Gruppi di Lie $(+)$

[* Def. Un **gruppo di Lie** G è un gruppo dotato di una struttura di var. differenziabile tale che
$G\times G \ni (g,h) \mapsto gh^{-1} \in G$ sia liscia.]

Esempi: $Gl_n(\mathbb{R})$, $Gl_n(\mathbb{C})$, $O(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ($\det = 1$)

$O(n,1)$: Lorentz. $-x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Elementi di Topologia
Prof. M. Spera a.a. 2008/09
Lezione **X – 1**

$L_g: \ x \mapsto gx$ trasl. a sinistra

$R_g: \ x \mapsto xg$ " destra

$(dL_g)Y =$

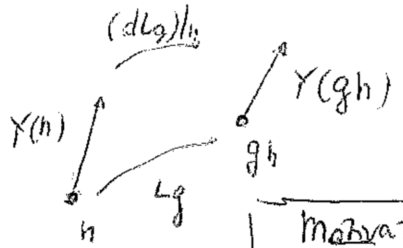
$$\boxed{(L_g)_* Y = Y_{(L_g)_*}}$$

* (++) **Algebra di Lie di un gruppo di Lie**

$\equiv$ {campi invarianti a sinistra}

$Y(gh) = (dL_g)|_h Y(h)$

$\cong T_e G$



$$T_e G \ni X$$

$$\bar X(g) = (dL_g)|_e X$$

$$\bar X(gh) = (dL_{gh})_e X = (dL_g)|_h (dL_h)|_e X$$
$$= (dL_g)|_h \bar X(h)$$

Nota: un gruppo di Lie è sempre parallelizzabile (e orientabile) [ha un frame globale]

Motivazioni (storiche): fattori integranti nelle eq. diff. (cf. teoria di Galois)

Programma di Erlangen (F. Klein 1872) ...

le algebre di Lie venivano chiamate all'inizio gruppi infinitesimali

È chiaro che $X \in T_e G \longleftrightarrow \bar X$ inv. a sin.

Inoltre: $\mathfrak{X}^G$ s. a. Lie di $(\mathfrak{X}(M), [\ ])$

$$(L_g)_* [X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$$

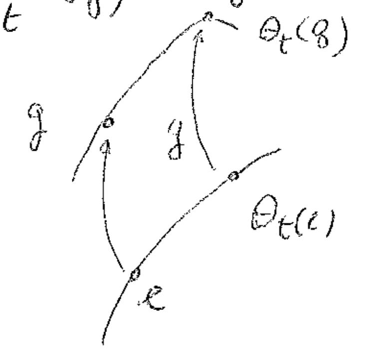
(L_g diffeo!)

(++) In dim. finita un'algebra di Lie è sempre l'algebra di Lie di un gruppo di Lie (connesso e semp. connesso) (teoremi di Lie) ex : $Gl_n \mathbb{R}$

$gl_n \mathbb{R}$ $[A, B] = AB - BA$

Sia X inv. a sinistra : il suo flusso è globale e

$$\left[\theta_t(g) = g\,\theta_t(e) \right]$$ ← chiama della dx.



sodd. la stessa eq.

$$\left[\frac{d\theta_t}{dt}\Big|_{t=0}(g) = g \cdot X \right]$$ ovvero

$(\theta_*)_0$, $\dot{g} = g \cdot X$ notazione spesso usata.

$g^{-1}\dot{g} = X$

$g^{-1}dg$ = forma canonica

Si osservi: non c'è nessuna metrica Riemanniana, per ora

$\langle g^{-1}dg, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = X$

$\left(g^{-1}\frac{dg}{dt} \right) = X$

mappa esponenziale (in assoluto principale)

$g \ni X \longmapsto \theta_1(e) \in G$

$\theta_1(e) \equiv \exp X$

sodd. ad un par. gen. da X

$d\theta_t|_{t=0} = X$

$$\theta_t(e) = \exp(tX) \qquad \frac{d}{dt}(\exp tX)\Big|_{t=0} = X$$

esempio fondamentale : $gl_n(\mathbb{R})$

$$\dot{X} = XA \in$$

($X \in Gl_n(\mathbb{R})$)

$X(0) = I$

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!} \quad \text{conv. in norma}$$

$$= \exp(tA)$$

esp. ordinario

Nota! ($H \subset G$ chiuso $\Rightarrow$ H Lie)

exp. è diffeo locale

- Se G è compatto è connesso e suriettiva

OSS.: vedremo che se G possiede una metrica Riemanniana $\langle \cdot , \cdot \rangle$ Ad-invariante su G, i gruppi ad un par. $\equiv$ geodetiche

e conn. $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$

($\Rightarrow \nabla_X X = 0$)

X - 2

$\boxed{O(n)}$: anti symmetric

$\boxed{\text{Ragionamento generale}}$ attenz.!!

$\theta_t(g) = g \cdot \exp tX$

$$\begin{cases} \dot{X} = XA \\ X(0) = 1 \end{cases} \qquad X = 1 + tA + o(t)$$

Sia ad es: $X \in O(n)$: $X^{-1} = X^T$

$$\Rightarrow \quad X^{-1} = 1 - tA + o(t) \quad \Rightarrow \quad A = -A^T$$
$$= 1 + tA^T + o(t)$$

$O(n)$: matr. antisimmetriche

$\boxed{u(n) : A = -A^* \text{ antihermitiane}}$

$$SU(n) = \{ A \in Mat_n(\mathbb{C}) \,/\, A = -A^*, \ tr\, A = 0 \}$$

$|\lambda_i| = 1$

$\det U = 1$ $\quad U = e^{A}$ $\quad \det U = \prod \lambda_i =$

$U(n)$ $\quad A = \log U \ldots$ calcolo spettrale $\quad = e^{\log \prod \lambda_i} = e^{\sum \log \lambda_i}$

$= e^{tr\, A}$

$$= 1 + t\, tr A + o(t) \quad \Rightarrow \quad tr A = 0$$

$\boxed{\text{La rappr. aggiunta di } G \text{ su } \mathfrak{g}}$ $\quad$ G gruppo di Lie, $\mathfrak{g}$ algebra di Lie di G

$h \mapsto Ad\, h = (R_{h^{-1}})_*$ $\quad$ $(R_h \circ R_g = R_{gh}$

$R_{h*}X$ ancora inv. a sinistra $\quad xgh = (xg)h$

Si ha:

$$\boxed{Ad\, h \cdot X = \frac{d}{dt} h (\exp tX) h^{-1} \Big|_{t=0}}$$

Dim

$\boxed{\text{In generale} \quad X \leadsto \theta_t \Rightarrow \phi \circ \theta_t \circ \phi^{-1} \text{ ass. a } \phi_* X}$

$(R_{h^{-1}})_* X \leadsto R_{h^{-1}} \circ \theta_t \circ R_h$ $\quad$ $\theta_t(g) = g \exp tX$

⚠ attenzione qui

$$Ad_{gh} X = gh X (gh)^{-1} = g(h X h^{-1}) g^{-1} = Ad_g Ad_h X$$

★ Esempio fondamentale: $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Ad}\,h \cdot X = h \cdot X \cdot h^{-1}$$ molt. matriciale

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}(\exp tY)\Big|_{t=0} X = -[X,Y] = [Y,X]$$

Dim: $$(1+tY+o(t))\,X\,(1-tY+o(t)) =$$

$$= X + t(YX - XY) + o(t) = X + t[Y,X] + o(t)$$

$\Rightarrow$ l'asserto.

★ Osservazione: consideriamo e^{tA}, e^{sB}:

$$★ = e^{tA}e^{sB}e^{-tA}e^{-sB} =$$

$$= (1+tA)(1+sB+\dots)(1-tA+\dots)(1-sB+\dots)$$

$$= 1 + \dots\ ts[AB+AB-BA-BA] + \dots$$

$$= 1 + 2ts[A,B] + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}(★)\Big|_{\substack{t=0\\s=0}} = 2[A,B]$$

★ In generale $[X,Y]=0 \Leftrightarrow \theta_t^X$ e θ_s^Y commutano

Attenzione!

Maurer - Cartan

$g \mapsto g^{-1} dg$ 1-forma a valori in $\mathfrak{g}$

è invariante a sinistra: $g \mapsto hg$ $\underline{\underline{h \text{ fisso}}}$

$$(hg)^{-1} d(hg) = g^{-1} h^{-1} h\, dg = g^{-1} dg$$

☆ <u>Digressione su $SO(3)$</u> [è possibile una trattazione esaustiva tramite l'impiego dei quaternioni, ma per ora ci accontenteremo di alcune osservazioni preliminari]

$$SO(3) = \{ O \in M_3(\mathbb{R}) \ / \ \underbrace{O^T O = O^T O = I_3}_{O(3)} \ , \ \det O = +1 \}$$

gruppo ortogonale <u>speciale</u>

$O \in O(3) \iff O$ conserva il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$:

infatti

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x^T I_3 y \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle Ox, Oy \rangle = (Ox)^T Oy = x^T O^T O y$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\langle x, y \rangle \quad \forall x, y \iff O^T O = I_3 \qquad (*)$$

Si ha, necessariamente $\det O = \pm 1$: la $(*)$

infatti porge $1 = \det O^T O = \det O^T \cdot \det O$ (Binet)

$$= (\det O)^2 .$$

Leggendo O come elemento di $U(3)$ (gruppo unitario di $\mathbb{C}^3$: $U(3) = \{ U \in M_3(\mathbb{C}) \ / \ U^{T} U = U U^{T} = I_3 \}$

è $\det O = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ (autovalori)

da $\| O v \| = \| v \|$ ($v \in \mathbb{R}^3$ o $v \in \mathbb{C}^3$, con le norme rispettive) segue che se $O v = \lambda v$, $v \neq 0$ (v autovettore) , è $|\lambda| = 1$.

Ora, P_C^O è <u>un polinomio reale di 3° grado</u>, dunque <u>ammette una radice reale</u> ($= \pm 1$) e due radici <u>complesse coniugate</u> $e^{\pm i\alpha}$, in generale

polinomio caratteristico di O

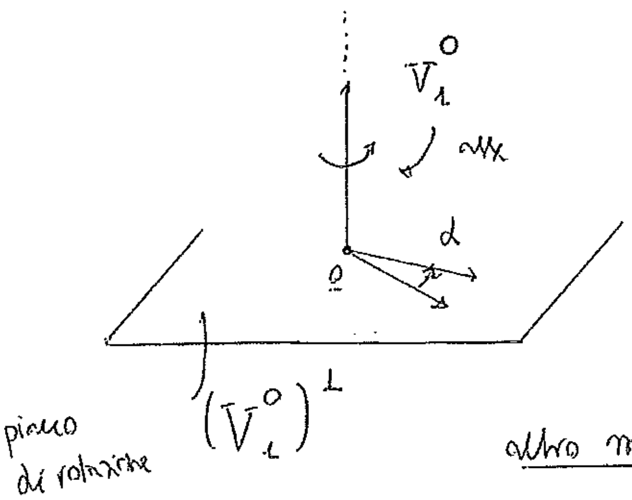
da $\det O = 1$ segue che una delle radici vale $+1$;

Escludendo il caso banale (ponendoci in forma diagonale; ciò è possibile in generale in $\mathbb{C}^3$) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$, abbiamo un autospazio unidimensionale, in $\mathbb{R}^3$, corrispondente a $\lambda = 1$

Identità

Si giunge, per via algebrica, al teorema di Eulero:

ogni elemento di $SO(3)$ è una rotazione attorno ad un asse (l'autospazio). L'angolo di rotazione α (previa scelta di un'orientamento dell'asse) si ottiene calcolando gli autovalori (il pol. caratteristico ha sempre una radice $\lambda = 1$, le altre si ottengono dal polinomio di 2° grado ottenuto dividendo per $\lambda = 1$ ...)



altro metodo: preso $v \in (V_1^O)^\perp$,

si ha $\cos\alpha = \langle v, Ov \rangle$

Sia ora $\mathbb{R} \ni t \longmapsto R(t) \in SO(3)$

una f. liscia tale che $R(t+s) = R(t)\,R(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(sottogruppo ad un parametro di $SO(3)$: si noti che R definisce un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(SO(3), \cdot)$ molt.)

Si ha $R(0) = R(0)\,R(0) \Rightarrow R(0) = I$

Si fissi s. Calcoliamo

$$\frac{R(t+s)-R(s)}{t} = \frac{R(t)R(s)-R(s)}{t} =$$

$$= \frac{(R(t)-I_3)}{t}R(s) \xrightarrow[t\to 0]{} R'(0)R(s)$$

ossia $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{R'(s) = \underbrace{R'(0)}_{A} R(s) \qquad R(0)=I}$$

$$\Rightarrow \boxed{R(s) = \exp sA}$$

Si noti che $R'(0) = A$ è antisimmetrica:

$$\boxed{A^T + A = 0 \qquad (\star)}$$

infatti da $R^T R = I$ segue

$$(R^T)'R + R^T R' = 0$$

$$\Rightarrow (R')^T R + R^T R' = 0$$

e, calcolando in $t=0$ (e dato che $R(0)=I_3$) si arriva a $(\star)$.

A è detto generatore infinitesimale del gruppo ad un parametro

[Le matrici antisimmetriche costituiscono l' algebra di Lie di $SO(3)$..]

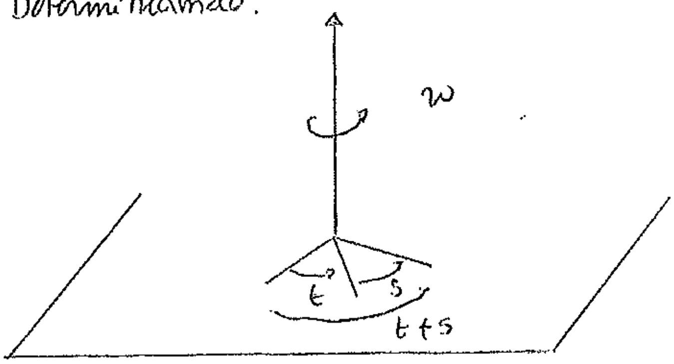
$X-8$

In forma equivalente: sia $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore generico. Posto $\xi(t) := R(t)\xi_0$ (sicché $\xi(0) = \xi_0$), si ha $\dot{\xi}(t) = \dot{R}(t)\xi_0 = A\,R(t)\xi_0 = A\,\xi(t)$

$$(\diamond) \qquad \dot{\xi} = A\,\xi \qquad\qquad \xi(0) = \xi_0$$

$$\Rightarrow \qquad \xi(t) = \exp(tA)\,\xi_0$$

Si noti che, geometricamente, le $R(t)$ (tra loro commutanti) sono rotazioni attorno ad un medesimo asse. Determiniamolo.



Poniamo $$A = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^T = -A$
$\det A = \det(-A^T) = (-1)^3 \det(A^T) = -\det A$
$\Downarrow$
$\det A = 0$

sia $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ \text{rango} \\ \text{chiaro...} \end{array} \right. \rightsquigarrow$

$r(A) = 2 \Rightarrow \nu(A) = 3 - 2 = 1$

Si trova subito $\operatorname{Ker} A = \langle w \rangle$ $\qquad A\,w = \underline{0}$

e w è l'asse di rotazione cercato: $(\exp tA)\,w =$

$$(1 + tA + \ldots)\,w = w + \underbrace{tA\,w}_{= \underline{0}} + \underbrace{\ldots}_{= \underline{0}}$$

La $(\star)$ può vedersi anche nel modo seguente:

posto $\underline{\xi} = \xi_1 \underline{i} + \xi_2 \underline{j} + \xi_3 \underline{k}$

$\underline{w} = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}$ . . . è

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{w} \times \underline{\xi} \qquad (\text{e} \quad \underline{\xi}(0) = \underline{\xi}_0)$$

$\times$: prodotto vettoriale :

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} w_2 & w_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} w_3 & w_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \left[w_2 \xi_3 - w_3 \xi_2 \right] + \underline{j} \left[w_3 \xi_1 - w_1 \xi_3 \right] + \underline{k} \left[w_1 \xi_2 - w_2 \xi_1 \right]$$

D'altro canto $\quad A \xi = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} w_2 \xi_3 - w_3 \xi_2 \\ w_3 \xi_1 - w_1 \xi_3 \\ w_1 \xi_2 - w_2 \xi_1 \end{pmatrix}$$, da cui l'asserto.

|| Il vettore geometrico $\underline{w}$ è chiamato vettore <u>velocità angolare</u>.

Approfondimento

risolviamo, in generale, il seguente problema di Cauchy

$$\star \qquad \boxed{R'(t) = A(t)\, R(t) \qquad R(0) = R_0 = I}$$

(famiglia di rotazioni con asse variabile...)

$\omega = \omega(t)$

$$(\underline{\xi}' = \underline{\omega} \times \underline{\xi} \ldots)$$

⚠ non

Si può far vedere che

$$R(t) = I + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m \le t} A(t_m)\, A(t_{m-1}) \ldots A(t_1)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_m$$

spesso chiamato integrale iterato di Chen

$$\equiv \quad \exp\left(: \int_0^t A(x)\, dx : \right)$$

: notazione di Wick

la serie converge...

$\star$ esponenziale a tempo ordinato

[cui si può dar senso anche come "integrale prodotto" alla Volterra

$$\prod_0^t e^{A(x)\,dx}$$

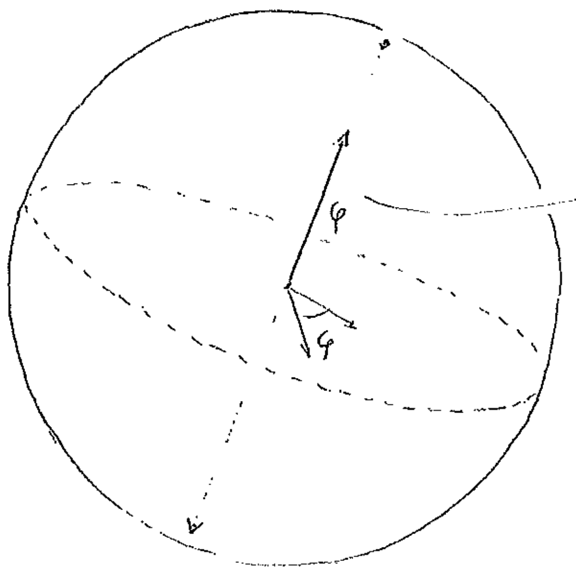
cf. l'identità di Eulero

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

La $\star$, e la relativa soluzione, sussistono in contesti molto generali...

Notiamo infine, che, come spazio topologico, $SO(3)$ può vedersi come $\mathbb{RP}^3$ (spazio proiettivo reale)

Sfera (piena) di raggio $R = \pi$ con i pti antipodali del bordo identificati



asse di una rotazione generica, di angolo φ opportunamente orientato; se $\varphi = \pm\pi$, si ottiene la stessa rotazione

$SO(3)$ e $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ $\quad (SO(3) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^3)$

$$SO(3) = \{ A \in Mat_3(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} A^t = A^{-1} \\ \det A = 1 \end{array} \}$$

ora, A è sempre una rotazione attorno ad un asse (Eulero)

Infatti $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ possiede un aut. $= 1$

pol. caratteristico

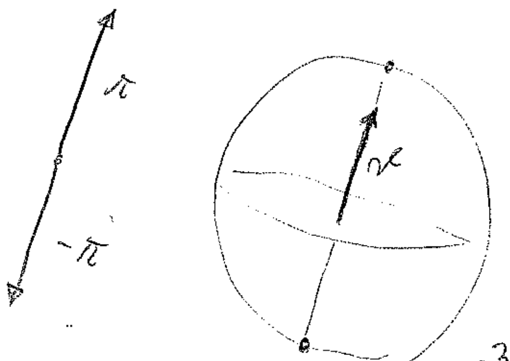
$|\lambda| = 1$ 1 reale, due complesse coniugate, e $\det A = 1 \Rightarrow$

rot. attorno all'asse x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{(forma canonica)}$$

$$\left.\frac{dA}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $A \leftrightarrow$ punti di una sfera piena di raggio π, con i punti antipodali identificati (rot. di π e di $-\pi$!)



Ma ciò è un modello di $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$: infatti

$\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \cong S^3/_{\sim}$ $\quad \sim$: id due pti antipodali

$S^3 : \{ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ $\quad x_i' = -x_i$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \underbrace{1 - x_3^2}_{} \geq 0$$

se $x_3 = 0$ $\quad x_i \sim -x_i \quad i = 0, .. 2$

altrimenti è $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = R^2$ (senza vincoli)

per $0 \leq R < 1$, da cui l'asserto X-13

☆ $\left[\mathfrak{su}(2) = \mathrm{Lie}\, SU(2) = \mathrm{Lie}\, SO(3) \cong \mathbb{R}^3 \right]$

Isomorfismi $(\mathbb{R}^3, \times)$ pr. vettoriale

$i \times j = k$

$\frac{1}{2}[i, j] = k$

ver. l'antisimmetria e l'id. di Jacobi

$\cong$ quaternioni imm. puri

$$\mathfrak{su}(2) = \{ A \in Mat_2(\mathbb{C}) \ / \ \bar{A}^t = -A, \ \mathrm{tr} A = 0 \}$$

base
$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[a meno di "i", sono le]

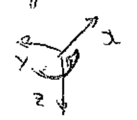
☆ **Matrici di Pauli**

$[I, J] = 2K$ etc.

Rappr. aggiunta $\mathfrak{so}(3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

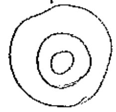
genera rot. attorno all'asse x



etc.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

orbite coaggiunte sfere



Ancora qualche dettaglio

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{a_0 + i a_1}_{a} & \underbrace{-a_3 + i a_2}_{b} \\ \overbrace{a_3 + i a_2}^{-\bar{b}} & \overbrace{a_0 - i a_1}^{\bar{a}} \end{pmatrix}$$

rapp. di $SU(2)$

$$(a_0 - i a_1)(-a_3 + i a_2) + (a_3 - i a_2)(a_0 - i a_1) =$$

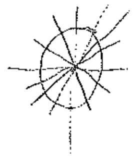
$= \ldots \ 0$ ortogonalità

★ $SU(2)$, $SO(3)$ e $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$

$$(z_0, z_1)^t \mapsto A \cdot (z_0, z_1)^t$$

$\in$
$\mathbb{C}^2$

Proiettivizziamo: $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} / \sim$ rette di $\mathbb{C}^2$ per $\{0,0\}$ $\mathbb{C}^2$



$S^2 \cong (z_0 : z_1)$ $\zeta = \frac{z_1}{z_0}$ $z_0 \neq 0$ ...

pr. stereografica

2ª carta $\zeta' = \frac{1}{\zeta}$

$$\left[\ \zeta' = \frac{a\zeta + b}{-\bar{b}\zeta + \bar{a}}\ \right]$$

★★★ tr. möbius

$|a|^2 + |b|^2 = 1$

Check: $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a z_1 + b z_0 \\ -\bar{b} z_1 + \bar{a} z_0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\frac{1}{z_0}\,(a z_1 + b z_0)}{\frac{1}{z_0}\,(-\bar{b} z_1 + \bar{a} z_0)} = \frac{a\zeta + b}{-\bar{b}\zeta + \bar{a}}$$

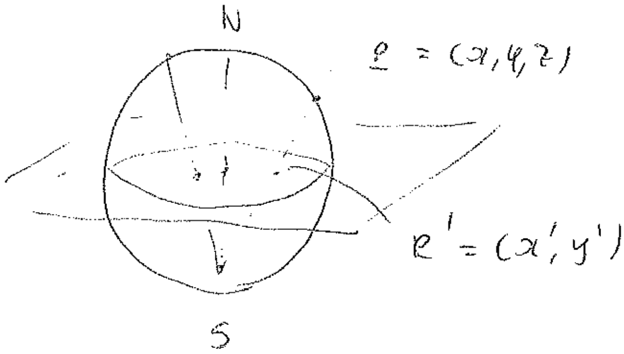
È chiaro che $a \to -a$, $b \to -b$ induce la stessa trasformazione (e vic.)

Che è una rotazione   vic. tutte le rot. sono ottenute così

$a = 0$ $\frac{b}{-\bar{b}\zeta} = \frac{|b| e^{i\vartheta}}{-|b| e^{-i\vartheta}} \frac{1}{\zeta} = -\frac{e^{2i\vartheta}}{\zeta}$

$b = 0$ $\frac{a}{\bar{a}}\zeta = e^{2i\varphi}\zeta$

4 <u>Ulteriori dettagli</u>



$$\zeta = x' + iy'$$

$$x + iy = \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2} \qquad x - iy = \frac{2\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2}$$

$$z = \frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2} \qquad \zeta = \frac{\eta}{\xi}$$

$$x + iy : x - iy : z : 1 =$$

$$2\eta\bar{\xi} : 2\xi\bar{\eta} : \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta} : \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}$$

$$\begin{aligned} \sigma \quad : \quad & \xi' = \alpha\xi + \beta\eta \\ \cap \quad & \eta' = \gamma\xi + \delta\eta \,.. \end{aligned} \qquad U(2) \xrightarrow{2:1} O(3) \qquad SU(2) \xrightarrow{2:1} SO(3)$$

$$\sigma \xrightarrow{\text{rotation}} S$$

$$\begin{aligned} x + iy &\sim 2\eta\bar{\xi} \\ x - iy &\sim 2\bar{\eta}\xi \\ z &\sim |\xi|^2 - |\eta|^2 \end{aligned} \qquad \text{" si trasformano come "}$$

$$\begin{aligned} x &\sim \eta\bar{\xi} + \bar{\eta}\xi \\ y &\sim \frac{1}{i}(\eta\bar{\xi} - \bar{\eta}\xi) \\ z &\sim |\xi|^2 - |\eta|^2 \end{aligned}$$

✧ Prodotto tensoriale

$$V \otimes_K W$$

sp. vettoriali (su K)

[si generalizza in modo ovvio...]

duali

$$= \{\, \pi : V^* \times W^* \longrightarrow K \ , \ \pi \text{ bilineare} \,\}$$

lineare in entrambi gli argomenti

[in dim. finita $V^{**} \cong V$ e l'isomorfismo è CANONICO, ossia non dipende dalla scelta di basi]

$$v \otimes w \equiv \pi : (x^*, y^*) \longmapsto \underbrace{\underset{\in K}{x^*(v)}\ \underset{\in K}{y^*(w)}}_{\in K}$$

notare: $\alpha(v \otimes w) = \alpha v \otimes w = v \otimes \alpha w$ $\quad (\alpha \in K)$

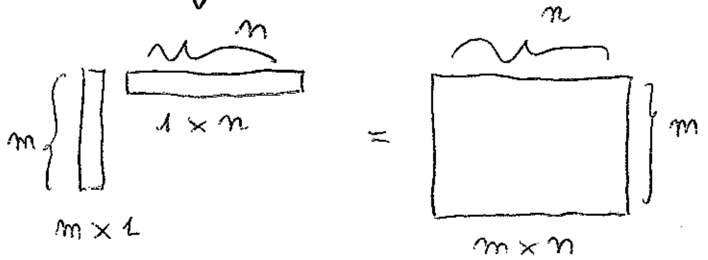
$$V \otimes W = \{\, \sum \beta_i (v_i \otimes w_i) \,\}$$

✧ diventa uno spazio vettoriale (prodotto tensoriale di V e W) [in part: $(\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w = \alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w)$ ecc.]

Es importante $\quad \mathrm{Hom}(V, W) \cong W \otimes V^*$

[osservare: $\underset{\in V}{(w \otimes v^*)(u)} = \underbrace{\overbrace{v^*(u)}^{\in K}\, w}_{\in W}$ ..]

concretamente:



cf: Dirac $|w\rangle\langle v|$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\langle \, , \rangle$ prodotto scalare (f. bilineare simmetrica definita positiva)

$\langle \, , \rangle$ induce un isomorfismo

$\boxed{\text{isomorfismi musicali} \equiv \text{raising - lowering}}$

$$V \cong V^*$$ tramite

bemolle

$$v \xmapsto{\flat} \langle v, \cdot \rangle \equiv v^\flat$$

$$(\flat^{-1} = \underset{\text{diesis}}{\#} : V^* \to V)$$

$\boxed{\text{cf. la notazione di Dirac !}}$

Se $\langle \, , \rangle$ è rappresentato da (g_{ij})

matrice simm. def. positiva

$$\begin{array}{ccc} V^* & & V \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v_i & := & g_{ij} v^j \end{array}$$

indice in basso $\equiv \flat$

Convenzione di Einstein: sommo sugli indici ripetuti

$\boxed{g_{ij}} \, \boxed{} \, v^j$

produco un vettore che leggo come funzionale $\|$

$$\langle v, w \rangle \equiv g_{ij} v^i w^j$$

$$\|v\|^2 = g_{ij} v^i v^j$$

$$(v^j) \xmapsto{\flat} (g_{ij} v^j) \equiv (v_i)$$

$$(v_i) \xmapsto{\#} g^{ij} v_j \equiv (v^i)$$

$$(g^{ij}) = G^{-1}$$

ove $G = (g_{ij})$

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

inoltre:

$$V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Canonico}}}{\cong} V^{**}$$

$$V \ni x \longmapsto x^{**} \in V^{**}$$

$x^{**} : \underset{\substack{\Psi \\ v^*}}{V^*} \longrightarrow K$ ed è definito così:

$$x^{**}(v^*) := v^*(x)$$

$$\overbrace{V^* \otimes V^* \cdots V^*}^{q} \otimes \overbrace{V \otimes \cdots V}^{p}$$

$$\left\{ T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \right\}$$

appl. multilineari da

$$\underbrace{V \times \cdots V}_{q} \times \underbrace{V^* \times \cdots V^*}_{p} \to \mathbb{R}$$

$\star$ Tensori (p, q)

p volte controvarianti

q volte covarianti

Es. (g_{ij}) tipo $(0,2)$

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((v^i), (w^j)) \longmapsto g_{ij} v^i w^j$$

(v^i) tipo $(1,0)$

(v_i) tipo $(0,1)$

Campi tensoriali: sezioni dei fibrati tensoriali

Come tali, devono avere opportune leggi di trasformazione rispetto ai cambiamenti di coordinate:

$$\tilde{T}^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overbrace{\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}}^{\text{controvarianti}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}$$

Verifichiamolo in dettaglio per il tensore metrico g_{ij}

☆ ☆ esempio concreto: legge di trasformazione di una metrica Riemanniana
(campo tensoriale simmetrico di tipo (0,2))

$y = y(x) \quad x = x(y)$

$$\boxed{\tilde{g}_{ij}(y) = g_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}}$$

si usa la convenzione di Einstein

ancora più schematicamente: $\tilde{g}_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}$ ← si somma su k e l

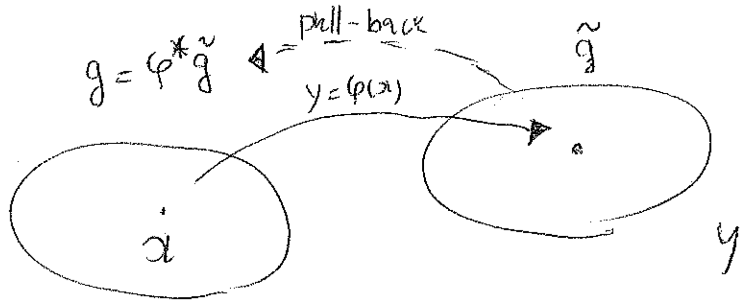
Perché? ds^2 deve essere invariante rispetto ad un cambiamento di coordinate qualsiasi
[Cf il principio di covarianza generale in teoria della relatività generale (Einstein)]

$$\left(ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \right)$$

Deve essere dunque

$$\tilde{g}_{ij}dy^i dy^j = g_{kl}dx^k dx^l$$

indici muti ↑ indici muti



Vediamo:

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij}\, dy^i dy^j = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \underbrace{\frac{\partial y^i}{\partial x^m} dx^m}_{dy^i} \underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial x^n} dx^n}_{dy^j}$$

m e n muti.

$$= g_{kl} \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^m}}_{\frac{\partial x^k}{\partial x^m} = \delta^k_m} \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^n}}_{\delta^l_n} dx^m dx^n$$

$$= g_{kl}\, dx^k dx^l \qquad \square$$

È chiaro come si opera in generale: es.

$$\tilde{T}^{i}_{jk} = T^{l}_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

(1, 2)

$$\tilde{T}^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \cdot \underbrace{\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}}_{\text{contravarianza}} \cdot \underbrace{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}}_{\text{covarianza}}$$

(p, q)

Trasporto parallelo e derivata covariante (più connessioni affini)

[v. Amari–Nagaoka Methods of Information Theory AMS – 2000]

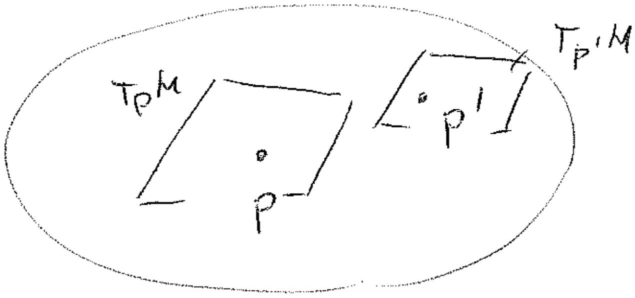
Approccio: classico – moderno

classico ↓ linguaggio formale degli infinitesimi

moderno ↓ terminologia

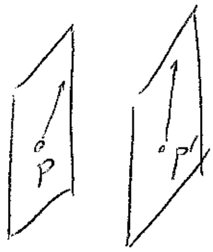
Concetto di connessione

(ξ^i) sist. di coordinate



M

$$d\xi^i := \xi^i(p') - \xi^i(p)$$



vogliamo costruire:
("trasporto parallelo infinitesimo" $\equiv$ connessione affine)

$$\Pi_{p,p'} : T_pM \longrightarrow T_{p'}M \qquad \text{lineare}$$

non c'è nessun modo "canonico" di farlo

vogliamo però:

$$\Pi_{pp'}(e_j|_p) = e_j|_{p'} - d\xi^i\, \Gamma^k_{ij}(p)\, e_k|_p \qquad \Gamma^k_{ij} \in C^\infty$$

$$e_j|_p = \partial_j = \partial_{\xi^j}, \qquad e_j|_{p'} = \partial_j$$

Γ^k_{ij}: simboli di Christoffel (generalizzati)

Vogliamo che tutto sia intrinsecamente definito

i.e non dipenda dal sistema di coordinate

impiegato
Sia dato un altro sistema: $(\eta^1 \dots \eta^n)$

Sia

$$\tilde{\partial}_r = \frac{\partial}{\partial \eta^r} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^r}$$

In virtù della linearità

$$\Pi_{pp'}\left(\tilde{\partial}_r\big|_p\right) = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}(p)\left\{\partial_j\big|_{p'} - d\xi^i \Gamma^k_{ij}(p)\,\partial_k\big|_{p'}\right\}$$

ma

$$\left.\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}\right|_{p'} = \left.\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}\right|_p + \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial \eta^r \partial \eta^s}(p)\, d\eta^r$$

e

$$d\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^r}(p)\, d\eta^r \qquad d\eta^r = \eta^r(p') - \eta^r(p)$$

si trova subito

$$\Pi_{pp'}\left(\tilde{\partial}_s\big|_p\right) = \tilde{\partial}_s\big|_{p'} - d\eta^r \cdot \Gamma^t_{rs}(p) \cdot \tilde{\partial}_t\big|_{p'}$$

stessa forma dell'altra, ponendo

(*) $$\hat{\Gamma}^t_{rs} = \left\{ \Gamma^k_{ij} \frac{\partial\xi^i}{\partial\eta^r}\frac{\partial\xi^j}{\partial\eta^s} + \underbrace{\frac{\partial^2\xi^k}{\partial\eta^r\partial\eta^s}}\right\}\frac{\partial\eta^t}{\partial\xi^k}$$

questo non dovrebbe esserci

⚠ Le Γ^k_{ij} <u>non</u> formiscono un tensore.

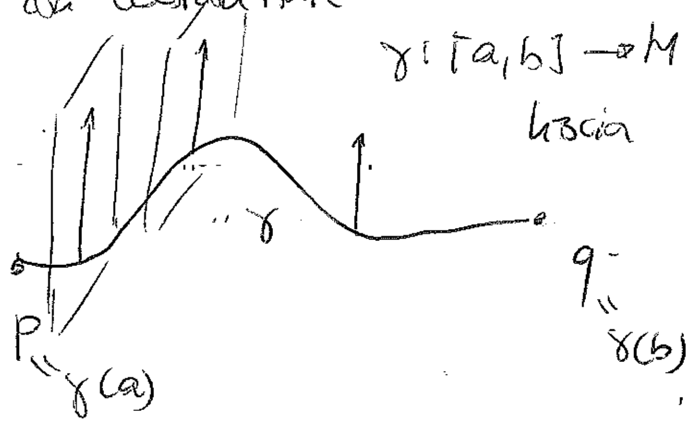
Dunque, una connessione affine è specificata dalle Γ^i_{jk}, soggette a (*) relativamente ad un cambiamento di coordinate

$\gamma : [a,b] \to M$ liscia

Sia ora

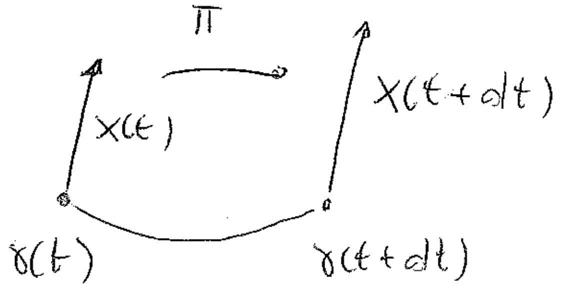
$X : t \mapsto X(t)$

un campo vettoriale (liscio) lungo γ



Esso si dice <u>parallelo</u> lungo γ se

$$X(t+dt) = \Pi_{\gamma(t),\,\gamma(t+dt)} X(t)$$



i.e. il valore di X in un pto prossimo della curva è quello specificato dalla connessione in coordinate

$$\Pi_{\gamma(t),\,\gamma(t+dt)} X(t) = \left\{ X^k(t) - dt \cdot \dot\gamma^i(t)\, X^j(t)\, \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) \right\} \cdot (\partial_k)_{\gamma(t+dt)}$$

ma $\quad X(t+dt) = X^i(t+dt)\, \partial_i \big|_{\gamma(t+dt)}$

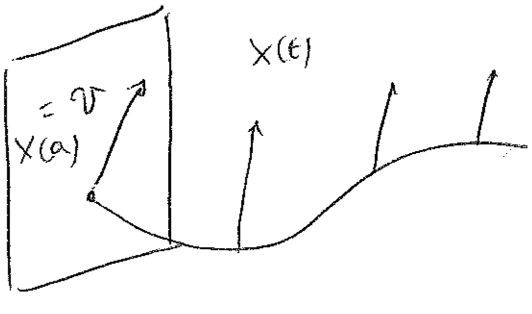
$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot X^k(t) + \dot\gamma^i(t)\, X^j(t)\, \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0}$$

$$\boxed{\dot X^k + \Gamma^k_{ij}\, \dot\gamma^i X^j = 0}$$

eq. diff. lineare del prim'ordine

$\Rightarrow$ per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz, dato $v = X(a)$,

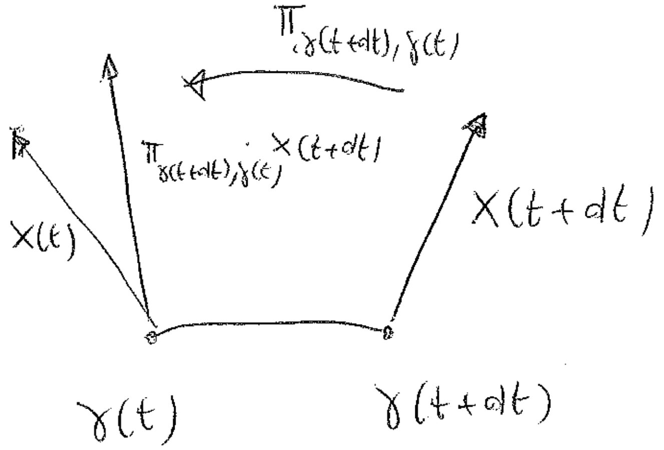
$\exists!$ $X(t)$ parallelo lungo γ con $X(a) = v$



★ trasporto parallelo di un vettore lungo una curva possiamo a questo punto definire la derivata covariante $\frac{\nabla X}{dt}(t)$

$$\nabla X(t) = \left(\Pi_{\gamma(t+dt),\gamma(t)} X(t+dt) \right) - X(t))$$

(derivata ordinaria: $dX(t) = X(t+dt) - X(t)$



in coordinate:

$$\frac{\nabla X(t)}{dt} = \left\{ \dot{X}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(\dot{\gamma}^i(t)) X^j(t) \right\} \partial_k \Big|_{\gamma(t)}$$

vettore parallelo $\equiv \frac{\nabla}{dt} X \equiv 0$ derivata covariante nulla lungo γ

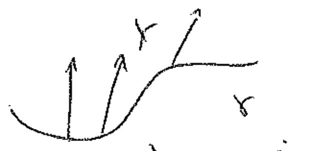
$$\boxed{\dot{X}^k(t) + \Gamma^k_{ij} \dot{\gamma}^i X^j = 0}$$

***

(geodetiche di una varietà Riemanniana: curve auto parallele:

$$\boxed{\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0})$$

Si può definire allora con la stessa formula

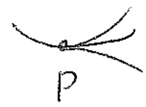


$X = x^i \partial_i$ lungo γ

$$(\nabla_X Y)_{\gamma(t)}$$

derivata covariante di Y (def. su γ) lungo X (pure definito su γ)

e, ponendo



$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{X_p} Y$$

la derivata covariante di Y rispetto a X tout-court

$$\nabla_X Y = X^i \{ \partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j \} \partial_k$$

se $X = \partial_i \quad Y = \partial_j$

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$$

complessivamente

$\nabla : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$

$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$

Astraiamo:

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_X (f Y) = \underset{\overset{\parallel}{df(X)}}{X(f)}\, Y + f \nabla_X Y$: Leibniz

(iv) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$