Elementi di topologia
Prof. M. Spera
a.a. 2008/09

Lezione V

✦ Reticolo (lattice)

L poset tale che

Dato $\{x, y\}$, $\exists$ $\inf\{x,y\} = x \wedge y$ — $\boxed{\text{meet}}$ $\cap$ congiunzione "and"

e $x \vee y = \sup\{x,y\}$ — $\boxed{\text{join}}$ disgiunzione "or" $\cup$

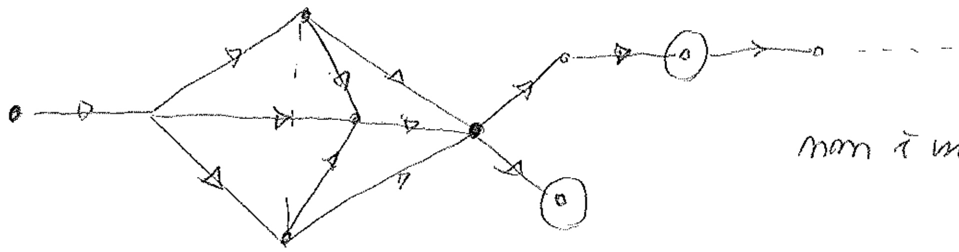
[oppure, ogni insieme finito nonvuoto ammette sup e inf (che non devono necessariamente appartenergli)]

Il reticolo si dice completo se ogni s.i. ammette sup e inf

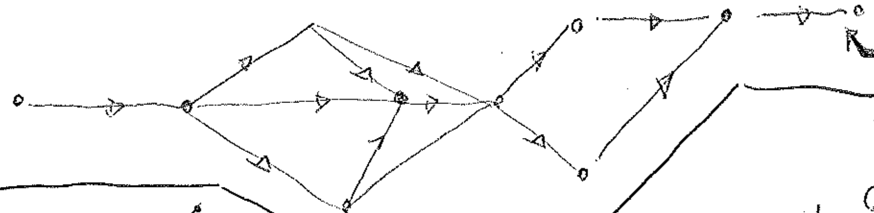
sup = estremo sup — minimo dei maggioranti

inf = estr. inferiore — massimo dei minoranti

$\xrightarrow{\leq}$



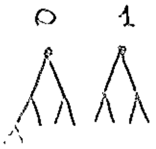
non è un reticolo



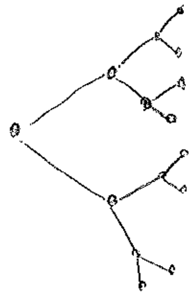
è un reticolo

"Dominio di" Kahn

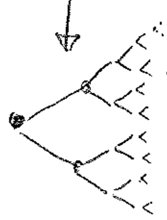
è un reticolo (completo)



non è un reticolo



è un semireticolo inferiore (V. NOMENCLATURA)



el. infinito

Esempio $\quad L = \mathcal{P}(X) \quad X \neq \emptyset$ (insieme)

insieme delle parti

è un reticolo, completo

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

$$\inf \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \equiv \bigwedge A$$

(può essere $\emptyset$)

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \equiv \bigvee A$$

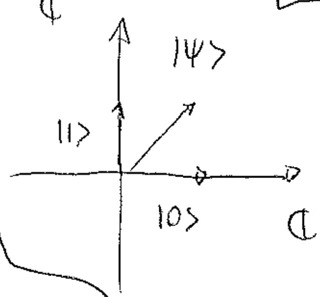
★ L : reticolo di proiettori (ortog.)
in uno sp. di Hilbert complesso (sep.)
$E = E^* = E^2$

NON è in gen. un'algebra di Boole [reticolo Booleano]
(anche se è (orto)complementato) : $E \mapsto \mathbb{1} - E = E'$
(cf. Mackey '63)

(si ricordi, in B, alg. di Boole, vale la proprietà distributiva $\boxed{x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)}$)

$x \mapsto x'$ complemento
$x \vee x' = \mathbb{1}$
$x \wedge x' = 0$

eg:



ket bra
$x = |\psi\rangle\langle\psi|$ ★ proiettore su $\langle |\psi\rangle \rangle$

$\equiv [\psi]$ stato ind. da ψ $\{[0], [1]\}$

$y = |0\rangle\langle 0|$

$z = |1\rangle\langle 1|$

es: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

$\mathcal{H}^*$ $\mathcal{H}$
ψ ψ
bra $\to \langle \psi_1|$ $|\psi_2\rangle \leftarrow$ ket
$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$
bra(c)ket
notazione di
★ Dirac

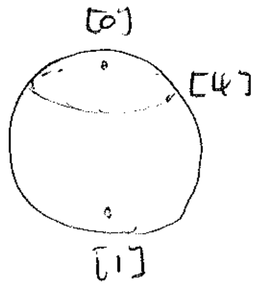
$y \vee z$ = proiettore sullo sp. generato da $|0\rangle$ e $|1\rangle$ che è $\mathbb{C}^2$ $\equiv I \equiv 1$

$x \wedge y$ = proiettore sullo sp. intersezione
$\langle |\psi\rangle \rangle \cap \langle |0\rangle \rangle = \{0\}$

$\Rightarrow x \wedge y = 0$
parimenti $x \wedge z = 0$

$\Rightarrow x \wedge 1 = x = 0$ assurdo □

Sfera di Bloch



★ in termini fisici : in M.Q. al contrario della M.C. ci sono osservabili$^+$ non misurabili simultaneamente
$^+$ mat: operatori autoaggiunti su $\mathcal{H}$, riconducibili (teorema spettrale) a operatori di proiezione

V-3

"matrici densità"

$\boxed{\text{INCISO}}$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar\alpha\langle 0| + \bar\beta\langle 1|)$$

$$= \alpha\bar\alpha\,|0\rangle\langle 0| + \bar\alpha\beta\,|1\rangle\langle 0|$$

$$+ \alpha\bar\beta\,|0\rangle\langle 1| + \beta\bar\beta\,|1\rangle\langle 1|$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \bar\alpha\alpha & \alpha\bar\beta \\ \bar\alpha\bar\beta & \bar\beta\beta \end{pmatrix} \qquad |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

operatore hermitiano (matrice) $\boxed{\text{INCISO}}$

$$A = A^* \Rightarrow A = U^* D\, U \qquad U^* U = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum \lambda_i \tilde{P}_i \qquad \tilde{P}_i = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

autovalori

Spettro di A

$$\Rightarrow A = U^*\left(\sum \lambda_i \tilde{P}_i\right) U$$

$\boxed{\star \text{ teorema spettrale}}$

$$= \sum_{\lambda_j \text{ distinti}} \lambda_j \underbrace{U^* \tilde{P}_i U}_{P_j}$$

proiettori sugli autospazi

$$P_i P_j = 0$$

$\star$ amplissime generalizzazioni $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$

misura spettrale (a valori proiettori)

(von Neumann, 1929)

S poset

☆ **inf semilattice** (o semi-lattice ≡ semireticolo)

$\forall a,b \quad \exists \ \inf\{a,b\} \equiv a \wedge b$ (o ab)

notazione

eq: ogni s. insieme finito (e non vuoto) ha inf

semireticolo inferiore

☆ **sup semilattice**

semireticolo superiore

$\forall a,b \ \exists \ \sup\{a,b\} \equiv a \vee b$

ogni s. insieme finito non vuoto ha un sup

NOMENCLATURA

☆ **lattice** (inf + sup semilattice) L

un reticolo può avere un elemento "più grande" di tutti;

unit top element $\equiv \mathbb{1}$ $(\top)$

unità

bottom element $\mathbb{0}$ il più piccolo

zero

[$\ast \neq \emptyset$ per def]

☆ **directed complete** : ogni insieme diretto ha un sup

D diretto:
$\ast \neq \emptyset$ e $\forall x,y \in D$
$\exists z \in D$ t.c.
$x \leq z$, $y \leq z$

☆ directed complete semilattice : semilattice + dir. complete

☆ complete lattice ogni sottoinsieme ha sup e inf

☆ complete semilattice : ogni s. insieme non vuoto ha inf e ogni s. insieme diretto ha sup

d c p o
directed complete poset

e fatto assumere l'esistenza di uno di due ☆

infatti, supponiamo di avere i sup

Sia $X \subseteq L$, poniamo $B = \bigcap_{x \in X} \{\downarrow x\}$

(se l'int. è vuota, poniamo $B = L$)

ora, è $\sup B = \inf X$
che esiste

infatti $\sup B \leq x \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$\sup B \in B \Rightarrow \underline{\inf X = \sup B}$

es. "dom. di Kahn"

elemento:

così non è un reticolo!

es: chi è $\inf \{ \boxed{0}, \boxed{1} \}$

chi è $\sup \{ \boxed{0}, \boxed{1} \}$

non esistono

ma

$0 = \perp$ bottom

così l'inf di un sottoinsieme non vuoto esiste sempre

es. $\inf \{ \boxed{0}, \boxed{1} \} = \perp$

chi è $\sup \{ \boxed{0}, \boxed{1} \}$? non c'è

ho un semi-reticolo inferiore
ed è directed-complete

se voglio che sia un reticolo, e sarà anche completo, devo chiedere che esista anche $\inf \emptyset = \top = \mathbb{1}$ → top element.

Osservazione

Sia $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert (separabile) (reale o complesso)

Sia $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ base ortonormale numerabile.

$$\mathcal{H} \ni x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$$

$\{e_i\}$ non è una base di Hamel

infatti, una base di (Hamel) è tale che

$$x = \sum_{i=1}^{N_x} y_i b_i \quad \text{(c.l. finita)}$$

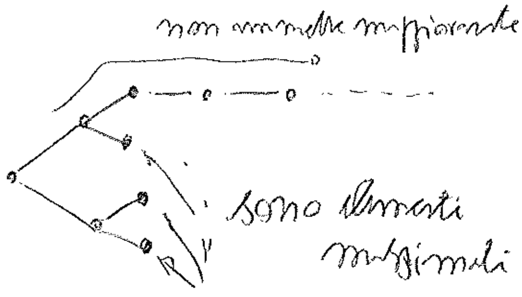
con gli y_i univocamente determinati

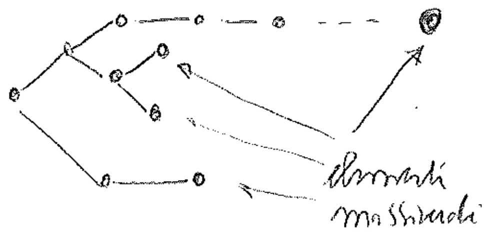
INCISO LEMMA DI ZORN

insieme massimale di vettori l.i.

esiste in virtù del lemma di Zorn: (equivalente all'assioma della scelta)

Dato un poset P non vuoto, se ogni catena (sottoins. totalmente ordinato) ammette un maggiorante, allora $\exists\, m$ massimale: dato $x \in P$, se $m \leq x \Rightarrow x = m$





"bit streams"

$X = \{ \ell = \text{elenco finito e infinito di bit} \}$ 0, 1

$= \Omega 2^{*\omega}$ (finito, infinito)

$\ell \leftarrow$

1 2 ... osservatore ... n

$L(\ell) = n$

lunghezza $L(\ell) = +\infty$

$x \quad \ell =$

(*)

osservazioni sottobasiche

$`s_n = 0' \rightsquigarrow \{ \ell \mid L(\ell) \geq n \,,\ \ell[n] = 0 \}$

$s_n = 1 \qquad \ell[n] = 1$

$\vdash\ `s_{n+1} = 0' \vee `s_{n+1} = 1'$

$\leq\ `s_n = 0' \vee `s_n = 1'$

per osservare l'$n+1$-esimo bit devo osservare i precedenti

$\text{starts } \ell = \{ m \mid \ell \sqsubseteq m \}$

$\{ \ \ell \ \}$

$= \uparrow \ell$

$\ell \sqsubseteq m \qquad \ell$ prefissa m (è prefisso di)

$\ell \quad x$

m

$\ell \diamond x$ concatenazione

ogni $\ell = \bigvee$ starts x

disgiunzione

unione di intersezioni finite di osservazioni sottobasiche

ovviamente:

starts $m \leq$ starts ℓ

in (X, τ) sottobase: collezione di aperti le cui intersezioni finite formano una base

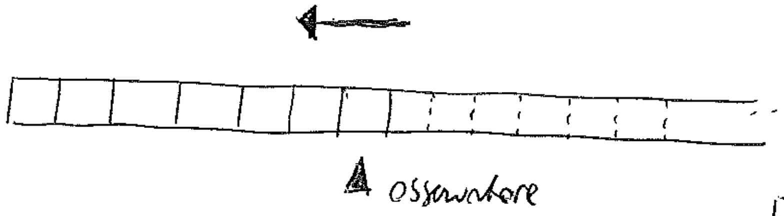
$A = \bigcup (\bigcap_{\text{finite}} U_i)$

aperto arb.

(*) Per ora utilizziamo la topologia di Alexandrov

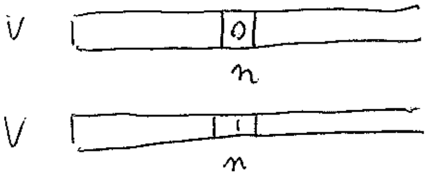
$$\tilde{X} = \{ \ell = \text{elenco infinito di bit} \}$$

$$\tilde{X} = \Omega 2^{\omega}$$



$$`s_n = 0\text{'} \vee `s_n = 1\text{'} = \text{VERO}$$

il tempo non conta: prima o poi tutti i bit vengono osservati



= tutte le sequenze

$$\Omega 2^{\omega} \subsetneq \Omega 2^{*\omega}$$

☆ L = Kahn (completo) <u>NON è un reticolo Booleano</u>

$x = 0 \qquad x' = 1$

$1 \qquad 0$

[è <u>un</u> complemento, v. oltre]

$x = |\cdots|1|\cdots|0|\cdots$

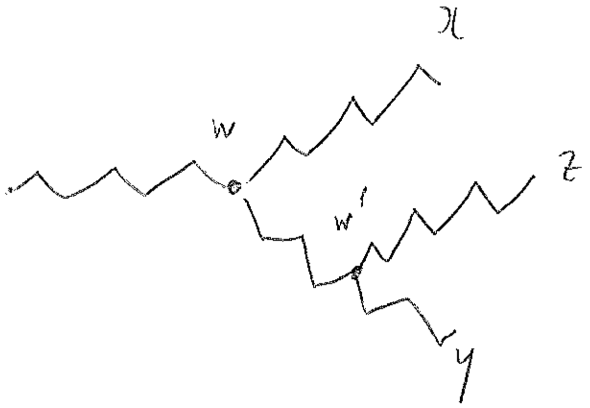
$x' = |\cdots|0|\cdots|1|\cdots$

$x \wedge x' = 0 \qquad x \vee x' = 1$

vale

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad ?$$

NO



$y \vee z = 1 \qquad x \wedge y = w$

$ x \wedge z = w$

$x = w \vee w = w \qquad$ NO

* Importante

In un reticolo distributivo il complemento x' di ogni x è unico.

Infatti sia x t.che x' e x'' siano suoi complementi

$$x \vee x' = 1 = x \vee x''$$
$$x \wedge x' = 0 = x \wedge x''$$

Da
$$x' \wedge \underbrace{(x \vee x'')}_{1} = \underbrace{(x' \wedge x)}_{0} \vee (x' \vee x'')$$

Segue
$$x' = x' \vee x''$$

$$x' \vee x''$$
$$\|$$

Da
$$x'' \wedge (x \vee x') = (x'' \wedge x) \vee (x'' \vee x')$$

Segue
$$x'' = x' \vee x'' \Rightarrow x' = x''$$

Ciò fornisce un'altra dimostrazione del fatto che il reticolo dei proiettori di uno sp. di Hilbert e il dominio di Kahn completo non sono distributivi [i complementi ivi definiti sono "naturali" (E ↦ 1−E ;) ma non sono unici

*** Topologia di Scott

P : dcpo

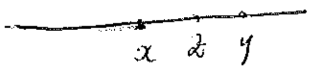
$U \subseteq P$ aperto (di Scott)

1. U sup. chiuso $\quad \uparrow U = U$
   upper set

2. Se D è diretto e $\vee D \equiv \sup D \in U$, allora $\exists\, y \in D \,/\, (\uparrow y) \cap D \subseteq U$

ovvero $U \cap D \neq \emptyset$ ogni qual volta D è diretto e $\sup D \in U$ ["inaccessibilità"]

Esempio: sia $x \in P$; $U(x) := P - (\downarrow x)$ è un aperto di Scott.



Verifichiamo (1). Sia $y \in \uparrow U(x)$.

$\exists\, z \in U(x)$ t.c. $z \leq y$. Ma $z \notin \downarrow x$,

sicché $y \notin \downarrow x$ e pertanto $y \in U(x)$.

Dunque $U(x) = \uparrow U(x)$

ovvero $e \notin U(x) \Rightarrow d \notin U(x)$
sicché
$d \in U(x) \Rightarrow e \in U(x)$ per qualche e

Verifichiamo (2)

Sia D diretto, se $e \leq x \;\; \forall\, e \in D$, è

$d = \vee D \leq x$. Se $d \in U(x)$, è pure

$e \leq x$ per qualche $e \in D \Rightarrow U(x)$ è aperto.

★ Verifica degli assiomi

$\emptyset$, P Scott

- $\bar{U}$, $\bar{V}$ Scott. Sia $\bar{W} = \bar{U} \cap \bar{V}$,

$b \in \uparrow \bar{W}$ allora $\exists\, a \in \underset{\bar{U} \cap \bar{V}}{\bar{W}}$, $a \leq b$

Ma allora $b \in \uparrow \bar{U} = \bar{U}$, $b \in \uparrow \bar{V} = \bar{V}$ (per ip.)

$\Rightarrow$ $b \in \bar{W}$; pertanto $\uparrow \bar{W} \subseteq \bar{W}$,

da cui $\uparrow \bar{W} = \bar{W}$ ✓

Sia ora D diretto e $\underset{\sup D}{\bigvee D} \in \bar{W} = \bar{U} \cap \bar{V}$

$\exists\, y, z \in D$, $\uparrow y \cap D \subseteq \bar{U}$, $\uparrow z \cap D \subseteq \bar{V}$

Ma D è diretto, sicchè $\exists \overset{D}{} t \in (\uparrow y) \cap (\uparrow z)$

Perciò $(\uparrow t) \cap D \subseteq (\uparrow y) \cap (\uparrow z) \cap D$

$= ((\uparrow y) \cap D) \cap ((\uparrow z) \cap D) \subseteq \bar{U} \cap \bar{V} = \bar{W}$

Pertanto $\bar{W} = \bar{U} \cap \bar{V}$ è Scott ✓

- Sia U_i, $i \in I$ aperto di Scott.

$\bar{U} = \bigcup_{i \in I} \bar{U}_i$, $b \in \uparrow \bar{U}$

$a \leq b$ per qualche $a \in \bar{U}$. Ma

$a \in U_i$ per qualche i,

perciò $\quad b \in \underbrace{\uparrow U_i = U_i}_{\uparrow \text{ sup. chiusi}} \subseteq U$

$\Rightarrow$ U è sup. chiuso ✓

Sia D diretto, $\bigvee D \in U$.

$\bigvee D \in U_i$ per qualche i

ma U_i è ap di Scott $\Rightarrow \exists\, y \in D$

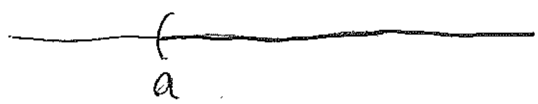
t.c. $(\uparrow y) \cap D \subseteq U_i \subseteq U \quad \Rightarrow U = \bigcup U_i$ è Scott.

Es. $\quad X = \{0,1\} \qquad 0 \leq 1$

Scott: $\quad \{\, \emptyset, \{1\}, \underbrace{\{0,1\}}_{X} \,\} \equiv$ Sierpiński

★ $(\mathbb{R}, \leq)$, top. di Scott

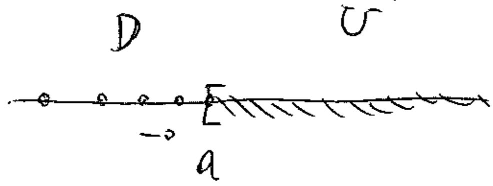
$\bar{U}$ Scott :



(nota: $\mathbb{R} \setminus U = (-\infty, a]$ è inferiore e contiene i sup dei suoi s.i. diretti

$U : \{x > a\}$

$U = \uparrow U$



NO

$\forall D : \vee D \in \bar{U}$ dovrebbe essere $D \cap \bar{U}' \neq \emptyset$

e ciò è impossibile

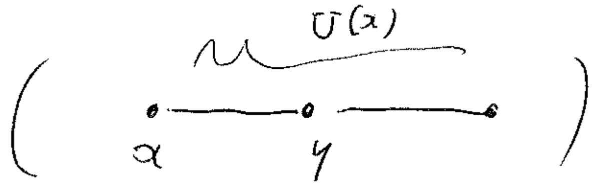
★ La topologia di Scott è T_0

siano dati $x, y \in P$.

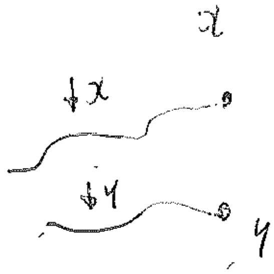
consideriamo $\overline{U}(x) = P - (\downarrow x)$
$\overline{U}(y) = P - (\downarrow y)$ sono aperti di Scott

Se $x \leq y$ (oppure $y \leq x$)

$\overline{U}(\underset{\underset{y}{\Downarrow}}{x}) \not\ni x$



Se x e y non sono confrontabili



Allora $x \not\leq \; \overline{U}(x) \ni y$
$y \not\leq \; \overline{U}(y) \ni x$

ovviamente, può accadere che $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$

Qual è l'ordine di specializzazione della top. di Scott?

$x \leq' y$
ogni intorno di x contiene y

R: è $\leq$!!

Dim. Sia esso $\leq'$. Se $x \leq y$, è pure $x \leq' y$ (gli op di Scott sono sup. chiusi)

Se $x \not\leq y$, sia $\bar{U} = \{ z \in X \,/\, z \not\leq y \}$ $\left(\equiv \bar{U}(y) \text{ not. prec.} \right)$

$\bar{U}$ è di Scott, contiene x (ok) ma non y

[v. anche l'es. precedente] $\Rightarrow x \not\leq' y$

Dunque $\leq = \leq'$!

$x \leq y$: "y ha più informazione di x

Chiusi di Scott: insiemi inferiori, chiusi rispetto a sup di insiemi diretti (caratterizzazione)

A chiuso $\Rightarrow$ $L \setminus A$ aperto

$\Rightarrow$ A è chiuso inferiormente.

Sia $D \subseteq A$ insieme diretto allora $\sup D \in A$:
in caso contrario, $\sup D \in L \setminus A$ che, essendo aperto, conterrebbe $d \in D$, contro l'ipotesi ($D \subset A$).

Viceversa: Sia A inferiore e contenente i sup degli insiemi diretti.
Consideriamo $L \setminus A$: è sup. chiuso.
Sia $D \subset L \setminus A$ diretto, con $\sup D \in L \setminus A$ $(*)$

Allora, se non esistesse $d \in (L \setminus A) \cap D$, si avrebbe $D \subset A$ e $\sup D \in A$, in contrasto con $(*)$.