sym_+ è della forma $A = M^T M = M^T \cdot I \cdot M$, $M \in GL(n,\mathbb{R})$]

in gen: # finito di orbite, etichettate da (p,q)

★★ Isotropia: $O(n)$ (mat. ortogonali)

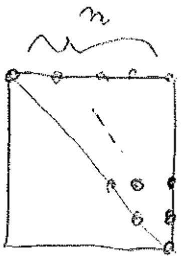
infatti $\forall\, O \in O(n)$ $O^T O = I$

(e viceversa, è esattamente la def. di matrice ortogonale)

$$\boxed{\text{Sym}^+_n = GL(n,\mathbb{R}) \big/ O(n,\mathbb{R})}$$

descrizione come spazio omogeneo G/H

$O(n,\mathbb{R})$ è chiuso in $GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow$



$1+2+\dots n = \frac{(n+1)n}{2}$

Sym^+_n è Hausdorff

[è chiaro a priori poiché $\text{Sym}^+_n \underset{loc}{\cong} \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$]

* Relazioni d'ordine

INCISO - RICHIAMO

$\preceq$ quasi ordine : transitiva, riflessiva

q.o. banale : $\forall x, y \quad x \preceq y$

discreto : $\preceq \; \equiv \; =$

$\preceq$ ordine ... + antisimmetria
o ordine parziale

$Y \subseteq X$ inferiormente chiuso
(insieme inferiore)

se dato $x \in X$ t.c. $x \preceq y \quad \forall y \in Y$,
allora $x \in Y$

def. analoga di insieme superiormente chiuso
(insieme superiore)

Sia (X, τ) uno sp. topologico messo
*(quasi)-ordine di specializzazione $\preceq$

$x \preceq y$ se ogni intorno di x lo è anche di y

È chiaro che $\preceq$ è banale $\Leftrightarrow$ $\tau \equiv$ top. banale

$\overline{Y} = \downarrow Y = \{x : x \leq y$ per qualche $y \in Y\}$

chiusura

[i punti x tali che ogni loro intorno contiene pti di y]

equivalentemente:

$A \subset X$ sp. top.

$\bar{A} = \bigcap_{\substack{C \supset A \\ \text{chiuso}}} C$

$\equiv$ il più piccolo chiuso contenente A.

$\bar{A} = A \cup \{$pti acc.$\}$

[non è un'unione disgiunta in generale]

top: T_0 : se $\leq$ è un ordine

Kolmogorov

$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \Rightarrow x = y$

$$\underset{\underset{\downarrow Y}{\|}}{x \in \overline{Y}} \ \wedge \ \underset{\underset{\downarrow X}{\|}}{y \in \overline{X}} \Rightarrow x = y$$

ovvero: pti distinti hanno chiusure distinte

ovvero $\|$ $\exists$ un intorno di uno dei due pti non contenente l'altro.

top. T_1 : $\leq$ discreta i.e $\leq \equiv =$

$x \leq y \iff x = y$

$\iff \{x\}$ è chiuso $\forall x$ $\quad \{x\} = \downarrow\{x\} \equiv \downarrow x$

★ Topologia di Alexandrov

Sia P un "poset" [insieme parzialmente ordinato]

Richiamo
[P insieme (non vuoto) munito di una relazione d'ordine parziale $\leq$ (i.e. un sottoinsieme di $P \times P$) che soddisfi le proprietà seguenti

- riflessività $a \leq a \quad \forall a \in P$
- transitività $a \leq b \ \wedge \ b \leq c \quad [a, b, c \in P]$
$$\Rightarrow \quad a \leq c$$
- antisimmetria $a \leq b, \ b \leq a \quad [a, b \in P]$
$$\Rightarrow \quad a = b$$]

★ Esempio: le proposizioni in logica, dove "$\leq$" = "$\Rightarrow$" (implicazione)

[$a \Rightarrow a$; se $a \Rightarrow b$ e $b \Rightarrow c$, allora $b \Rightarrow c$;

se $a \Rightarrow b$ e $b \Rightarrow a$, allora $a \Leftrightarrow b$]

$S \subseteq P$ si dice chiuso superiormente (o superiormente chiuso : upper closed) se, dato $y \geq x$, con $x \in S$, è
ovvio significato
pure $y \in S$

$\uparrow x \equiv$ chiusura superiore di x

$= \{ y \in P \,/\, y \geq x \}$

$\uparrow S \equiv$ chiusura superiore di S

$$= \bigcup_{x \in S} \uparrow x = \{ y \in P \,/\, \exists x \in S,\ y \geq x \}$$

Aperti della topologia di Alexandrov:
insiemi sup. chiusi

verifichiamo gli assiomi:

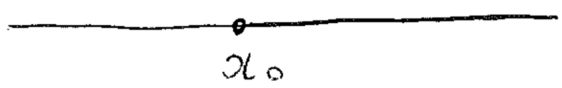
$\emptyset$ e $X \equiv P$ sono sup. chiusi

l'unione e l'intersezione (...arbitrarie)
di insiemi sup. chiusi è sup. chiusa (chiaro)

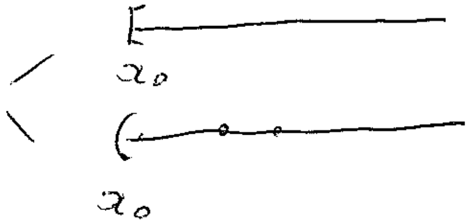
Esempio $X \equiv P = \mathbb{R}$

insiemi sup chiusi: $\emptyset$, $\mathbb{R}$

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, $\uparrow x_0 = \{ x \geq x_0 \}$

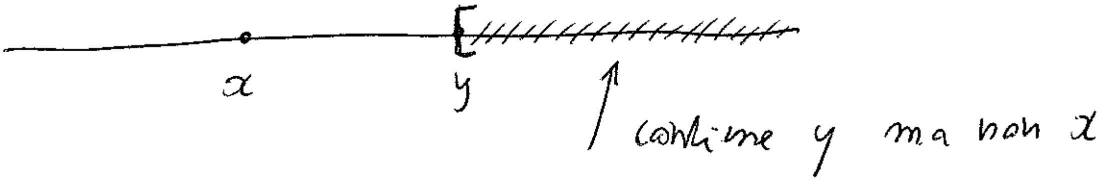


$\Rightarrow$ $\underset{\text{aperto}}{A}$ =



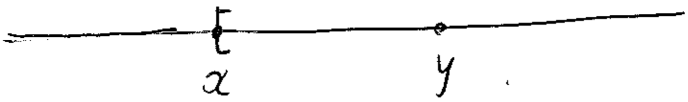
T_0 : pti distinti hanno chiusure distinte
oppure dati due pti distinti, esiste un aperto contenente uno dei due pti ma non l'altro

Per fissare le idee $x \leq y$



√

T_1 dati due pti, <u>ognuno</u> <u>dei</u> <u>due</u> appartiene ad un aperto non contenente l'altro



* T_1 <u>Non</u> <u>è</u> <u>verificata</u> per la top. di Alexandrov