☆ Funzioni di classe C^s su una varietà diff. di classe C^k

$\mathcal{C}^s(M)$ $\qquad s \le k$

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^s(M)$

se $\forall$ carta φ risulta:

$$\boxed{f \circ \varphi^{-1}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathcal{U} = \varphi(W)$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{U} \arrow[l, bend right, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, "f\varphi^{-1}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

di classe C^s

Nell'intersezione $D(\varphi) \cap D(\psi)$ $\quad$ (φ, ψ carte)
si può usare sia φ che ψ, ma
$\psi \circ \varphi^{-1}$ (e $\varphi^{-1} \circ \psi$) sono di classe C^k
$k \geq s$, e dunque tale nozione è intrinseca ☆

$$(f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1})(\psi \circ \varphi^{-1})$$

☆ funzioni coordinate (o coordinate locali)

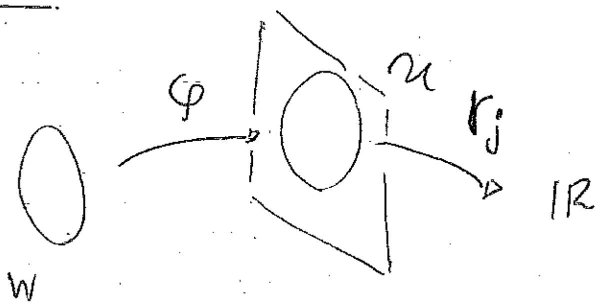
$r_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ (è una forma lineare..)

proiezione $r_j(a) \equiv r_j((a_1, a_2 .. a_n)) := a_j$

$$x_j : \underset{\substack{\cup \\ M}}{W} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>coordinate locali</u>

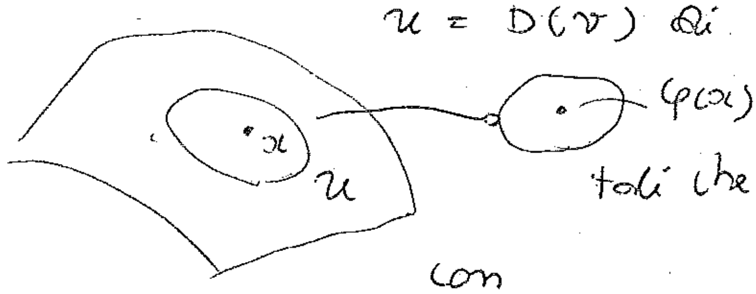
☆ $$\boxed{x_j := r_j \circ \varphi}$$



☆ <u>vettori</u> <u>tangenti</u> in $x \in M$

(costituiscono lo <u>spazio</u> <u>tangente</u> $T_x M$ di dimensione n)

$$v : \underbrace{\mathscr{C}^\infty(M, x, \mathbb{R})}_{\substack{\text{funzioni lisce} \\ \text{in un intorno aperto} \\ U = D(v) \text{ di } x}} \longrightarrow \mathbb{R}$$



tali che $\exists\ (a_1 \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n$

con

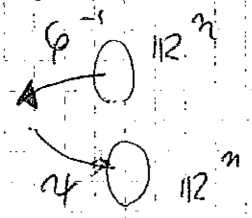
$$\boxed{v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}}$$

↯ Tale concetto non dipende dalla carta :

$$v(f) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(f \circ \varphi^{-1} \right) \Big|_{\varphi(x)} =$$

$$= \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1} \right) \Big|_{\varphi(x)}$$

$$= \sum_j a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j} \left(f \circ \psi^{-1} \right) \Big|_{\psi(x)} \cdot \overset{(= J^T)}{J_{ji}} \left(\psi \circ \varphi^{-1} \right) \Big|_{\varphi(x)}$$



$$\boxed{= \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j} \left(f \circ \psi^{-1} \right) \Big|_{\psi(x)} \Big(\underbrace{\sum_i a_i J_{ji} (\psi \circ \varphi^{-1})}_{b_j} \Big)}$$

→ (stessa forma in un'altra carta ...)

↯ $v = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ è dato da

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f) := \frac{\partial}{\partial r_j} \left(f \circ \varphi^{-1} \right) \Big|_{\varphi(x)}$$

|| in breve, si scrive

$$\boxed{v(f) = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

omettendo φ

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto (0,0,\underbrace{1}_{j},0,0)$$

Se $\varphi \rightsquigarrow (x_1 \ldots x_n) = x$

$\psi \rightsquigarrow (y_1 \ldots y_n) = y \qquad y = y(x)$

è

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i)}_{\text{ho } J^t} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

o semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} = J^t \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} = (J^t)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$(J^t)^{-1} = (J^{-1})^t$$

$x \rightarrow y$

* Si ricordi che se le <u>componenti</u> dei vettori si trasformano per mezzo di $A \in GL(n, \mathbb{R})$, <u>le basi</u> si trasformano tramite $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

** " i <u>vettori tangenti</u> sono <u>contravarianti</u> "

★ <u>Proprietà cruciale</u>

Lo spazio tangente $T_x M$ può essere identificato con quello delle <u>derivazioni</u> ★ (+) ovvero delle funzioni v come sopra tali che

* <u>linearità</u> 1) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$
* <u>regola di Leibniz</u> 2) $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$

prodotto puntuale

$(v(fg) = v(f)g + fv(g))$

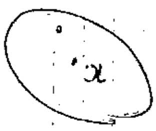
ovvero:

<u>Si può partire</u> da 1) e 2) e ritrovare le formule precedenti (Willmore)

v. oltre per i dettagli

(+) dell'<u>algebra</u> $\mathcal{C}^\infty(U)$.

★ <u>valutate</u> in x



★ <u>Derivazioni</u> di un'<u>algebra</u> A

$D : A \to A$ tali che

1) D sia lineare
2) $D(ab) = D(a)b + aD(b)$

* Un altro approccio allo spazio tangente (cenno)

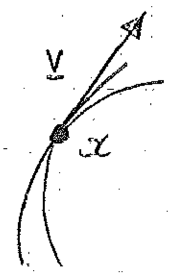
in $\mathbb{R}^n$ due curve passanti per un pto x fissato si dicono tangenti (in x) se hanno lo stesso vettore velocità. Ciò induce una relazione di equivalenza.

Tale nozione è invariante per diffeomorfismi (di $\mathbb{R}^n$)

$$y(t) = y(x(t))$$

$$\dot{y}(t) = J \cdot \dot{x}(t)$$

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)$$



$\gamma_1 \sim \gamma_2$

Lo spazio tangente (in x) è lo spazio dei vettori velocità (una classe $[\gamma]$ ...)
curva

In una varietà M, due curve sono dette tangenti in un punto x se lo sono per una carta (contenente x). Ciò non dipende dalla carta ..

□

Nozione di diffeomorfismo

siano (X_i, Φ_i) $i=1,2$ varietà diff. di classe C^k

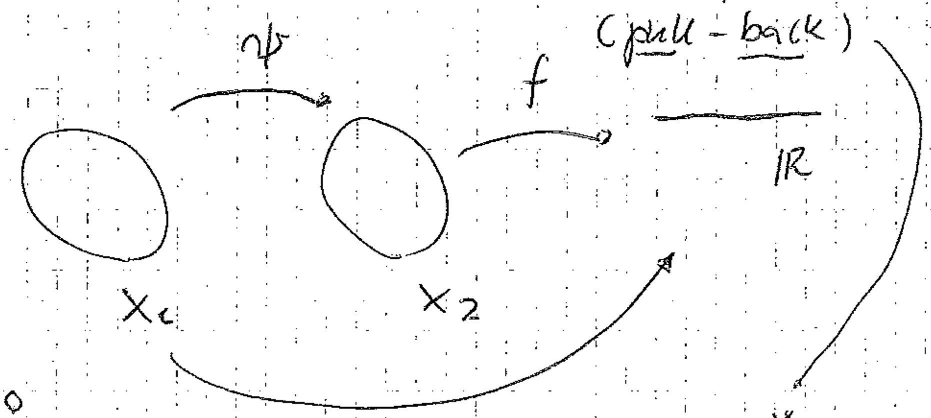
atlante

un'applicazione

$\boxed{\psi : X_1 \to X_2}$ è detta di classe C^s, $s \le k$

se $f \in C^s(X_2, \mathbb{R}) \Rightarrow f \circ \psi \in C^s(X_1, \mathbb{R})$

(pull-back)



"smooth is who smooth does"

$$f \circ \psi \equiv \psi^* f$$

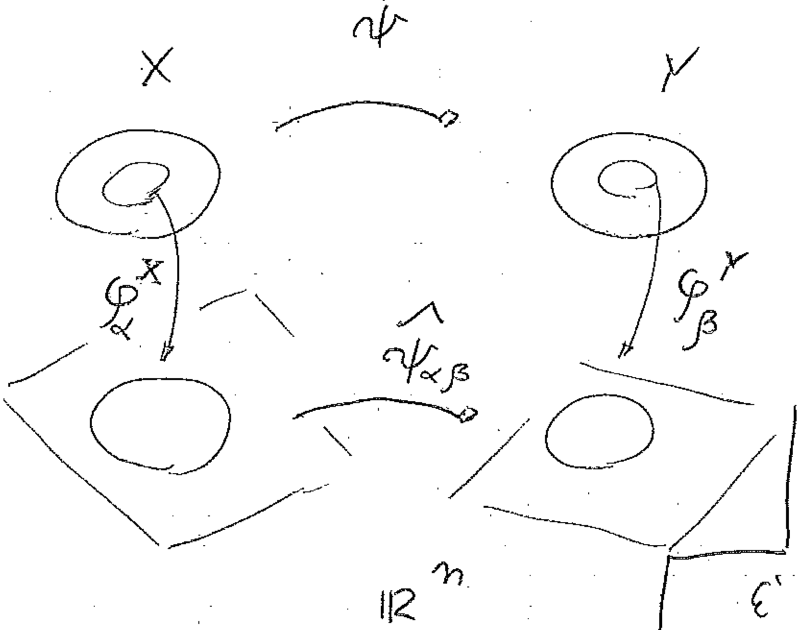
[A. Stacey (ispirato a F. Gump)]

"conoscendo le funzioni su X conosco X"

ψ diffeomorfismo (di classe C^k)

- ψ biunivoca, di classe C^k
- ψ^{-1} di classe C^k

È chiaro che localmente, ψ induce un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ (applicando la def. alle f. coordinate



$$\hat{\psi}_{\alpha\beta} = \varphi^Y_\beta \circ \psi \circ \left(\varphi^X_\alpha\right)^{-1}$$

È poi chiaro che $f : Y \to \mathbb{R}$ liscia $\Rightarrow \psi^* f = f \circ \psi : X \to \mathbb{R}$ liscia

Siano X, Y lisce (omettiamo l'indicazione degli atlanti)

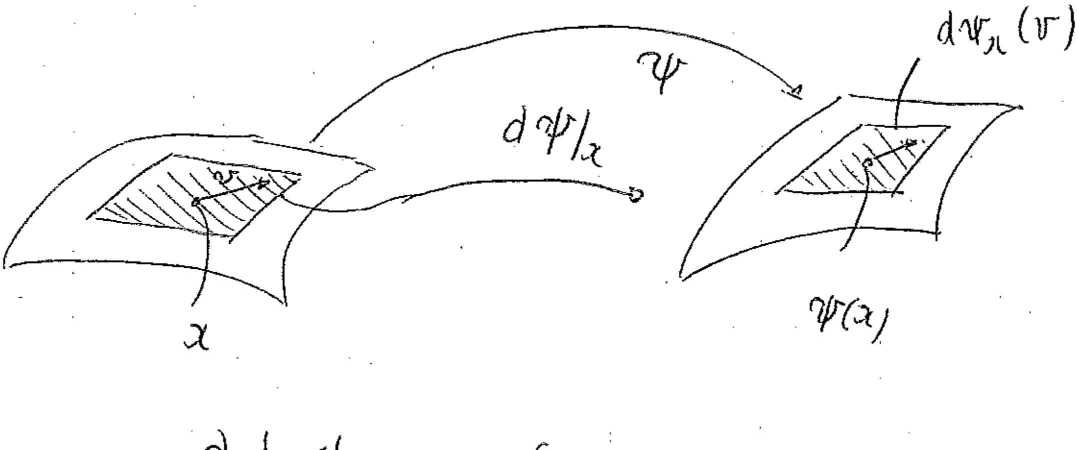
☆ Sia $\psi : X \to Y$ liscia

$x \in X$

$$\boxed{d\psi|_x : T_x X \longrightarrow T_{\psi(x)} Y}$$

$$v \in T_x X, \quad v \longmapsto d\psi_x(v)$$

<u>differenziale di ψ in x</u>



definito come segue

$$\boxed{d\psi|_x \, \overset{\substack{T_xX \\ \cup}}{\underset{\substack{\text{vettore}\\ \text{tangente}\\ \text{in } x}}{(v)}} \, \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{C}^\infty(Y,\, \psi(x),\, \mathbb{R})}}{(g)} := v(\overset{\substack{\psi^* g \\ \parallel}}{g\circ\psi})}$$

Si ha:

$$\boxed{\dots = \sum_{j=1}^{m} \Big[v(\underset{\text{coord. locali}}{y_j}\circ\psi) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big](g)}$$

$$d\psi|_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j\circ\psi)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

"push - forward"

"stenograficamente"

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \longmapsto \underset{\text{matrice Jacobiana}}{J} \frac{\partial}{\partial y}$$

Dettagli:

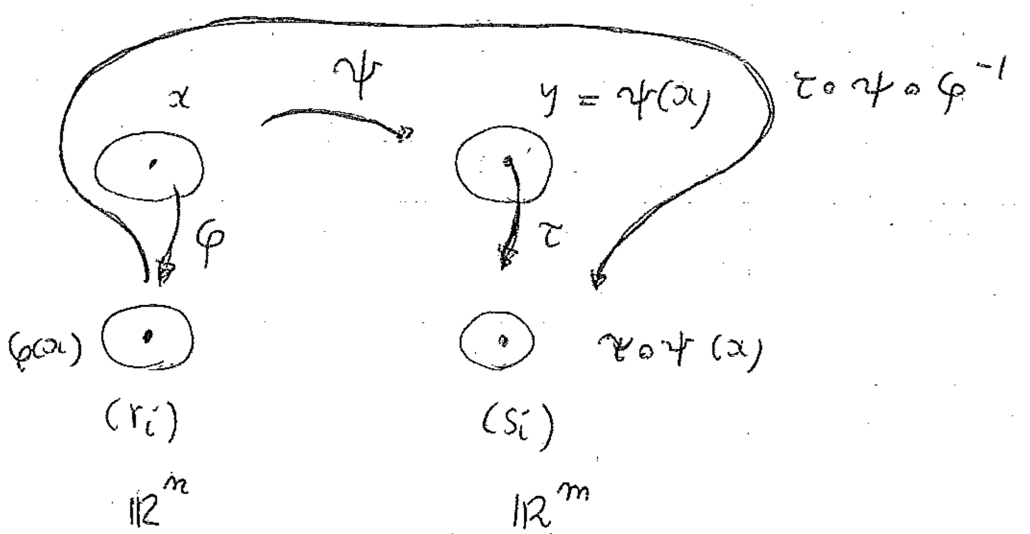
φ: sistema di coordinate intorno ad x
coordinate $(x_1 \ldots x_n)$

τ: " intorno a $\psi(x)$
coordinate $(y_1 \ldots y_m)$

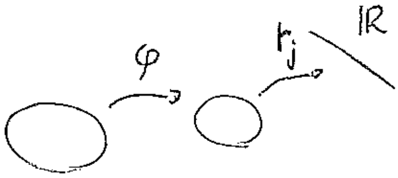
$$[d\psi|_x(v)](g) = v(g \circ \psi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ \psi) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial r_i} (\underbrace{g \circ \tau^{-1}} \circ \underbrace{\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}})\Big|_{\varphi(x)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial s_j}(g \circ \tau^{-1})\Big|_{\tau \circ \psi(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}(s_j \circ \tau \circ \psi \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}$$



=



$x_j = r_j \circ \varphi$

funzioni coordinate

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial y_j}(g) \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ \psi)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} v(y_j \circ \psi) \frac{\partial}{\partial y_j} \right](g)$$

è effettivamente un vettore tangente!

$$d\psi|_x : TX_x \longrightarrow TY_{\psi(x)}$$

$$d\psi|_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ \psi)}_{(d\psi|_x)_{ij}} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

" $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \dots$ "

Se $X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\Phi} Z$

è $\boxed{d(\Phi \circ \psi) = d\Phi \circ d\psi}$, comp. di omomorfismi $\sim$ prodotto di matrici

Infatti: $[d(\Phi \circ \psi)(v)](h) = v(h \circ (\Phi \circ \psi)) =$

$= v((h \circ \Phi) \circ \psi) = d\psi(v)(h \circ \Phi) =$

$= d\Phi(d\psi(v))(h) = [(d\Phi \circ d\psi)(v)](h)$ $\square$

Fibrato tangente e cotangente

X varietà diff (liscia)

unione disgiunta

$$TX = \bigsqcup_{x \in X} T_x X$$

sp. tangente a X

fibrato tangente

$$T^*X = \bigsqcup_{x \in X} T^*_x X$$

sp. cotangente = duale di $T_x X$

fibrato cotangente

TX e T^*X possiedono una naturale struttura di varietà (liscia)

Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlante di X

$$TX = \bigcup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha)$$

ove

$$\begin{aligned} \pi : TX &\to X \\ v &\mapsto x \end{aligned}$$

proiezione

ove x è univ. determinato da $v \in TX$

($\Rightarrow v \in T_x X$ per un unico x)

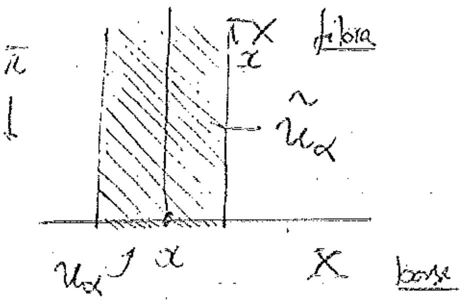
(è un'unione disgiunta)

Definiamo $\overbrace{\pi^{-1}(U_\alpha)}^{\tilde{U}_\alpha}$

$$\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad \checkmark \text{ notare}$$

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \underset{v}{\mathbb{R}^n}$$

TX (sp. totale)



$$\left(x, \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \mapsto \{x_i, b_i\}$$

$x_i = r_i \circ \varphi$ coord. locali

$\Uparrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} (\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha) \text{ è un atlante per } TX \\ \pi : TX \to X \text{ diviene liscia!} \end{array}}$$

Analogo discorso per T^*X ...

$\downarrow$

Lavoriamo ora in un intorno U di $p \in X$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\}$ base per T_pX

$\left\{ dx_i\Big|_p \right\}$ base duale della T_p^*X

$\downarrow$

ha già senso!

↳ infatti $df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$

($f : X \to \mathbb{R}$

$df : T_xX \to T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = \delta_{ij}$$

Ciò dà senso alla posizione

$$\text{“}\ dx = \Delta x\ \text{”}$$

di molti vecchi testi

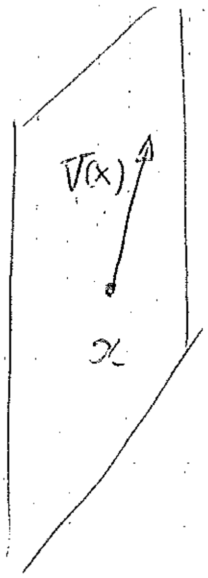
$$\left(dx_i\left(\Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \Delta x_i\right)$$

Più in generale:

☆ <u>Campo vettoriale</u> (liscio)

($\equiv$ sezione del fibrato tangente ...)

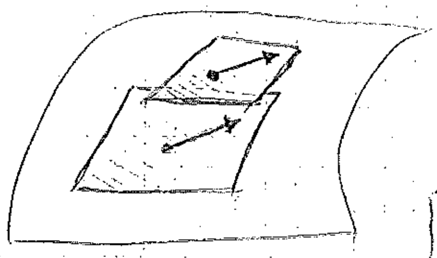
$V : X \longrightarrow TX$ t.c.

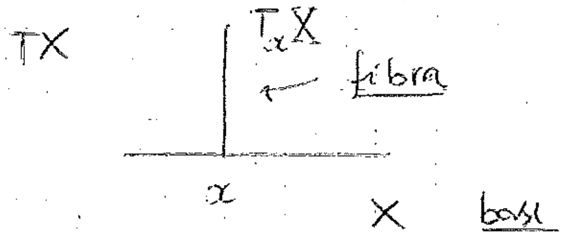


$$\pi \circ V = i_X$$

$$f \in \mathcal{C}^{\infty} \Rightarrow Vf \in \mathcal{C}^{\infty}$$

$$(Vf)(x) := [\underset{\substack{\cap \\ T_xX}}{V(x)}(f)](x)$$





Nota: su una varietà differenziabile esistono campi vett. globali
(... Tietze ... uso delle partizioni dell'unità)

1- forma differenziale (liscia)

$$\omega : X \to T^*X$$

$$\pi \circ \omega = i_X$$

proiezione

si chiede poi che $\forall$ $\overline{V}$ campo vettoriale liscio

risulti

$$\omega(\overline{V}) \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$$

ove $\boxed{\omega(\overline{V})(x) := \langle \omega(x), \overline{V}(x) \rangle}$

↯ dualità

localmente

$$\omega = \sum \omega_i \, dx_i$$

f. lisce

☆ Commutatore di due campi vettoriali (parentesi di Lie) (Lie bracket)

M varietà
X, Y campi vett.

$$\boxed{[X,Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))}$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$[X,Y]$ è ancora un campo vettoriale!

Infatti $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

(si può lavorare localmente) $\Rightarrow$

$$X(Y(f)) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

$$= \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Analogamente:

$$Y(X(f)) = \sum b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_i a_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\Rightarrow$

$$[X, Y] = \sum_j \underbrace{\left(\sum a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right)}_{c_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$\mathfrak{X}(M)$: campi vettoriali

costituiscono un'algebra di Lie : $(L, [\ ])$ sp. vettoriale

$[\ ]$ bilineare, antisimmetrica, Jacobi : $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

$\mathfrak{X}(M)$ ha dimensione infinita

Altro esempio di algebra di Lie di dim. infinita

$\left(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\ ,\ \} \right)$

parentesi di Poisson

ma vedi oltre...

Es: $(\mathbb{R}^3, \times)$ prodotto vettoriale è un'algebra di Lie

$\mathbb{R}^{2n} = \underset{q}{\mathbb{R}^n} \times \underset{p}{\mathbb{R}^n}$ $\quad q = (q_1 \ldots q_n)$, $p = (p_1 \ldots p_n)$

$$\{f, g\}((q,p)) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Es: Provare Jacobi!

Ciò ha senso su una varietà simplettica...

Ancora : $\boxed{\mathfrak{X}(M) \text{ è un } \mathscr{C}^\infty(M)\text{-modulo}}$

ovvero $V \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow fV \in \mathfrak{X}(M)$

$$(fV)(g)(x) = f(x) \underset{\text{prodotto puntuale}}{\cdot} [V(x)(g)](x)$$

Ciò è vero, più in generale, per le <u>sezioni</u> dei <u>fibrati vettoriali</u> ... vedi oltre

Inciso - richiamo

A anello $(A, +, \cdot)$ gruppo abeliano

(risp. a $+$) $\cdot$ moltiplicazione associativa

$+$ e $\cdot$ sono interrelate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + bc$$
$$(b+c)a = ba + ca$$

M gruppo abeliano

A-modulo: è un gruppo abeliano M su cui A agisce "linearmente"; precisamente

$$(M, \mu) \qquad \mu : A \times M \to M$$
$$(a, x) \mapsto \mu(a, x) \equiv ax$$

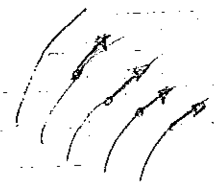
con
$$a(x+y) = ax + by$$
$$(a+b)x = ax + bx$$
$$(ab)x = a(bx)$$
$$1 \cdot x = x$$

spazio vettoriale $\equiv$ K-modulo, K campo

☆ <u>Campi vettoriali</u> ≡ <u>generatori</u> dei <u>gruppi</u> a <u>un parametro</u> di <u>diffeomorfismi</u> (locali)

$s, t \in \mathbb{R}$ (opp. $\in I$ ..)

$$g_t\, g_s = g_{t+s} \qquad g_t : X \to X \text{ diffeom.}$$



$$g_0 = id$$

È il <u>teorema di esistenza e unicità</u> di Cauchy-Lipschitz sulle varietà (<u>campo ↦ gruppo</u>)

$x \qquad g(t,x)$

$$g_t(x) \equiv g(t,x) \in X$$

$$\underset{I \times X}{(t,x)} \longmapsto \underset{X}{g(t,x)} = g_t(x)$$

$$g : I \times X \to X \quad \text{liscia}$$

(<u>azione</u> di I su X)

☆ Se X è <u>compatta</u> si può sempre prendere $I = \mathbb{R}$

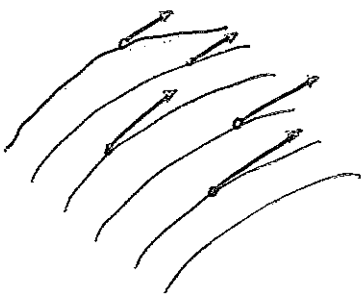
<u>Dal gruppo al campo</u> : se f è def in un intorno di x, si pone

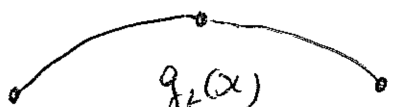
$$(\nabla f)(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(g_t(x)) - f(x)}{t}$$

$$= \frac{d}{dt} F(t) \Big|_{t=0} \qquad \text{con} \quad (x \text{ fissato})$$

$$F(t) := f(g_t(x))$$
$$= (f \circ g_t)(x)$$

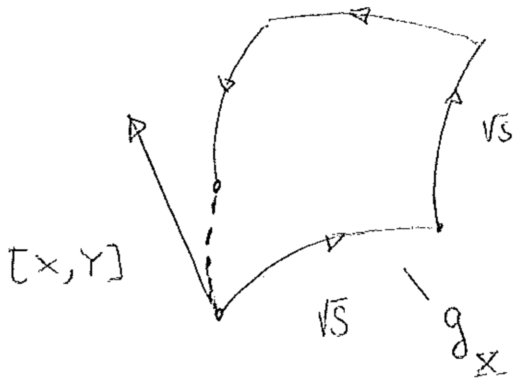
$$(F(0) = f(x))$$





$$g_s(g_t(x))$$
$$= g_{s+t}(x)$$

★ Significato di $[X,Y]$



si fa tendere $s \to 0$

si prova che

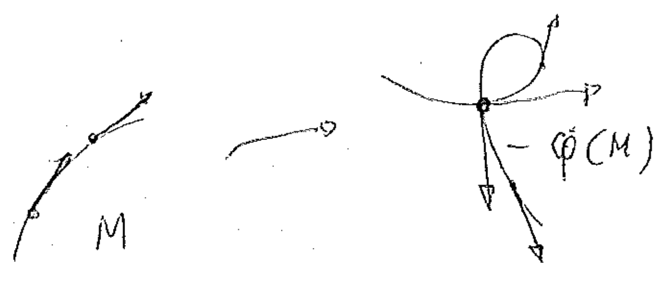
$$\boxed{[X,Y]=0 \iff g_X^t\, g_Y^s = g_Y^s\, g_X^t}$$

★ <u>Osservazione</u>: in generale

$\varphi : M \longrightarrow N$ <u>appl. differenziabile</u>

$\not\Rightarrow \quad \varphi_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$

<u>in generale</u>:



Ciò è vero se φ è un <u>diffeomorfismo</u>
e si ha: $[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X,Y]$

$\frac{1}{54}$ Campi vettoriali

(variante, v. Bott-Tu)

$M = \cup \mathcal{U}_\alpha$

$\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlante

$\mathcal{U}_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha$

$x \qquad u$

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$: $\quad f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(V_\alpha)$

in punti $\quad x_i = u_i \circ \varphi_\alpha \quad$ coordinata..

$\varphi_\alpha \equiv (x_1 \ldots x_n)$

$$\underset{M}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)} = \frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial u_i}(\varphi_\alpha(p))$$

$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right]$ = sp. tangente

X_α

campo vettoriale su $\mathcal{U}_\alpha$

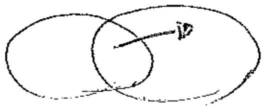
$= \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

cambi di coordinate
$x \to y$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$$

campo vettoriale su M $= \{X_\alpha\}$

tali che $\quad X_\alpha = X_\beta \quad$ su $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$



Si estendono alle varietà i classici teoremi del calcolo differenziale:

Teorema delle funzioni inverse

$\psi : X \to Y$ $\qquad$ ψ appl. liscia

$\dim X = \dim Y = n$

Sia $x_0 \in X$ t. che

$d\psi(x_0) : T_{x_0} X \to T_{y_0} Y$

sia un isomorfismo

Allora $\exists\, U_0 \ni x_0$ t. che $\psi\big|_{U_0}$ risulti

un diffeomorfismo su $\psi(U_0)$ $\square$

Teorema delle funzioni implicite

Sia $\psi : X \to Y$ appl. liscia,

$\dim X > \dim Y$

Sia $y_0 \in \psi(X)$. Si ponga

$X_0 = \psi^{-1}(y_0)$

Se $\forall\, x \in X_0$, $d\psi(x) : T(X, x) \to T(Y, \psi(x))$ è suriettiva, allora X_0 è una varietà (top. relativa), e $X_0 \hookrightarrow X$ è liscia

$\dim X_0 = \dim X - \dim Y$

Una *sottovarietà* di una varietà liscia Y

è una coppia (X, Ψ)

varietà liscia

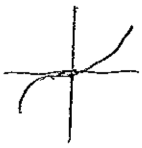
1) $\Psi : X \to Y$ *iniettiva* $\qquad \Psi$: *immersione*

2) $d\Psi|_x$ *iniettiva*

Ex: X_0 ...

Attenzione: $1) \not\Rightarrow 2)$: $\Psi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Psi(x) = x^3$



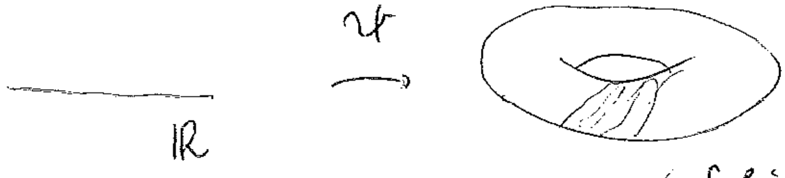
In tal caso si parla di Ψ come di un' *inclusione* differenziale

Inoltre $\Psi : X \to \Psi(X) \subset Y$

top. relativa

non è necessariamente un *omeomorfismo*

Ex



toro $S^1 \times S^1$

$\Psi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$ (foliazione di Kronecker)

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Psi(\mathbb{R})$ è densa in $S^1 \times S^1$

$(\overline{\Psi(\mathbb{R})} = S^1 \times S^1)$

Altri esempi

S^n sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$

(ι : inclusione naturale)

$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 = 0$ df è suriettivo ovvero $df \neq 0$ in questo caso

$\sum 2 x_i dx_i = 0$ indip.

$\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i$

È chiaro che $\dim S^n = n+1-1 = n$

gruppi classici

$X = Mat_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

Sia $\psi : X \to \mathbb{R}$ $\psi = \det$

$\psi^{-1}(1) =$ gruppo unimodulare

$\psi(r_{ij}) = \sum_{\pi} (-1)^{\pi} r_{1\pi(1)} \cdots r_{n\pi(n)}$

$d\psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} r_{1\pi(1)} \cdots \widehat{r_{j\pi(j)}} \, r_{n\pi(n)} \, d r_{j\pi(j)}$

$\pm$ det (compl. algebrico di r_{ij})   indipendenti

non possono essere contemporaneamente nulli

$\ast$ gruppo ortogonale $O(n)$ $\left(\dim = \frac{n(n-1)}{2}\right)$

$O \in O(n)$ se $OO^t = O^tO = I$

($(V, \langle\ \rangle)$ prod. scalare $O(V) = \{ O \in \operatorname{End} V /$

$\langle Ox \mid Oy \rangle = \langle x \mid y \rangle$ $\}$)

in gen. $O(V, B)$

$\uparrow$ forma bilineare simmetrica

$\ast$ gruppo unitario $U(n)$ ... (prod. scalare hermitiano)

$\dim = n^2$

$$\boxed{\text{Hint} \quad \psi(O) = OO^t \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \cong$ mat. simmetriche

$O(n) = X_0 = \psi^{-1}(I)$

$\ast$ $d\psi|_{I\,(\text{identità})}$ è suriettivo ... (check!)

$\Rightarrow$ $d\psi|_O$ è suriettivo (invarianza rotazionale ...)

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \square$$