Elementi di Topologia (Prof. M. Spadi)
Lezione II — v. anche Geometria

★ **Basi di uno spazio topologico**

$\mathcal{B}$ base: famiglia di aperti non vuoti tale che ogni aperto sia unione di elementi di $\mathcal{B}$

Ex: $\emptyset$ = unione vuota

in particolare $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ $(*)$

(i.e. $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X)

Caratterizzazione

Se $\mathcal{B}$ è una base, allora

1. $\forall x \in X$, $\exists$ $B \in \mathcal{B}$, $B \ni x$

[è la $(*)$]

2. Se $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, $\exists$ $\underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{B}} \subset B_1 \cap B_2$

Vediamo: sia $x \in B_1 \cap B_2$. $B_1 \cap B_2$ è aperto, e pertanto è unione di elementi di $\mathcal{B}$, dunque $\exists B \in \mathcal{B}$, $B \subset B_1 \cap B_2$

Data una famiglia $\mathcal{B}$ soddisfacente 1 e 2, (in $X \neq \emptyset$ qualsiasi) esiste una e una sola topologia che la ammette come base: questa si ottiene prendendo come aperti le unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Si verificano gli assiomi di sp. topologico;
e automaticamente, i B sono aperti

☆ Dato un ricoprimento $\mathcal{U}$ di X ($\neq \phi$) qualsiasi

$\exists$! topologia $\mathcal{T}$ <u>meno fine</u> per la quale ogni $U_i \in \mathcal{U}$
è aperto. Una base di $\mathcal{T}$ è costituita dalle
intersezioni finite non vuote di elementi di $\mathcal{U}$.
Si parla allora di topologia <u>generata</u> da $\underline{\mathcal{U}}$
[$\mathcal{U}$ è una <u>sottobase</u>: intersezioni finite non vuote
danno vita ad una base]

Si parla anche di <u>prebase</u>

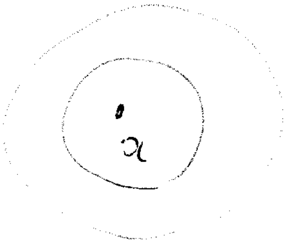
<u>Proposizione</u> Dato (X, τ), sp. topologico, esso è T_1 $\iff$ i punti (ovvero i $\{x\}$) sono <u>chiusi</u>

<u>Dim</u> X è T_1. Se $\{x_0\}$ <u>non</u> <u>fosse</u> <u>chiuso</u>, $X \setminus \{x_0\}$ non sarebbe aperto $\Rightarrow \exists \; y_0 \in X \setminus \{x_0\}$ t.c. $\forall \; U \ni y_0$, $U \ni x_0$, contro l'ipotesi.

viceversa. $\{x\}, \{y\}$ $(x \neq y)$ sono chiusi $\Rightarrow$ $X \setminus \{x\} \ni y$, $X \setminus \{y\} \ni x$ costituiscono intorni (aperti) contenenti uno dei pt. ma non l'altro.

★ Sistema di intorni di $x \in X$ (spazio topologico)

$$\mathcal{U}_x = \{ U \,/\, U \text{ aperto},\ U \ni x \}$$



[intorno: def alternativa $U \supset V_{\text{aperto}} \ni x$]

Base di intorni di x: $\mathcal{B}_x \equiv$ sotto-collezione di $\mathcal{U}_x$ tale che $\forall\, U \in \mathcal{U}_x,\ \exists\, B \in \mathcal{B}_x$ t.c.

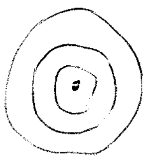
$$B \subset U$$

Se ogni x possiede una base di intorni numerabile,

★ X si dice soddisfare il <u>primo</u> <u>assioma</u> <u>di</u> <u>numerabilità</u>

(X <u>first</u> <u>countable</u>)

Es. ($\mathbb{R}^2$, top. usuale)



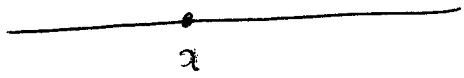
$\mathcal{B}_x$ = dischi di raggio razionale (oppure $\frac{1}{n}$ ecc.)

★ Se X ha <u>base</u> <u>numerabile</u> ($\mathcal{B}$ base: ogni aperto è unione di insiemi di $\mathcal{B}$), X si dice soddisfare il <u>secondo</u> <u>assioma</u> <u>di</u> <u>numerabilità</u>

(X <u>second</u> <u>countable</u>)

X second countable $\Rightarrow$ X first countable (chiaro)

$\not\Leftarrow$



$(\mathbb{R}, \tau_{disc})$

$\{x\}$: base di intorni numer. di x

ma $(\mathbb{R}, \tau_{disc.})$ non ha base numerabile

$\lightning \quad [a,b] \not\cong \mathbb{R}$

dimostrazione elementare:

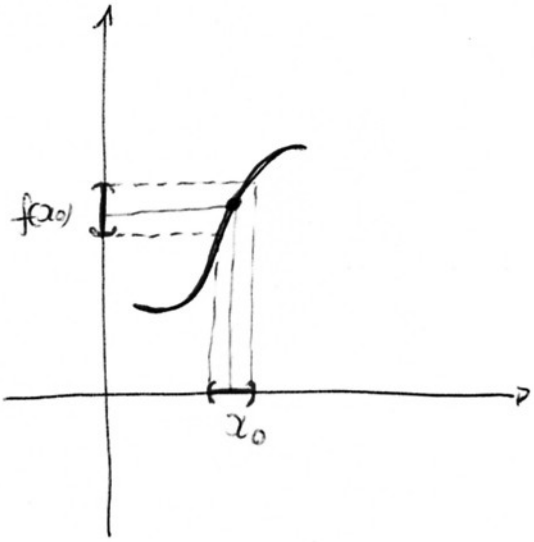
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

ammette massimo e minimo (Weierstrass)

$\Rightarrow$ in particolare non può essere suriettiva

Def $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \underset{\text{aperto}}{V} \ni f(x_0)$,

$U := f^{-1}(V)$ è aperto (contenente x_0)



generalizza la nota def. $\varepsilon - \delta$

Ancora sulla continuità

Proposizione $f : X \to Y$ è continua $\iff$ è continua in ogni $x_0 \in X$

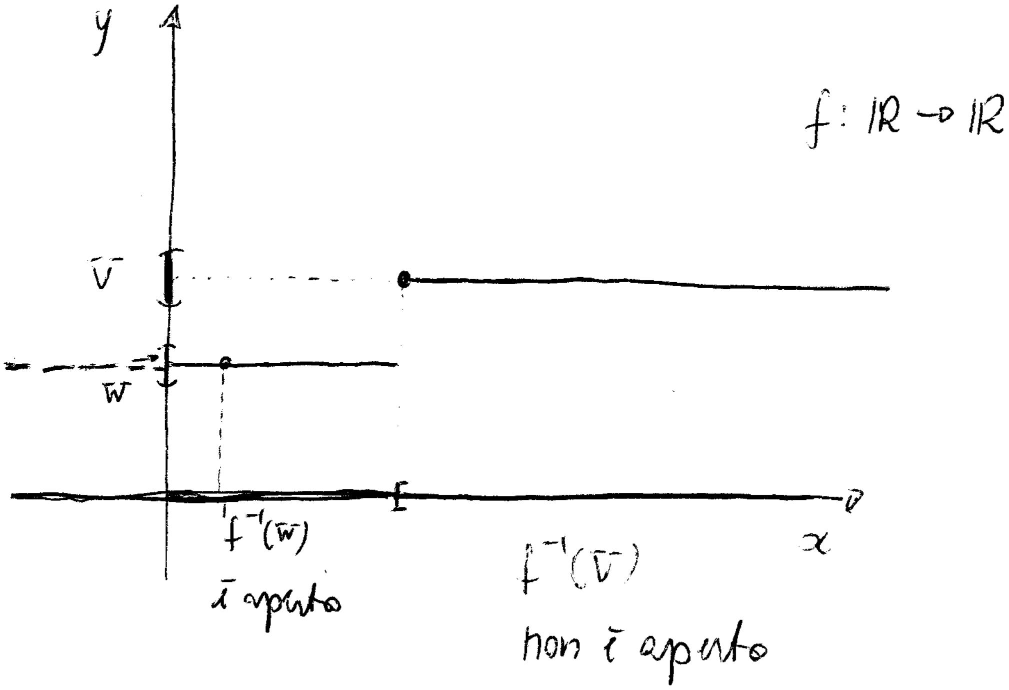
Dim

$(\Rightarrow)$ Dato $\underset{\text{aperto}}{V} \ni f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ è aperto (f è continua) e contiene certamente x_0.

$(\Leftarrow)$ Viceversa: Sia dato $V \subset Y$ aperto, dobbiamo far vedere che $f^{-1}(V) =: U$ è aperto.

Sia $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ (altrimenti, $\emptyset$ è aperto...)

Sia $x_0 \in f^{-1}(V)$. Allora $f(x_0) \in V$. Poiché V è aperto e f è continua in x_0, $f^{-1}(V)$ è aperto, che è quanto si voleva.


y
f: ℝ → ℝ
V̄
W̄
f⁻¹(W̄)
è aperto
f⁻¹(V̄)
non è aperto
x

☆ Importanza della condizione di Hausdorff

$\boxed{\text{unicità dei limiti}}$

• versione debole

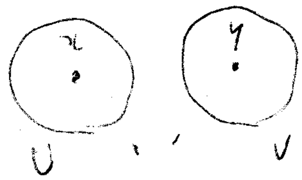
Sia X primo-numerabile [la teoria dei limiti può essere descritta nel modo "tradizionale" tramite successioni]

X è Hausdorff $\iff$ il limite di una successione convergente è unico.

dim

$(\Rightarrow)$ Sia $x_n \to x$ $\quad x_n \to y$ $\quad x \neq y$

Ma allora $\forall\, U \ni x$, $V \ni y$, $\exists\, x_{\bar{n}} \in U \cap V$ (assieme a x_n, $n \geq$



ma, se $U \cap V = \emptyset$

(U e V siffatti esistono in base alla condizione di Hausdorff)

si ha una contraddizione.

$(\Leftarrow)$ Se X non è di Hausdorff, $\exists$ $x \neq y$ tali che $\forall\, U \ni x$, $V \ni y$ contorni $U \cap V \neq \emptyset$. Ma allora è facile costruire una successione $\{x_n\}$ con $x_n \to x$ e $x_n \to y$

contro l'ipotesi.

retta proiettiva reale

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} /_{\sim}$$

Digressione: la retta proiettiva reale e complessa

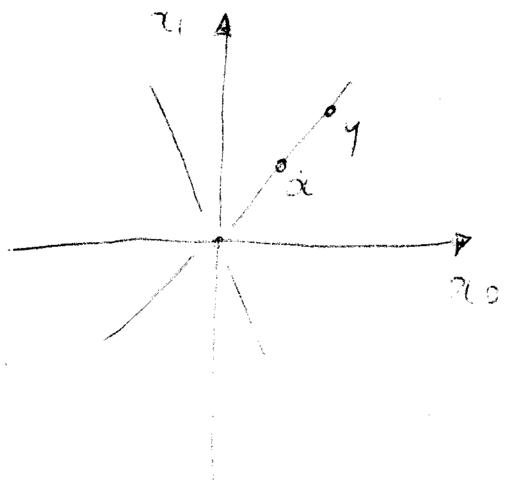
rette per l'origine in $\mathbb{R}^2$

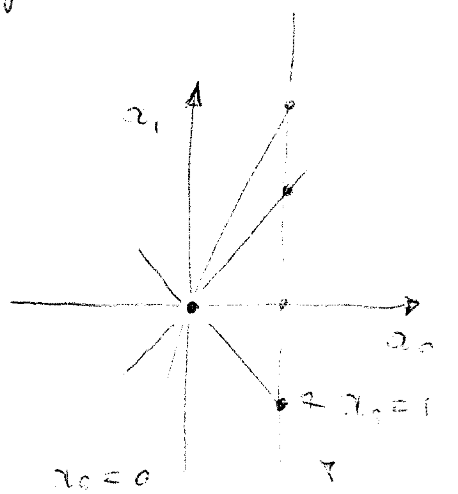
$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \sim y \iff x = \rho y, \quad \rho \neq 0$$

$[x_0, x_1]$ coordinate omogenee

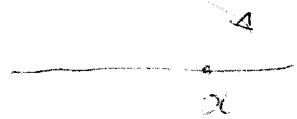
definiti a meno di un fattore di proporzionalità





$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad x_0 \neq 0$$

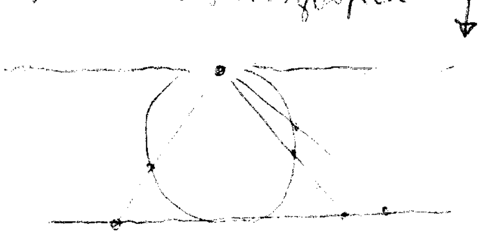
coord. affine

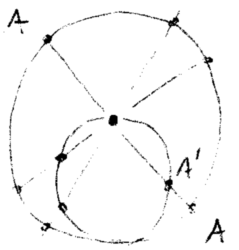


oppure $x' = \dfrac{x_0}{x_1}$, $x_1 \neq 0$ $\qquad x' = \dfrac{1}{x}$

$[0, 1] = \infty$ pto all'∞

Proiezione stereografica





$S^1 \approx \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

retta affine ordinaria con l'aggiunta di punto all'∞

$A \leftrightarrow A'$

biunivoca e bicontinua

"retta proiettiva complessa"

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} /_{\sim}$$

(analogo...)

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$x_i \in \mathbb{C}$ ecc.

!! Interpretazione geometrica: la proiezione stereografica

Ipparco, Tolomeo

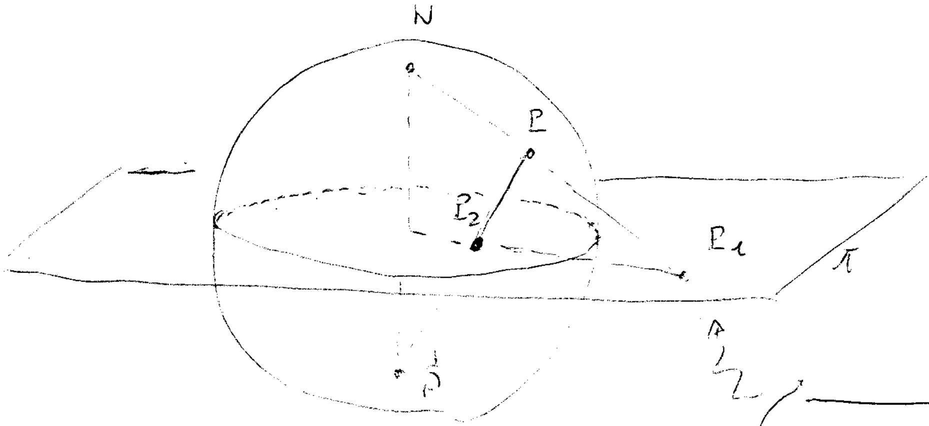
importantissima in vari contesti (geometria, astronomia, ..., calcolo quantistico)

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$$

sfera di Riemann

Poincaré

Bloch



$P_1 \leftrightarrow \zeta$

$P_2 \leftrightarrow \zeta'$

$\zeta \zeta' = 1$

copie di $\mathbb{C}$ con orientamenti <u>opposti</u>, <u>sovrapposte</u> ⚠