

IL TEOREMA DI STOKES

ANTONIO MARIGONDA

SOMMARIO. In queste note vengono presentati alcuni elementi di analisi vettoriale, tra cui i classici teoremi della divergenza e di Stokes. L'approccio è basato essenzialmente sui campi vettoriali. Non si fa cenno allo studio delle varietà differenziali e pochissimo viene detto sulle forme differenziali. Molti concetti vengono definiti in modo intuitivo, se ciò da un lato agevola la presentazione, dall'altro deve costituire il primo passo per un approfondimento degli stessi in modo più rigoroso. I prerequisiti sono Algebra lineare, Analisi 1 e il primo modulo di Analisi 2. Alla luce delle precedenti considerazioni, queste brevi note non sono intese per sostituire uno studio sistematico sui manuali, bensì vogliono solo costituire un supporto mnemonico per studenti. Si prega di segnalare eventuali errori e imprecisioni.

Versione del 3 dicembre 2009.

1. CAMPI VETTORIALI E CAMPI SCALARI

Richiamiamo i seguenti risultati:

Teorema 1.1 (di Dini o della Funzione Implicita). *Siano X, Y, Z spazi di Banach, sia D aperto in $X \times Y$, $(x_0, y_0) \in D$, $f : D \rightarrow Z$ funzione continua con $f(x_0, y_0) = 0$. Si supponga inoltre che $\partial_Y f(x, y)$, ovvero il differenziale fatto solo rispetto alle variabili y , esista continuo in D e che $\partial_Y f(x_0, y_0)$ sia isomorfismo di Y su Z . Esistono allora un intorno U di x_0 in X , un intorno V di y_0 in Y e $\varphi : U \rightarrow V$ continua tali che*

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}.$$

Se poi f è differenziabile in (x_0, y_0) allora φ è differenziabile in x_0 e si ha:

$$D\varphi(x_0) = -(\partial_Y f(x_0, y_0))^{-1} \circ \partial_X f(x_0, y_0).$$

Osservazione 1. Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^k$, $Y = Z = \mathbb{R}^d$, la condizione che $\partial_Y f(x_0, y_0)$ sia isomorfismo di Y su Z si esprime dicendo che il determinante della matrice jacobiana rispetto alle sole variabili y sia non nullo.

Teorema 1.2 (della Funzione Inversa). *Siano X, Y spazi di Banach, D aperto di X , $f : D \rightarrow Y$ funzione di classe C^1 . Sia $x_0 \in D$ tale che $Df(x_0)$ sia isomorfismo di X su Y (nel caso di dimensione finita ciò equivale a dire $\det \text{Jac } f(x_0) \neq 0$). Allora esistono intorni aperti U di x_0 , V di $y_0 = f(x_0)$ tali che f induca un omeomorfismo di U su V . Detta g l'inversa di $f|_U$, $g \in C^1(V, U)$ e $g'(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$ (ovvero il differenziale dell'inversa è l'inverso del differenziale).*

Definizione 1.1. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , un *campo vettoriale* su Ω è una funzione $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'insieme dei campi vettoriali su \mathbb{R} costituisce uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Un *campo scalare* su Ω è una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'insieme dei campi scalari su \mathbb{R} costituisce uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Nei casi di dimensione 2 o 3 si usa una rappresentazione grafica di un campo vettoriale \vec{F} disegnando per ogni $x \in \Omega$ il vettore $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^3$ applicato ad x .

Esempio 1. Una delle interpretazioni che daremo del campo vettoriale è la seguente: supponiamo di avere un fluido costituito da particelle che occupi una certa regione dello spazio D . Allora se $x_0 \in D$, $\vec{F}(x_0)$ è la velocità (vettoriale) della particella P che al tempo $t = 0$ si trovi a transitare per il punto x_0 . In altre parole, la traiettoria della particella P è data da $\dot{x}(t) = \vec{F}(x(t))$, $x(0) = x_0$.

Ci poniamo il problema di studiare come si trasformino le componenti di un campo vettoriale passando da un sistema di coordinate ad un altro. Per semplicità supponiamo $D = \mathbb{R}^n$. Data una particella P , indichiamo con $x(0) = x_0$ e $x(T)$ la sua posizione rispettivamente al tempo $t = 0$ e al tempo $t = T$. La velocità (istantanea) iniziale in questo sistema di riferimento è data proprio da

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{x(T) - x(0)}{t} = \dot{x}(0) = \vec{F}(x(0)) = \vec{F}(x_0).$$

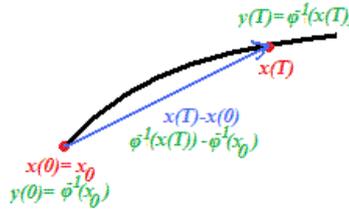


FIGURA 1. Traiettoria nei due sistemi di riferimento.

Applichiamo al sistema una trasformazione di coordinate $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. In questo sistema di coordinate, la posizione iniziale della particella è data da $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ e quella finale da $\varphi^{-1}(x(T))$, quindi nel nuovo sistema di riferimento, la velocità (istantanea) iniziale è data da:

$$\vec{G}(y_0) = \lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{-1}(x(T)) - \varphi^{-1}(x_0)}{t} = \text{Jac } \varphi^{-1}(\varphi(y_0)) \vec{F}(\varphi(y_0)).$$

da cui per il Teorema della Funzione Inversa si ha:

$$\vec{G}(y_0) = [\text{Jac } \varphi(y_0)]^{-1} \vec{F} \circ \varphi(y_0),$$

pertanto sotto l'azione del cambiamento di coordinate, il campo \vec{F} si trasforma nel campo \vec{G} secondo questa formula.

*Per ottenere la corretta trasformazione delle componenti di un campo vettoriale sotto un cambiamento di coordinate, **non basta applicare la formula di trasformazione ai soli argomenti!***

Esempio 2. Supponiamo di avere i campi in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ descritto da $\vec{F}_1(x, y) = (x, y)$ e $\vec{F}_2(x, y) = (-y, x)$.

Definiamo il cambiamento di coordinate $\varphi : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ ponendo $x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$, $y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$. Si ha:

$$\text{Jac } \varphi(\rho, \theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

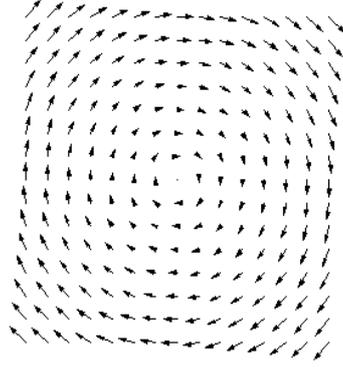


FIGURA 2. Il campo \vec{F}_2 .

da cui

$$[\text{Jac } \varphi(\rho, \theta)]^{-1} := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \frac{1}{\rho} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dato un punto (ρ, θ) si ha:

$$\vec{G}_1(\rho, \theta) = [\text{Jac } \varphi(\rho, \theta)]^{-1} \vec{F}_1 \circ \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta, -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta) = (\rho, 0),$$

$$\vec{G}_2(\rho, \theta) = [\text{Jac } \varphi(\rho, \theta)]^{-1} \vec{F}_2 \circ \varphi(\rho, \theta) = (-\rho \sin \cos \theta + \rho \sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (0, 1).$$

\vec{F}_1 e \vec{G}_1 rappresentano la velocità di un corpo che si allontana radialmente dall'origine con velocità esponenzialmente crescente, infatti in questo caso si ha $(\dot{\rho}(t), \dot{\theta}(t)) = (\rho, 0)$, quindi $\rho(t) = \rho_0 e^t$ e $\theta(t) \equiv \theta_0$.

\vec{F}_2 e \vec{G}_2 rappresentano la velocità di un corpo che da un punto iniziale $(x_0, y_0) = (\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0)$ ruota attorno all'origine con velocità angolare costante, infatti in questo caso si ha $(\dot{\rho}(t), \dot{\theta}(t)) = (0, 1)$, quindi $\rho(t) \equiv \rho_0$ e $\theta(t) = \theta_0 + t$.

Motivati dalle considerazioni precedenti, per operare dei cambiamenti di variabile in un campo vettoriale introduciamo le seguenti nozioni:

Definizione 1.2. Siano D, Ω aperti di \mathbb{R}^n , \vec{F} campo vettoriale su D , $\varphi : \Omega \rightarrow D$ un diffeomorfismo locale di classe C^ℓ . Definiamo il *pull back* di \vec{F} mediante φ . Esso è il campo vettoriale ${}^*\varphi\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ su Ω definito da

$${}^*\varphi\vec{F}(y) = [\text{Jac } \varphi(y)]^{-1} \vec{F} \circ \varphi(y)$$

per ogni $y \in \Omega$.

Se invece $\psi : D \rightarrow \Omega$ è diffeomorfismo, definiamo l'*immagine diretta* o *push forward* di \vec{F} mediante ψ . Esso è il campo vettoriale $\psi_*\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ su Ω definito come ${}^*\psi^{-1}\vec{F}$, ovvero: da

$$\psi_*\vec{F}(y) = [\text{Jac } \psi(\psi^{-1}(y))] \vec{F} \circ \psi^{-1}(y)$$

per ogni $y \in \Omega$.

Se $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una campo scalare, il suo pull-back ${}^*\varphi u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è definito da ${}^*\varphi u(y) = u \circ \varphi(y)$ e se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è un campo scalare, il suo push-forward sarà dato da $\psi_* f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $\psi_* f(x) = f \circ \psi^{-1}(x)$.

Definiamo ora alcune operazioni tra campi vettoriali e campi scalari.

Definizione 1.3. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n . L'insieme dei campi vettoriali su Ω è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} : la somma di due campi vettoriali è definita componente per componente e il prodotto per gli scalari di \mathbb{R} agisce moltiplicando tutte le componenti. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$, $\vec{G} = (G_1, \dots, G_n)$ sono campi vettoriali su Ω , si ha:

$$(\alpha\vec{F} + \beta\vec{G})(x_1, \dots, x_n) = (\alpha F_1(x_1, \dots, x_n) + \beta G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha F_n(x_1, \dots, x_n) + \beta G_n(x_1, \dots, x_n))$$

Analogamente, i campi scalari su Ω definiscono un anello commutativo con unità. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono campi scalari, si ha:

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta w)(x_1, \dots, x_n) &= \alpha u(x_1, \dots, x_n) + \beta w(x_1, \dots, x_n), \\ (uw)(x_1, \dots, x_n) &= u(x_1, \dots, x_n) w(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

L'unità dell'anello è $u(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$.

È possibile moltiplicare un campo scalare u per un campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ ottenendo un campo vettoriale:

$$(u \cdot \vec{F})(x_1, \dots, x_n) = (u(x_1, \dots, x_n)F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u(x_1, \dots, x_n)F_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Il *prodotto scalare* di due campi vettoriali $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ e $\vec{G} = (G_1, \dots, G_n)$ è il campo scalare definito puntualmente da:

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, \dots, x_n) G_i(x_1, \dots, x_n).$$

Definizione 1.4. Sia $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^1 . È noto dai corsi precedenti di Analisi che il *differenziale* $du(x)$ di u calcolato in un punto $x \in D$ è una mappa lineare da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . Pertanto du è una mappa che ad ogni punto di D associa una mappa lineare da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . In altre parole, si ha che $du : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dove con $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ si indica l'insieme delle funzioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . Scelta una base ortonormale di \mathbb{R}^n , che indicheremo con $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, essa induce una base $\{d_1, \dots, d_n\}$ di $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ per dualità nel modo seguente: ciascun d_i , appartenendo a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, è una funzione che prende un vettore di \mathbb{R}^n e restituisce un numero reale. In particolare ciascun d_i è completamente caratterizzato dai valori assunti sugli elementi della base di \mathbb{R}^n . Definiamo quindi $d_i(\partial_j) = 0$ se $i \neq j$ e $d_i(\partial_i) = 1$ per $i = 1 \dots n$. Questa costruzione permette di identificare elementi di $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con vettori di \mathbb{R}^n , pertanto al differenziale $Du : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ viene associato un campo vettoriale che indicheremo con $\text{grad } u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e chiameremo il *gradiente* di u . In coordinate, si ha:

$$\text{grad } u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right).$$

Se $h \in \mathbb{R}^n$ è un vettore di \mathbb{R}^n , l'azione della forma $du(x)$ su h sarà quindi

$$du(x)h = \text{grad } u \cdot h.$$

dove a destra vi è l'usuale prodotto scalare tra vettori di \mathbb{R}^n e a sinistra vi è l'azione della funzione lineare $du(x)$ sul suo argomento h

Definizione 1.5. Sia \vec{F} un campo vettoriale di classe C^ℓ su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Definiamo un campo scalare su Ω di classe $C^{\ell-1}$ che prende il nome di *divergenza* di \vec{F} . Scelto un sistema di

coordinate ortonormali $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ su \mathbb{R}^n tale che $x = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, esso è definito da:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i}.$$

Un campo a divergenza nulla viene chiamato anche *solenoidale*.

Definizione 1.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^ℓ , $\ell \geq 2$. Definiamo per composizione un campo scalare $C^{\ell-2}$ che prenderà il nome di *laplaciano* di u :

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).$$

Definizione 1.7. Allo scopo di semplificare la notazione, introduciamo il seguente operatore (*nabla*):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Pertanto dato un campo scalare u , si avrà $\operatorname{grad} u = \nabla u$ e dato un campo vettoriale \vec{F} , per indicare la divergenza si avrà il prodotto scalare formale $\nabla \cdot \vec{F}$. In particolare si ha per il laplaciano $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u$.

Definizione 1.8. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^3 , e indichiamo con $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 . Sia $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe almeno C^1 . Indichiamo con $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ le componenti di \vec{F} rispetto alla base scelta.

Definiamo il *rotore* di \vec{F} come il prodotto vettoriale formale $\nabla \times \vec{F}$ in \mathbb{R}^3 , ovvero

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \vec{F}_1 \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \vec{F}_2 \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \vec{F}_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_2} \right).$$

Si ha quindi che $\operatorname{rot} \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale le cui componenti sono:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_2} \right).$$

Nei testi anglosassoni, il rotore è spesso indicato con l'abbreviazione *curl*. Un campo con rotore nullo viene chiamato *irrotazionale*.

Diamo alcuni esempi per chiarire il significato degli operatori precedentemente introdotti.

Esempio 3 (il gradiente). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^1 e $x \in \Omega$. Ci poniamo il seguente problema: *in quale direzione, partendo da x , il campo cresce più velocemente?* Naturalmente questa espressione deve essere formalizzata e interpretata in modo corretto: il campo potrebbe non crescere in nessuna direzione, ad esempio se è costante in un intorno di x oppure, meno banalmente, se u ha un massimo relativo in x , e poi bisogna capire cosa si intenda per *più velocemente*. Per formalizzare la questione posta, procediamo considerando un punto y in un intorno di x . Scrivemo $y = x + th$ dove $h = \frac{y-x}{|y-x|}$ è un versore di \mathbb{R}^n , e $t > 0$ è la distanza di y da x . La variazione di u in direzione h sarà data da

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + th) - u(x)}{t} = \frac{\partial u}{\partial h}(x)$$

ovvero la derivata di u nella direzione h in x . Poiché la funzione è differenziabile in x , si ha che

$$\frac{\partial u}{\partial h}(x) = df(x)h$$

dove con $df(x)h$ si indica il numero reale risultato dell'applicazione della funzione lineare $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ al vettore h . Per la definizione data di gradiente, si ha quindi:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + th) - u(x)}{t} = \nabla u(x) \cdot h.$$

Se per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| = 1$, l'espressione precedente è nulla, non c'è altro da dire: il differenziale è nullo in x , quindi il gradiente è nullo. Supponiamo che ci sia almeno un versore h per cui l'espressione precedente è diversa da 0. Se c'è un versore h per cui tale espressione è strettamente positiva (ovvero una direzione in cui la funzione effettivamente cresca al prim'ordine), ci proponiamo di caratterizzare il versore \bar{h} in cui essa è massima, ovvero la direzione di massima crescita di u a partire da x . È noto che il prodotto scalare tra due vettori è massimo se essi hanno la stessa direzione, pertanto se:

$$\nabla u \cdot \bar{h} = \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + th) - u(x)}{t} : h \in \mathbb{R}^n, |h| = 1 \right\},$$

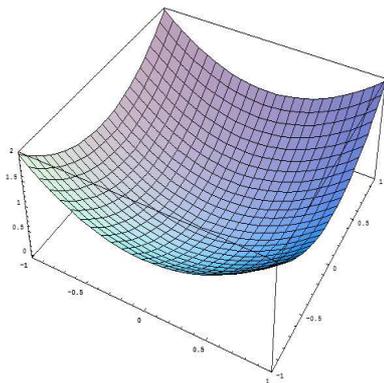
si dovrà avere necessariamente

$$h = \frac{\text{grad } u(x)}{|\text{grad } u(x)|}.$$

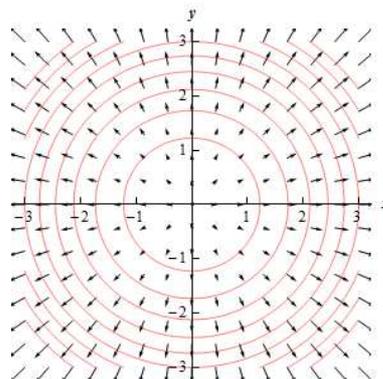
Pertanto se c'è almeno una direzione in cui la funzione cresce al prim'ordine, la direzione in cui cresce più rapidamente è quella del gradiente. Se in tutte le direzioni h si ha $\nabla u \cdot h \leq 0$ ed esiste almeno una direzione h per la quale il prodotto scalare è strettamente negativo, definendo $f = -u$ e applicando il precedente, otteniamo che la direzione in cui la funzione decresce più rapidamente al prim'ordine è data da $-\nabla u$.

Intuitivamente, il gradiente è la direzione di massima pendenza del grafico di u .

Esempio 4. Rappresentiamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ e il campo vettoriale $\nabla f(x, y)$.



La funzione f .



Il campo ∇f e alcune superfici $f(x, y) = c$.

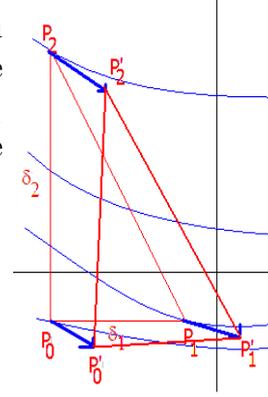
Esempio 5 (la divergenza). Per dare un'idea del significato della divergenza ricorriamo al seguente esempio in \mathbb{R}^2 . Supponiamo che sia assegnato un campo $\vec{F} = (F_1, F_2)$ in \mathbb{R}^2 che rappresenti, punto per punto, le velocità di un fluido. Fissato un tempo iniziale $t = 0$, due costanti $\delta_1, \delta_2 > 0$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, andiamo a considerare le particelle ai vertici del triangolo rettangolo $P_0, P_1 = (x_0 + \delta_1, y_0), P_2 = (x_0, y_0 + \delta_2)$. L'area di tale triangolo è $A = \delta_1 \delta_2 / 2$.

Lasciamo trascorrere un tempo $\varepsilon > 0$. Le tre particelle del fluido si muoveranno nelle direzioni di \vec{F} (flusso dell'equazione differenziale $\dot{x} = \vec{F}(x)$ con condizioni iniziali $x(0) = P_0$ per la prima, $x(0) = P_1$ per la seconda e $x(0) = P_2$ per la terza). Se ε è sufficientemente piccolo, possiamo utilizzare la formula di Taylor per dire che

$$x(\varepsilon) \approx x(0) + \varepsilon \vec{F}(x(0)),$$

e quindi le tre particelle occuperanno la posizione:

$$\begin{aligned} P'_0 &= (x_0 + \varepsilon F_1(x_0), y_0 + \varepsilon F_2(x_0)) \\ P'_1 &= (x_0 + \delta_1 + \varepsilon F_1(x_0 + \delta_1), y_0 + \varepsilon F_2(x_0)) \\ P'_3 &= (x_0 + \varepsilon F_1(x_0), y_0 + \delta_2 + \varepsilon F_2(x_0 + \delta_2)). \end{aligned}$$



L'area A' di questo triangolo rettangolo è data da:

$$A' = \frac{1}{2}(\delta_1 + \varepsilon F_1(x_0 + \delta_1) - \varepsilon F_1(0)) \cdot (\delta_2 + \varepsilon F_2(y_0 + \delta_2) - \varepsilon F_2(0)).$$

Se δ_1 e δ_2 sono sufficientemente piccoli, grazie alla formula di Taylor abbiamo:

$$F_1(x_0 + \delta_1) - F_1(x_0) \approx \delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0), \quad F_2(y_0 + \delta_2) - F_2(y_0) \approx \delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}(y_0).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} A' &\approx \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \varepsilon \delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0) \right) \cdot \left(\delta_2 + \varepsilon \delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}(y_0) \right) = \frac{\delta_1 \delta_2}{2} \cdot \left(1 + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0) \right) \cdot \left(1 + \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial y}(y_0) \right) \\ &= A \cdot \left(1 + \varepsilon \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0) + \varepsilon^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y}(y_0) \right) \end{aligned}$$

Trascurando il termine piccolo in ε^2 , otteniamo che:

$$\frac{A' - A}{\varepsilon} \approx \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0),$$

ovvero la divergenza di \vec{F} porge una misura della variazione dell'area nell'unità di tempo del triangolo costituito da tre particelle vicine che evolvano secondo il campo di velocità \vec{F} .

Esempio 6 (il rotore). Siano dati $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Supponiamo di avere una sfera di raggio δ con centro vincolato in x_0 . Indichiamo con $q(t)$ la posizione di un punto della superficie. Poiché la sfera è rigida, la distanza di $q(t)$ dal centro rimane costante e pari a δ :

$$0 = \frac{d}{dt} |q(t) - x_0|^2 = 2\dot{q}(t)(q(t) - x_0).$$

Questo implica che in ogni istante la velocità di un punto della superficie sferica sia ortogonale alla normale alla sfera. Si ha quindi che esiste un unico vettore $\vec{\omega}$ tale che

$$v = \dot{q} = \vec{\omega} \times (q - x_0).$$

Per t fissato, $\vec{\omega}(t)$ prende il nome di asse istantaneo di rotazione e $|\vec{\omega}|$ è detta velocità angolare. Ricordando che $v(x_0) = 0$, si ha:

$$v(q) - v(x_0) = \vec{\omega}(t) \times (q - x_0) \approx Jv(x_0)(q - x_0).$$

Scegliendo q in modo opportuno, ovvero tale che $q - x_0 = \delta \vec{e}_i$, si ottiene per $i = 1, 2, 3$

$$(\partial_i v_1, \partial_i v_2, \partial_i v_3) = \vec{\omega} \times \vec{e}_i,$$

da cui, per calcolo diretto, si ricava $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

Riassumendo, il rotore in un punto misura la tendenza del campo a far ruotare attorno a quel punto un corpo rigido.

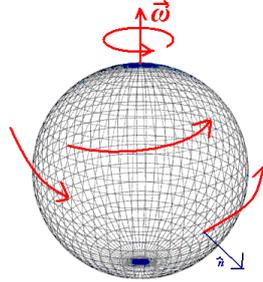


FIGURA 3. Il rotore

Si verifica immediatamente che gradiente, divergenza, rotore e laplaciano sono operatori lineari.

Proposizione 1.1. *Siano \vec{F}, \vec{G} campi vettoriali, u campo scalare. Sussistono le seguenti formule:*

$$\begin{aligned}\text{div}(u\vec{F}) &= \nabla u \cdot \vec{F} + u \text{div } \vec{F} \\ \nabla \times (u\vec{F}) &= (\nabla u) \times \vec{F} + u(\nabla \times \vec{F}) \\ \text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G} \\ \text{div rot } \vec{F} &= 0 \\ \text{rot grad } u &= 0\end{aligned}$$

Studiamo ora il comportamento di gradiente, rotore e divergenza in differenti sistemi di coordinate.

Definizione 1.9. Sia $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Definiamo la seguente funzione:

$$\arg(x, y) := \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{se } x > 0, y > 0. \\ 2\pi + \arctan(y/x) & \text{se } x > 0, y < 0. \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{se } x < 0. \\ \pi/2 & \text{se } x = 0, y > 0. \\ 3\pi/2 & \text{se } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $\arg : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow [0, 2\pi[$ e che $\cos(\arg(x, y)) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin(\arg(x, y)) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$.

Definizione 1.10. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo. Gli n campi vettoriali \vec{e}_i costanti, definiti su D da $\vec{e}_i(x) = (0 \dots 1 \dots 0)$ con l'unica componente non nulla nella posizione i , definiscono mediante push forward n campi vettoriali $\vec{d}_i = \psi_* \vec{e}_i$ su \mathbb{R}^n : si pone per $y \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{d}_i(y) = \psi_* \vec{e}_i(y) = [\text{Jac } \psi(\psi^{-1}(y))] \vec{e}_i \circ \psi(y)$$

ovvero, ricordando la definizione di \vec{d}_i , $\psi_*\vec{e}_i(\psi(x))$ non è altro che la i -esima colonna della matrice $\text{Jac } \psi(x)$. I vettori $\{\vec{d}_i(y) : i = 1 \dots n\}$ formano una base di \mathbb{R}^n , perché tale matrice ha determinante non nullo dal momento che φ è diffeomorfismo. Notiamo che tale base, a differenza delle coordinate cartesiane *dipende* dal punto y .

Si dirà che ψ induce un sistema di *coordinate curvilinee* e diremo che le nuove coordinate sono *ortogonali* se per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ i vettori $\{\vec{d}_i(y) : i = 1, \dots, n\}$ sono due a due ortogonali. Supponiamo che ψ induca un sistema di coordinate curvilinee ortogonali. Poniamo

$$\lambda_i = |\psi_*\vec{e}_i(\psi^{-1}(x))| = |\vec{d}_i|.$$

Detti $(a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ gli elementi di $\text{Jac } \psi$, definiamo la nuova matrice T ponendo $T = (t_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ dove $t_{ij} = a_{ij}/\lambda_j$. La matrice T è ortogonale, ovvero $\sum_i t_{ij}t_{ik} = 1$ se $j = k$ e 0 altrimenti. Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Definiamo il *gradiente nel sistema di coordinate curvilinee ortogonali* ψ come il campo vettoriale $\nabla_\psi f$ definito su D tale per cui valga la seguente relazione per ogni $i = 1 \dots n$:

$$\nabla(\psi_*f)(y) \cdot \frac{\psi_*\vec{e}_i}{|\psi_*\vec{e}_i|}(y) \Big|_{y=\psi(x)} = \nabla_\psi f(x) \cdot \vec{e}_i \Big|_{x=\psi^{-1}(y)}$$

Esplicitiamo la i -esima componente di $\nabla_\psi f(x)$, detto $y = \psi(x)$:

$$\begin{aligned} \nabla(\psi_*f)(y) \cdot \frac{\psi_*\vec{e}_i}{|\psi_*\vec{e}_i|} &= \frac{1}{|\psi_*\vec{e}_i(y)|} d(f \circ \psi^{-1})(y) \psi_*\vec{e}_i(y) \\ &= \frac{1}{|\psi_*\vec{e}_i(\psi^{-1}(x))|} \left(\text{Jac } f(x) [\text{Jac } \psi^{-1}(y)] \right) \left([\text{Jac } \psi(x)] \vec{F}(x) \right) \\ &= \frac{1}{|\psi_*\vec{e}_i(\psi^{-1}(x))|} \left(\text{Jac } f(x) \vec{e}_i(x) \right) = \frac{1}{|\psi_*\vec{e}_i(\psi^{-1}(x))|} \partial_i f(x). \end{aligned}$$

Formalmente, se $x \in D$ ha coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, abbiamo quindi la relazione:

$$\nabla_\psi = \left(\frac{1}{|\psi_*\vec{e}_1(\psi^{-1}(x))|} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{|\psi_*\vec{e}_n(\psi^{-1}(x))|} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{1}{\lambda_1} \partial_{x_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \partial_{x_n} \right) = \sum_i \frac{\vec{d}_i(x)}{|\vec{d}_i(x)|} \frac{1}{\lambda_i} \partial_{x_i},$$

e notiamo come tale espressione di ∇_ψ *dipenda* da x , mentre ∇ era *indipendente* dal punto. In coordinate cartesiane, dalla definizione di T , si ottiene per la j -esima componente di ∇_ψ la seguente rappresentazione:

$$\nabla_j = \sum_{i=1}^n t_{ji} \frac{1}{\lambda_i} \partial_{x_i}.$$

Supponiamo ora che \vec{F} sia campo vettoriale su D e vogliamo definire la *divergenza nelle coordinate curvilinee ortogonali* ψ . Posto $\vec{f} = \psi_*\vec{F}$, si ha per le componenti di \vec{f} ($y = \psi(x)$):

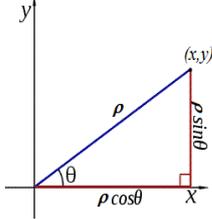
$$f_j(\psi(x)) = \sum_{k=1}^n (\lambda_j t_{jk} F_k)(x).$$

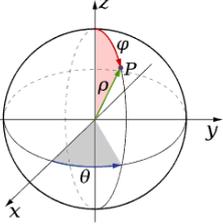
Si ha allora:

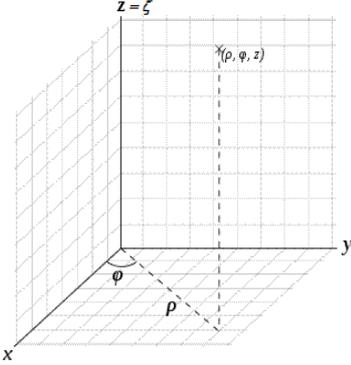
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_\psi \vec{F} &:= \sum_{j=1}^n \nabla_j f_j = \sum_j \left(\sum_{i=1}^n t_{ji} \frac{1}{\lambda_i} \partial_{x_i} \right) \left(\sum_{k=1}^n (\lambda_j t_{jk} F_k)(x) \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n t_{ji} \partial_{x_i} (t_{jk}(x) F_k(x)) = \sum_{i,j,k=1}^n t_{ji} F_k(x) \partial_{x_i} t_{jk}(x) + \sum_{i,j,k=1}^n t_{ji} t_{jk}(x) \partial_{x_i} F_k(x) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n t_{ji} \partial_{x_i} (t_{jk}(x) F_k(x)) = \sum_{i,j,k=1}^n t_{ji} F_k(x) \partial_{x_i} t_{jk}(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i(x)
\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo è possibile definire per $n = 3$ il *rotore nelle coordinate curvilinee ortogonali* ψ ponendo

$$\operatorname{rot}_\psi \vec{F} = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3) \times (f_1, f_2, f_3).$$

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Nome del sistema di riferimento</p> | <p>Coordinate polari piane</p>  |
| <p>Equazioni della trasformazione</p> | $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad D := [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ $\psi(\rho, \theta) := \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta. \end{cases}$ |
| <p>Jacobiano della trasformazione</p> | $\text{Jac } \psi(\rho, \theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$ |
| <p>Inverso dello Jacobiano</p> | $[\text{Jac } \psi(\rho, \theta)]^{-1} := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \frac{1}{\rho} \cos \theta \end{pmatrix}$ |
| <p>Determinante dello Jacobiano</p> | $\det(\text{Jac } \psi(\rho, \theta)) = \rho$ |
| <p>Trasformazione Inversa</p> | $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow D \setminus (\{0\} \times [0, 2\pi[).$ $\varphi(x, y) := \begin{cases} \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta(x, y) = \arg(y, x). \end{cases}$ |
| <p>Jacobiano dell'inversa</p> | <p>Dal Teorema della Funzione Inversa si ha:</p> $\text{Jac } \varphi(x, y) = [\text{Jac } \psi(\rho, \theta)]^{-1}_{ (\rho, \theta) = \varphi(x, y)}.$ |
| <p>Espressione del gradiente di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nel sistema di riferimento.</p> | $\nabla_{\psi} f(\rho, \theta) := \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta), \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right).$ |
| <p>Espressione della divergenza di $\vec{F} : D \rightarrow D$ nel sistema di riferimento ($\vec{F} = (F_{\rho}, F_{\theta})$)</p> | $\text{div}_{\psi} \vec{F}(\rho, \theta) := \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_{\rho})}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta}(\rho, \theta).$ |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nome del sistema di riferimento | <p style="text-align: center;">Coordinate sferiche</p>  |
| Equazioni della trasformazione | $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D := [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$ $\psi(\rho, \theta, \phi) := \begin{cases} x(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \theta. \end{cases}$ |
| Jacobiano della trasformazione | $\text{Jac}(\psi) := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$ |
| Inverso dello Jacobiano | $[\text{Jac}(\psi)]^{-1} := \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \frac{1}{\rho} \cos \phi \cos \theta & \frac{1}{\rho} \cos \theta \sin \phi & -\frac{\sin \theta}{\rho} \\ -\frac{\sin \phi}{\rho \sin \theta} & \frac{\cos \phi}{\rho \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}$ |
| Determinante dello Jacobiano | $\det(\text{Jac}(\psi)) = \rho^2 \sin \theta$ |
| Trasformazione Inversa | $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus ((0, 0) \times \mathbb{R}) \rightarrow \{(\rho, \theta, \phi) \in D : \rho > 0, \theta \notin \{0, \pi\}\}$ $\varphi(x, y, z) := \begin{cases} \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta(x, y, z) = \arg(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, z) \\ \phi(x, y, z) = \arg(y, x). \end{cases}$ |
| Jacobiano dell'inversa | <p style="text-align: center;">Dal Teorema della Funzione Inversa si ha:</p> $\text{Jac} \varphi(x, y) = [\text{Jac} \psi(\rho, \theta)]^{-1}_{ (\rho, \theta) = \varphi(x, y)}.$ |
| Espressione del gradiente di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nel sistema di riferimento | $\nabla_{\psi} f := \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta, \phi), \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho, \theta, \phi), \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}(\rho, \theta, \phi) \right)$ |
| Espressione della divergenza di $\vec{F} : D \rightarrow D$ nel sistema di riferimento. ($\vec{F} = (F_{\rho}, F_{\theta}, F_{\phi})$) | $\text{div}_{\psi} \vec{F} := \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 F_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi}$ |
| Espressione del rotore di $f : D \rightarrow D$ nel sistema di riferimento. ($\vec{F} = (F_{\rho}, F_{\theta}, F_{\phi})$) | $\text{rot}_{\psi} \vec{F} := \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial(F_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \phi} \right), \right.$ $\left. \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_{\rho}}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho F_{\phi})}{\partial \rho} \right), \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_{\theta})}{\partial \rho} - \frac{\partial F_{\rho}}{\partial \theta} \right) \right)$ |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Nome del sistema di riferimento</p> | <p>Coordinate cilindriche</p>  |
| <p>Equazioni della trasformazione</p> | $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D := [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ $\psi(\rho, \phi, \zeta) := \begin{cases} x(\rho, \phi, \zeta) = \rho \cos \phi \\ y(\rho, \phi, \zeta) = \rho \sin \phi \\ z(\rho, \phi, \zeta) = \zeta \end{cases}$ |
| <p>Jacobiano della trasformazione</p> | $\text{Jac}(\psi) := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| <p>Inverso dello Jacobiano</p> | $[\text{Jac}(\psi)]^{-1} := \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \phi & \frac{1}{\rho} \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ |
| <p>Determinante dello Jacobiano</p> | $\det(\text{Jac}(\psi)) = \rho$ |
| <p>Trasformazione Inversa</p> | $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}) \rightarrow]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ $\varphi(x, y, z) := \begin{cases} \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta(x, y, z) = \arg(y, x), \\ \zeta(x, y, z) = z. \end{cases}$ |
| <p>Jacobiano dell'inversa</p> | <p>Dal Teorema della Funzione Inversa si ha:</p> $\text{Jac} \varphi(x, y) = [\text{Jac} \psi(\rho, \theta)]_{ (\rho, \theta) = \varphi(x, y)}^{-1}.$ |
| <p>Espressione del gradiente di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nel sistema di riferimento.</p> | $\nabla_{\psi} f := \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \phi, \zeta), \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}(\rho, \phi, \zeta), \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\rho, \phi, \zeta) \right)$ |
| <p>Espressione della divergenza di $\vec{F} : D \rightarrow D$ nel sistema di riferimento. ($\vec{F} = (F_{\rho}, F_{\phi}, F_{\zeta})$)</p> | $\text{div}_{\psi} \vec{F} := \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial F_{\zeta}}{\partial \zeta}$ |
| <p>Espressione del rotore di $f : D \rightarrow D$ nel sistema di riferimento. ($\vec{F} = (F_{\rho}, F_{\phi}, F_{\zeta})$)</p> | $\text{rot}_{\psi} \vec{F} := \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{F}_{\zeta}}{\partial \phi} - \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \zeta}, \frac{\partial F_{\rho}}{\partial \zeta} - \frac{\partial F_{\zeta}}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_{\phi})}{\partial \rho} - \frac{\partial F_{\rho}}{\partial \phi} \right) \right)$ |

2. SUPERFICI

In questa sezione daremo alcune nozioni per formalizzare il concetto intuitivo di superficie immersa nello spazio ambiente \mathbb{R}^n . Un'esposizione esaustiva richiede l'introduzione del concetto di varietà differenziale, il lettore interessato è rimandato a [2].

Definizione 2.1. Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto. Una superficie parametrica m -dimensionale è una mappa $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 tale che il rango della matrice Jacobiana di φ sia costante e uguale a m in tutti i punti di Ω .

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ un chiuso. Diremo che Σ è una superficie m -dimensionale parametrizzata se è l'immagine di Ω mediante la parametrizzazione φ , ovvero:

$$\Sigma = \overline{\{\varphi(x_1, \dots, x_m) : (x_1, \dots, x_m) \in \Omega\}}.$$

Se $m = n - 1$ parleremo di *ipersuperficie*.

Un caso particolare di questa definizione è il seguente:

Definizione 2.2. Siano $n \in \mathbb{N}$, e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un aperto. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Il grafico di f

$$\text{graph}(f) := \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega, x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\} = \Sigma$$

è una superficie parametrica detta *ipersuperficie parametrica cartesiana*. la parametrizzazione di Σ è data da $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$. Naturalmente, il ruolo privilegiato della coordinata n -esima in questa definizione può essere assunto da una qualsiasi delle altre coordinate.

Un ulteriore modo per definire un'ipersuperficie è quello di descriverla come insieme di soluzioni di un'equazione:

Definizione 2.3. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n , $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che, posto

$$\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

si abbia $\nabla F(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma$. Diremo che Σ è l'ipersuperficie di equazione $F = 0$.

Osservazione 2. Dato $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \Sigma$, poiché $\nabla F(\bar{x}) \neq 0$, esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) \neq 0.$$

Grazie al Teorema della Funzione Implicita esiste un intorno $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, un intervallo aperto contenente \bar{x}_i e una funzione $f : \Omega' \rightarrow I$ tale per cui

$$\Sigma \cap \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Omega', x_i \in I\} = \text{graph}(f).$$

f si dirà una *parametrizzazione locale* di Σ attorno a \bar{x} .

Esempio 7. Supponiamo di essere interessati a descrivere la superficie di una sfera di \mathbb{R}^3 di raggio 1 centrata nell'origine. Possiamo descriverla molto semplicemente con un'equazione:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{dove } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Per quanto riguarda la parametrizzazione, possiamo definire $\varphi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ di componenti

$$\varphi(\phi, \theta) = \begin{cases} \varphi_x(\phi, \theta) & = \sin \phi \cos \theta \\ \varphi_y(\phi, \theta) & = \sin \phi \sin \theta \\ \varphi_z(\phi, \theta) & = \cos \phi. \end{cases}$$

Non possiamo invece descriverla come un'unica ipersuperficie parametrica cartesiana, questo perché il Teorema della Funzione Implicita non è globalmente applicabile in questo caso. Possiamo descriverla utilizzando le due rappresentazioni:

$$f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

corrispondenti alle due calotte contenenti il polo nord e sud rispettivamente della sfera.

Definizione 2.4. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, $x_0 \in S$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Diremo che il vettore v è un *vettore tangente* (secondo Fréchet) a S se esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \rightarrow x_0$ e:

$$\frac{v}{|v|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|}.$$

L'insieme di tutti i vettori tangenti a S in x_0 unito al vettore nullo verrà indicato con $T_{x_0}S$ e chiamato *cono tangente* (di Fréchet) a S in x_0 . Il *polare* di $T_{x_0}S$, ovvero l'insieme definito da:

$$N_S(x_0) := \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v \leq 0 \forall v \in T_{x_0}S\},$$

è detto *cono normale* (di Fréchet) a S in x_0 .

Diamo alcuni esempi per chiarificare la definizione data.

Esempio 8. Gli esempi sono tutti in \mathbb{R}^2 .

| Insieme S | Cono tangente $T_{(0,0)}S$ | Cono normale $N_S(0,0)$ |
|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\{(x, y) : y \geq x \}$ | S | $\{(x, y) : y \leq - x \}$ |
| $\{(x, y) : y \geq x^2\}$ | $\{(y, x) : y \geq 0\}$ | $\{(0, y) : y \leq 0\}$ |
| $\{(x, y) : y = x^2\}$ | $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ | $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ |
| $\{(x, y) : y = x \}$ | S | $\{(x, y) : y = - x \}$ |

Proposizione 2.1. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, $x_0 \in S$. Sussistono le seguenti proprietà (di verifica immediata):

- (1) $0 \in N_S(x_0)$, infatti si ha $0 \cdot v = 0$ per ogni v ,
- (2) sia $\lambda > 0$, se $v \in T_{x_0}S$ e $w \in N_S(x_0)$ si ha anche $\lambda v \in T_{x_0}S$, $\lambda w \in N_S(x_0)$ (questo giustifica il nome cono),
- (3) se $x_0 \in \text{int}(S)$ allora $T_{x_0}S = \mathbb{R}^n$ e $N_S(x_0) = \{0\}$.
- (4) se $v \in T_{x_0}S \cap N_S(x_0)$ allora $v = 0$.
- (5) Se $T_{x_0}S$ è spazio vettoriale, allora ogni vettore di $N_S(x_0)$ è ortogonale a $T_{x_0}S$.

Definizione 2.5. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, $x_0 \in S$.

- (1) Se il cono tangente $T_{x_0}S$ risulta essere uno spazio vettoriale, prenderà il nome di *spazio tangente*.
- (2) Se esiste $w \in N_S(x_0) \setminus \{0\}$ tale che:

$$N_S(x_0) \subseteq \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

si dirà che w è la direzione normale a S , se $|w| = 1$ diremo che w è *versore normale* o *normale unitaria*.

Definizione 2.6. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n , $B = \bar{\Omega}$ la sua chiusura. Diremo che il punto $x_0 \in B$ è un punto di *bordo* di B se esso possiede un intorno aperto U tale che $U \cap B$ sia omeomorfo a

$$W := \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y| < 1, y_1 \geq 0\},$$

e l'omeomorfismo mandi x_0 in un punto $(0, y_2, \dots, y_n)$.

Sia S un'ipersuperficie di \mathbb{R}^n . Diremo che il punto $x_0 \in S$ è un punto di *bordo* di S se esso possiede un intorno aperto U tale che $U \cap S$ sia omeomorfo a

$$V := \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| < 1, y_1 \geq 0\},$$

e l'omeomorfismo mandi x_0 in un punto $(0, y_2, \dots, y_{n-1})$. Si ha che se $T_{x_0}S$ è spazio vettoriale $n - 1$ -dimensionale allora x_0 non è di bordo. In generale il bordo di un bordo è vuoto. **Non si confonda il bordo di S con la frontiera topologica di S !**

Esempio 9. Consideriamo in \mathbb{R}^3 i due insiemi chiusi:

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si ha che S è la frontiera topologica di B . Vediamo che in questo caso il bordo di B è proprio S :

- i.) nei punti di $B \setminus S$, poiché appartengono all'interno $\text{int}(B)$, lo spazio tangente a B è proprio \mathbb{R}^3 ;
- ii.) nei punti di S , si vede che presa una palla U di raggio $\varepsilon > 0$ centrata in un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$, l'intersezione $U \cap B$ è omeomorfa ad una semisfera 3-dimensionale e l'omeomorfismo manda $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in un punto di frontiera.

Quindi il bordo di B coincide con la sua frontiera topologica ovvero è S .

Per quanto riguarda S , si ha che esso coincide con la sua frontiera topologica (infatti in ogni intorno di ogni punto di S cadono punti di $\mathbb{R}^3 \setminus S$, tuttavia, dato un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$, il cono tangente a S è dato dai vettori v tali che $v \cdot (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ e se v è uno di tali vettori, anche $-v$ soddisfa la stessa uguaglianza. In particolare tale cono tangente è uno spazio vettoriale di dimensione 2 per ogni punto di S , quindi il bordo di S è vuoto (infatti il bordo di S è il bordo di un bordo, quindi vuoto).

Vogliamo ora descrivere spazi tangenti e normali di alcuni insiemi particolari.

Proposizione 2.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto di \mathbb{R}^d . $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Poniamo

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : F(x) = 0\}.$$

Tale insieme è chiuso. Sia $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) =: (\tilde{x}, \bar{x}_d) \in S$ tale che esista $i \in \{1, \dots, d\}$ tale per cui $\partial_i F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \neq 0$. Allora si ha:

$$N_S(\bar{x}) = \{\lambda \nabla F(\bar{x}) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

e

$$T_{x_0}S = \ker dF(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^d : dF(\bar{x})v = 0\}.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che sia $i = d$. Per il teorema della funzione implicita, esiste $\varphi : U \rightarrow I$ di classe C^1 tale per cui

$$S \cap (U \times I) = \{(x_1, \dots, x_{d-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{d-1})) : (x_1, \dots, x_{d-1}) \in U\}.$$

Inoltre si ha per ogni vettore $z = (z_1, \dots, z_{d-1})$:

$$d\varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{d-1})z = -\frac{1}{\partial_d F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d)} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) z_i.$$

Sia ora $\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in S convergente a \bar{x} . Per n sufficientemente grande si avrà $y^{(n)} \in U \times I$, da cui

$$y^{(n)} = \left(y_1^{(n)}, \dots, y_{d-1}^{(n)}, \varphi(y_1^{(n)}, \dots, y_{d-1}^{(n)}) \right) =: (\tilde{y}^{(n)}, y_d^{(n)}).$$

In base alla definizione data, e ricordando che $\bar{x}_d = \varphi(\tilde{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{y^{(n)} - \bar{x}}{|y^{(n)} - \bar{x}|} &= \frac{1}{|y^{(n)} - \bar{x}|} \left(y_1^{(n)} - \bar{x}_1, \dots, y_{d-1}^{(n)} - \bar{x}_{d-1}, \varphi(y_1^{(n)}, \dots, y_{d-1}^{(n)}) - \bar{x}_d \right) \\ &= \frac{1}{|y^{(n)} - \bar{x}|} (\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}, \varphi(\tilde{y}^{(n)}) - \varphi(\tilde{x})) \\ &= \frac{|\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}|}{|y^{(n)} - \bar{x}|} \left(\frac{\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}}{|\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}|}, \frac{\varphi(\tilde{y}^{(n)}) - \varphi(\tilde{x})}{|\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}|} \right). \end{aligned}$$

Supposto che il limite del primo membro esista, si ottiene che esiste il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}}{|\tilde{y}^{(n)} - \tilde{x}|} =: h = (h_1, \dots, h_{d-1})$$

da cui:

$$\frac{v}{|v|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^{(n)} - \bar{x}}{|y^{(n)} - \bar{x}|} = \frac{(h, d\varphi(\tilde{x})h)}{\sqrt{1 + (d\varphi(\tilde{x})h)^2}}$$

Si ha:

$$-\partial_d F(\bar{x})(h, d\varphi(\tilde{x})h) = \left(-\partial_d F(\bar{x})h, \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) h_i \right)$$

Pertanto al variare delle direzioni di avvicinamento $h \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene:

$$T_{\bar{x}}S = \left\{ \left(-\partial_d F(\bar{x})h, \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) h_i \right) : h \in \mathbb{R}^{d-1} \right\}.$$

Tale insieme è uno spazio vettoriale. Per calcolare il cono normale pasterà quindi scegliere una direzione ortogonale. Si deve avere che

$$w \cdot \left(-\partial_d F(\bar{x})h, \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) h_i \right) = 0 \text{ per ogni } h \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Sviluppando i calcoli:

$$0 = \sum_{i=1}^{d-1} -w_i \partial_d F(\bar{x}) h_i + \sum_{i=1}^{d-1} w_d \partial_i F(\bar{x}) h_i = \sum_{i=1}^{d-1} (-w_i \partial_d F(\bar{x}) + w_d \partial_i F(\bar{x})) h_i.$$

Per l'arbitrarietà di h , deve valere per ogni $i = 1 \dots d-1$:

$$0 = -w_i \partial_d F(\bar{x}) + w_d \partial_i F(\bar{x})$$

Si può scegliere:

$$w_i = \partial_i F(\bar{x}), \text{ per ogni } i = 1 \dots d-1, \quad w_d = \partial_d F(\bar{x}),$$

da cui:

$$N_S(\bar{x}) = \{\lambda(\partial_1 F(\bar{x}), \dots, \partial_{d-1} F(\bar{x}), \partial_d F(\bar{x})) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \nabla F(\bar{x}) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

L'ultimo asserto si ricava dal fatto che se $v \in T_{x_0}S$ si deve avere per definizione di gradiente:

$$0 = \nabla F(\bar{x}) \cdot v = dF(\bar{x})v.$$

□

Proposizione 2.3. *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^{d-1} , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 . Poniamo*

$$S = \overline{\varphi(\Omega)}.$$

Sia $\bar{x} \in \Omega$ tale che il rango della matrice Jacobiana di φ in \bar{x} sia massimo (tale rango dovrà essere quindi $n - 1$). Allora:

$$T_{\varphi(\bar{x})}(S) = d\varphi(\bar{x})(\mathbb{R}^{d-1}).$$

e

$$N_S(\varphi(\bar{x})) = \ker d\varphi(\bar{x}).$$

Scelto un sistema di coordinate, lo spazio tangente è lo spazio vettoriale generato dalle colonne della matrice Jacobiana di φ e la direzione normale è lo spazio nullo di tale matrice.

Dimostrazione. Poniamo $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Sia $\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in S che tenda a $\varphi(\bar{x})$. Esiste allora $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in Ω che tende a \bar{x} tale che $\varphi(x^{(n)}) = y^{(n)}$. Si ha:

$$\frac{y^{(n)} - \varphi(\bar{x})}{|y^{(n)} - \varphi(\bar{x})|} = \frac{\varphi(x^{(n)}) - \varphi(\bar{x})}{|x^{(n)} - \bar{x}|} \frac{|x^{(n)} - \bar{x}|}{|y^{(n)} - \varphi(\bar{x})|}$$

Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{(n)} - \tilde{x}}{|x^{(n)} - \tilde{x}|} =: h \in \mathbb{R}^{d-1}$$

Allora passando al limite nell'espressione precedente si ha:

$$\frac{v}{|v|} = \frac{d\varphi(\bar{x})h}{|d\varphi(\bar{x})h|}.$$

Essendo Ω intorno di \bar{x} , è possibile scegliere h arbitrariamente, da cui l'asserto sullo spazio tangente che risulta essere quindi uno spazio vettoriale di dimensione $d - 1$. Il cono normale sarà costituito dalla direzione complementare, ovvero

$$N_S(\varphi(\bar{x})) = \ker d\varphi(\bar{x}).$$

Se $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d-1}\}$ è la base rispetto cui è scritta la matrice Jacobiana, possiamo descrivere anche lo spazio tangente come quello generato dall'immagine dei vettori \vec{e}_i , ossia

$$\text{Jac } \varphi(\bar{x})\vec{e}_i = (\partial_i \varphi_1, \dots, \partial_i \varphi_d).$$

(ovvero la i -esima colonna di $\text{Jac } \varphi(\bar{x})$), l'ultimo asserto è ovvio. □

Corollario 2.1. *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^{n-1} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Poniamo*

$$S = \overline{\{(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in (\Omega)\}}.$$

Sia $\bar{x} \in \Omega$. Allora:

$$T_{(\bar{x}, f(\bar{x}))}(S) = \{h \in \mathbb{R}^n : h_n = df(\bar{x})(h_1, \dots, h_{n-1})\}$$

e

$$N_S(\bar{x}, f(\bar{x})) = \{\lambda(\nabla f(\bar{x}), -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrazione. Immediata dai risultati precedenti definendo $F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$. □

Esempio 10. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, si definiscono *coseno* e *seno* dell'angolo θ compreso tra essi come:

$$\cos \theta_{vw} = \frac{v \cdot w}{|v| |w|}, \quad \sin \theta_{vw} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{vw}}.$$

dove il segno è positivo se la rotazione che porta la direzione v sulla direzione w avviene in senso antiorario, altrimenti è negativo. Si ha $\cos \theta_{vw} = \cos \theta_{wv}$, ma $\sin \theta_{vw} = -\sin \theta_{wv}$.

Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$. Siamo interessati a calcolare l'area del parallelogrammo di lati w e v . Tale area sarà data dal prodotto di base per altezza, dove la base è il vettore v e l'altezza è la componente di w normale a v . Se $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ si ha:

$$|A(v, w)| = |(a + b)(c + d) - bd - ac - 2ad| = |bc - ad| = \left| \det \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \right|$$

Si noti che ripetendo la costruzione invertendo l'ordine con cui sono stati presi w e v il risultato non cambia.

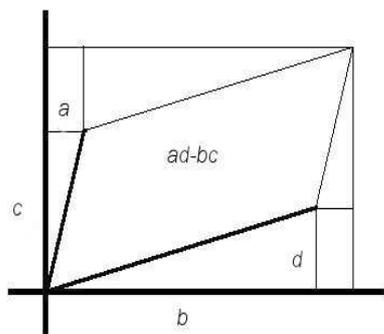


FIGURA 4. Dimostrazione geometrica del calcolo dell'area

Siano $v, w, z \in \mathbb{R}^3$. Siamo interessati a calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli v, w, z . A meno di rotazioni che non alterano il volume, possiamo come prima supporre che v, w giacciono sul piano costituito dai primi due vettori della base di \mathbb{R}^3 . Allora si ha:

$$V = |z_3| \cdot |A(v, w)| = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

In particolare se $|z_3| = 1$ si ha $|V| = |A(v, w)|$. Poiché il modulo del determinante non dipende dalla particolare base ortonormale scelta, possiamo definire il volume in \mathbb{R}^3 del parallelepipedo di spigoli i vettori v, w, z come il modulo del determinante della matrice le cui colonne sono i vettori v, w, z .

Scegliere un *orientamento* sul parallelotopo significa dare anche un *ordine* con cui vengono considerati i vettori: nei due casi precedenti, l'ordine non era importante per la presenza del modulo. Diremo che l'area o il volume sono orientati se invece i vettori vengono dati con un ordinamento.

Motivati da questi esempi e queste considerazioni, definiamo il volume n dimensionale del

parallelotopo generato dagli n vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ come

$$\omega_n(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = \det \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \cdots & v_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^{(1)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

ovvero il determinante della matrice le cui colonne sono in ordine i vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 (di Binet). *Siano dati m vettori a_1, \dots, a_m di \mathbb{R}^d con $m \leq d$. Sia A la matrice le cui colonne sono costituite dalle componenti di tali vettori rispetto ad una qualunque base ortonormale di \mathbb{R}^d . Allora la misura m -dimensionale del parallelotopo che per lati i vettori assegnati è:*

$$\omega_m(a_1, \dots, a_m) = \sqrt{\sum_B \det^2 B}$$

dove la somma è estesa a tutti i minori di ordine m della matrice A .

Vogliamo ora applicare la definizione data ai vettori tangenti. Dobbiamo pensare di approssimare la nostra superficie, nell'intorno di ogni punto, con una piastrella che abbia per spigoli di base i vettori tangenti. In questo caso l'area della piastrella costituirà una buona approssimazione dell'area della superficie.

Definizione 2.7. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^{d-1} , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 tale che il rango della matrice Jacobiana di φ sia massimo in ogni punto (ovvero $d-1$). Poniamo $S = \overline{\varphi(\Omega)}$. S è un'ipersuperficie, e come già visto si ha che in ogni punto non di bordo

$$T_{\varphi(\bar{x})}(S) = d\varphi(\bar{x})(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Si ha quindi che per $i = 1, \dots, d-1$ i vettori

$$\partial_i \varphi(\bar{x}) = (\partial_i \varphi_1(\bar{x}), \dots, \partial_i \varphi_n(\bar{x}))$$

sono una base di vettori tangenti. Tali vettori sono esattamente le colonne di $\text{Jac}(\varphi)$. Per il teorema di Binet, si avrà:

$$\omega_{d-1} = \sqrt{\sum_B \det^2 B}$$

dove la somma è estesa a tutti i minori di ordine $d-1$ della matrice Jacobiana di φ . Nel caso particolare in cui $\varphi(x_1, \dots, x_{d-1}) = (x_1, \dots, x_{d-1}, f(x_1, \dots, x_{d-1}))$ (parametrizzazione cartesiana) si ottiene

$$\omega_{d-1}(x) = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}.$$

Per superfici definite come zeri di un'equazione, è opportuno procedere decomponendo la superficie in regioni dove sia possibile, grazie al teorema della funzione implicita, trovare una parametrizzazione e poi applicare questi risultati.

Definizione 2.8. Siano $m, d \in \mathbb{N}$, $0 < m < d$. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^m , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 tale che il rango della matrice Jacobiana di φ sia massimo in ogni punto (ovvero m). Poniamo $S = \overline{\varphi(\Omega)}$. Se $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, definiamo:

$$\int_S u \, d\sigma = \int_{\Omega} u(\varphi(x)) \omega_m(\partial_1 \varphi(x), \dots, \partial_m \varphi(x)) \, dx.$$

3. INTEGRAZIONE

Definizione 3.1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia D aperto di \mathbb{R}^n e $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ una funzione continua. Diremo che D è un *cammino* in D se γ è C^1 a tratti, ovvero se esistono $N > 0$, $t_1, \dots, t_N \in [a, b]$ tali che per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$ si abbia $t_i < t_j$ se $i < j$, e γ sia una funzione di classe C^1 in ogni intervallo aperto $]0, t_1[,]t_i, t_{i+1}[,]t_N, b[$. Un cammino si dice *chiuso* oppure un *circuito* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Una *riparametrizzazione* di $\gamma([a, b])$ è una mappa $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 a tratti strettamente monotona e si ha che $\gamma \circ \tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è un cammino e vale $\gamma([c, d]) = \gamma \circ \tau([a, b])$. Tale insieme, che non dipende dalla riparametrizzazione, è detto *sostegno* della curva γ .

Il cammino inverso di γ , indicato con $-\gamma$ è $t \mapsto \gamma(a + b - t)$. Non si confonda $(-\gamma)(t)$ con il punto $-\gamma(t)$: il primo è il punto che il cammino γ raggiunge al tempo $a + b - t$, il secondo è il simmetrico rispetto all'origine del punto $\gamma(t)$ (che in generale potrebbe non appartenere nemmeno al sostegno di γ).

Esempio 11. Sia $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^1 vogliamo calcolare l'integrale di ∇u lungo il cammino γ . Si ha

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) dt = \int_a^b \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Motivati dall'esempio precedente, sostituendo ∇u con un campo \vec{F} di classe C^1 , diamo la seguente:

Definizione 3.2. Sia $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1 su D e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un cammino in D . L'integrale di \vec{F} lungo γ è definito da:

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

L'integrale di \vec{F} lungo un circuito viene chiamato *circuitazione* e indicato con $\oint_{\gamma} \vec{F} d\gamma$.

Se $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è una riparametrizzazione della curva γ si ha:

$$\int_{\gamma \circ \tau} \vec{F} d(\gamma \circ \tau) = \int_c^d \vec{F}(\gamma \circ \tau(t)) \cdot \gamma'(\tau(t)) \tau'(t) dt \stackrel{s=\tau(t)}{=} \int_{\tau(c)}^{\tau(d)} \vec{F}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds.$$

L'ultimo integrale è pari a $\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma$ se $\tau(c) = a$ e $\tau(d) = b$, ovvero se τ è strettamente crescente,

altrimenti se τ è strettamente decrescente è pari a $\int_{-\gamma} \vec{F} d\gamma = - \int_{\gamma} \vec{F} d\gamma$, si dirà che la curva viene percorsa in senso inverso rispetto alla parametrizzazione iniziale.

Dati due cammini $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, è possibile definire l'integrale sulla giustapposizione dei due cammini:

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \vec{F} d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\gamma_2.$$

Esempio 12. Si può interpretare la definizione precedente immaginando che il campo \vec{F} rappresenti un sistema di forze. In tal caso l'integrale lungo il cammino è il lavoro compiuto dalle forze nel cammino γ .

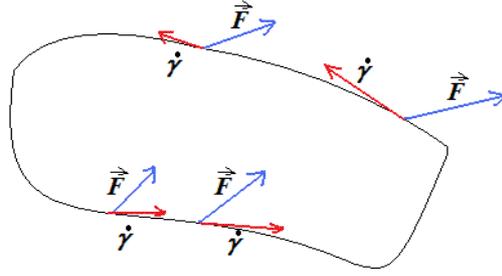


FIGURA 5. La circuitazione

Ci poniamo il problema di stabilire come l'integrale di un campo \vec{F} lungo un cammino di estremi A e B dipenda dal cammino scelto. Questo problema è legato alla circuitazione di \vec{F} : infatti se γ_1 e γ_2 sono due cammini di estremi A e B , $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ (ovvero la giustapposizione di γ_1 e $-\gamma_2$) è un circuito. Se la circuitazione di \vec{F} su γ è nulla allora l'integrale del campo è lo stesso lungo i due cammini. Tuttavia in generale questo non avviene.

Esempio 13. Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Definiamo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Il sostegno di γ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Definiamo $\vec{F}(x, y) = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))$. Si ha:

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi \neq 0,$$

quindi in generale l'integrale di \vec{F} tra due estremi fissati dipende dal cammino scelto.

Esempio 14. Riprendendo un esempio precedente, osserviamo che se $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^1 , l'integrale del campo vettoriale ∇u lungo il cammino γ è:

$$\int_a^b \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) dt = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)).$$

Il membro di destra dipende solo dagli estremi del cammino e non dal cammino stesso.

Alla luce dell'esempio precedente, riveste grande importanza la classe dei campi per cui l'integrale lungo un cammino dipenda solo dagli estremi del cammino stesso. Sappiamo già che tale classe contiene i campi gradiente dei campi scalari.

Definizione 3.3. Sia D aperto di \mathbb{R}^n , \vec{F} un campo vettoriale su D . Diremo che \vec{F} è *conservativo* in D se la sua circuitazione è nulla per ogni circuito contenuto in D . Sia $p_0 \in D$ fissato, se \vec{F} è conservativo definiamo:

$$u(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} d\gamma_x$$

dove per ogni $x \in D$, γ_x è un cammino congiungente p_0 a x . Poiché \vec{F} è conservativo, tale integrale dipende solo da x . Il campo scalare u prende il nome di *potenziale* per \vec{F} , e si ha $\vec{F} = \nabla u$. È immediato verificare come il potenziale sia definito a meno di una costante additiva (che dipende dalla scelta di p_0 : con la scelta indicata si determina la costante in modo che $u(p_0) = 0$).

Esempio 15. Siano $m > 0$ una massa nell'origine. Il campo gravitazionale generato da tale massa è

$$\vec{G}(x, y, z) = -\frac{G}{m} \frac{1}{|(x, y, z)|^3}(x, y, z) = \frac{G}{m} \nabla(|(x, y, z)|^{-1}).$$

Pertanto il potenziale del campo gravitazionale \vec{G} è $u(x, y, z) = \frac{G}{m}|(x, y, z)|^{-1}$.

Nella definizione data di campo conservativo è richiesto di verificare che la circuitazione su *tutti* i circuiti sia nulla. Tale condizione risulta nella pratica difficile da verificare, vedremo in seguito condizioni *sufficienti* a garantirla.

Esempio 16. Supponiamo ora di avere un fluido costituito da particelle microscopiche in movimento. Sia assegnata una ipersuperficie S che delimiti una regione chiusa Ω dello spazio e che il campo vettoriale delle velocità delle particelle sia \vec{F} . Il problema che ci poniamo è il seguente: dato un intervallo di tempo dt , vogliamo calcolare il volume del fluido che ha attraversato la superficie S . Possiamo approssimare S come unione elementi di superficie dS e ciascun elemento dS con lo spazio tangente in un suo punto. Il volume del fluido che ha attraversato la superficie sarà pari al solido di base dS e altezza $\vec{F} \cdot \hat{n} dt$. Quindi si ha per il volume infinitesimo transitato attraverso dS :

$$d\text{Vol} = \vec{F} \cdot \hat{n} dt dS,$$

ovvero la velocità di variazione di volume infinitesimo è $\frac{d\text{Vol}}{dt} = \vec{F} \cdot \hat{n}, dS$, integrando su tutta la superficie si ottiene la velocità di variazione del volume $\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}, dS$. Si noti che il segno del flusso cambia se cambia il segno della normale alla superficie, ciò corrisponde a definire un verso positivo e uno negativo o, in altre parole, una direzione di ingresso e una di uscita. Risulta importante poter fare quest'operazione in modo univoco su tutta la superficie, pertanto sarà indispensabile scegliere in modo continuo il segno della normale, ciò vuol dire dare un orientamento alla superficie, che verrà chiamata orientata.¹

Motivati da questo esempio, definiamo:

Definizione 3.4. Una superficie regolare S si dice orientabile se è possibile definire su S un campo vettoriale continuo \hat{n} tale che $|\hat{n}(x)| = 1$ e $\hat{n}(x) \in N_S(x)$. Si dice *orientata*, quando tale campo è assegnato.

Definizione 3.5. Sia Σ una ipersuperficie parametrica orientata con elemento di superficie $d\sigma$ e sia \vec{F} un campo vettoriale. Il *flusso* di \vec{F} attraverso Σ è definito da:

$$\Phi(\Sigma, \vec{F}) := \int_{\Sigma} \vec{F}(x) \cdot \hat{n}(x) d\sigma,$$

dove $\hat{n}(x)$ è la normale unitaria (il verso è dato dall'orientamento scelto).

Definizione 3.6. Se Σ è parametrizzata da $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $\varphi \in C^1(\Omega)$, essa eredita un orientamento naturale dovuto alla scelta ordinata della base dello spazio tangente.

¹Non entreremo in una definizione precisa di varietà orientata, per la quale si rimanda a [2]. Intuitivamente, una superficie è orientata se su di essa le due facce sono distinte, ovvero se è possibile specificare un verso attraverso cui la superficie viene attraversata.

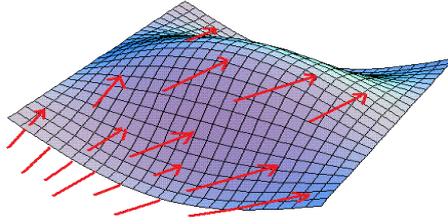


FIGURA 6. Il flusso

Si ha:

$$\begin{aligned}\Phi(\Sigma, \vec{F}) &:= \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \omega_n(\vec{F} \circ \varphi, \partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi)(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \det \begin{pmatrix} F_1 \circ \varphi & \partial_1\varphi_1 & \cdots & \partial_n\varphi_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_n \circ \varphi & \partial_1\varphi_n & \cdots & \partial_n\varphi_n \end{pmatrix} (x) \, dx\end{aligned}$$

Se il problema richiede che la superficie parametrizzata sia orientata in un particolare modo, è necessario verificare se la normale richiesta e quella indotta hanno lo stesso verso altrimenti è necessario invertire il segno ottenuto. Quindi se è assegnata una normale \hat{n} :

$$\Phi(\Sigma, \vec{F}) := \begin{cases} + \int_{\Omega} \omega_n(\vec{F} \circ \varphi, \partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi)(x) \, dx, & \text{se } \omega_n(\hat{n} \circ \varphi, \partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi) > 0, \\ - \int_{\Omega} \omega_n(\vec{F} \circ \varphi, \partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi)(x) \, dx, & \text{se } \omega_n(\hat{n} \circ \varphi, \partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi) < 0. \end{cases}$$

Esempio 17. Consideriamo l'ipersuperficie S in \mathbb{R}^2 definita da $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Scegliamo per S la parametrizzazione $\varphi :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Per quanto riguarda lo Jacobiano della trasformazione, si ha $\partial_{\theta}\varphi_1(\theta) = -\sin \theta$ e $\partial_{\theta}\varphi_2(\theta) = \cos \theta$. In ogni punto, la normale unitaria alla superficie è, come già visto,

$$\hat{n}^{(1)}(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad \hat{n}^{(2)}(x) = - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Nella parametrizzazione, si ha $\hat{n}^{(1)} \circ \varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\hat{n}^{(2)} \circ \varphi(\theta) = -(\cos \theta, \sin \theta)$. Vogliamo vedere quale di queste due normali coincide con la normale indotta dalla parametrizzazione di S . A tal proposito calcoliamo il determinante (qui $\hat{n}^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)})$):

$$\det \begin{pmatrix} \hat{n}_1^{(1)} \circ \varphi(\theta) & \partial_{\theta}\varphi_1(\theta) \\ \hat{n}_2^{(1)} \circ \varphi(\theta) & \partial_{\theta}\varphi_2(\theta) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Pertanto la normale concorde con la normale indotta dalla parametrizzazione di S è $\hat{n}^{(1)}$.

Definizione 3.7. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n . Supponiamo che la sua frontiera topologica sia un'ipersuperficie regolare Σ . Sia $x \in \Sigma$. Diremo che la normale unitaria uscente (o esterna) da Ω in x è $\hat{n}(x)$ se si ha: $|\hat{n}(x)| = 1$ e $-\hat{n}(x) \in N_S(x) \cap T_x(\Omega)$. L'opposto della normale uscente sarà detta entrante (o interna).

Osservazione 3. Senza entrare nei dettagli, se Ω è sufficientemente regolare, imporre su Σ la scelta della normale uscente da Ω induce un orientamento su Σ . In questo caso, si dice talvolta che Σ è orientata trasversalmente con la normale esterna.

Definizione 3.8. Sia Σ un'ipersuperficie orientata. Indichiamo con γ una curva sul bordo di Σ . L'orientamento di Σ induce un orientamento su γ nel modo seguente: dato un punto di γ , consideriamo il vettore $v(x)$, $|v(x)| = 1$, $v(x) \in N_\Sigma(x)$ tale che $-v(x) \in T_x\Sigma$. Data una parametrizzazione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove I è intervallo di \mathbb{R} , il verso positivo di percorrenza (ovvero l'orientamento nel caso di curve) è $\dot{\gamma}(x)$ se si ha che $\omega_3(v \circ \gamma(t), \dot{\gamma}(t), \hat{n} \circ \gamma(t)) > 0$. In altre parole un osservatore in piedi sulla faccia positiva della superficie orientata che stia camminando lungo il bordo, percorre il verso positivo del bordo se vede la superficie costantemente alla sua sinistra.

4. TEOREMA DELLA DIVERGENZA, FORMULA DI GAUSS-GREEN, TEOREMA DEL ROTORE

I risultati seguenti permettono il calcolo di flussi e integrali superficiali in modo molto rapido per una classe molto vasta di domini.

Definizione 4.1. Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Diremo che Ω è aperto *stokiano* se esiste un insieme A contenuto nella frontiera topologica di Ω per cui valgano le seguenti proprietà:

- (1) per ogni $\bar{x} \notin A$ esistono D aperto di \mathbb{R}^n , I intervallo di \mathbb{R} e $\varphi_{\bar{x}} : D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $D \cap \Omega \neq \emptyset$, $\bar{x} \in \partial\Omega \cap D = \{x \in D : \varphi_{\bar{x}}(x) = 0\}$, $\nabla\varphi_{\bar{x}}(x) \neq 0$, $\forall x \in D$;
- (2) la misura $n - 1$ -dimensionale² di $\partial\Omega \setminus A$ è nulla.

Intuitivamente, un aperto stokiano ha frontiera che si può scrivere come incollamento di grafici di funzioni C^1 definite localmente (dall'ipotesi 1 applicando il Teorema della Funzione Implicita) a meno di un insieme residuo piccolo (dall'ipotesi 2).

Il primo risultato lega il flusso alla divergenza (è conosciuto anche come Teorema di Gauss-Ostrogradsky).

Osservazione 4. Possiamo dare un'idea della formulazione del teorema ripensando al flusso come velocità di variazione del volume di fluido transitante attraverso $S = \partial\Omega$: come spiegato nell'interpretazione fisica della divergenza, la divergenza misura la velocità di variazione di volume infinitesima del fluido attorno ad un punto $x \in \Omega$. Se x è interno ad Ω , se una parte del volume aumenta attorno a x , proviene dai punti vicini, quindi gli effetti vengono bilanciati. Se invece x è vicino alla frontiera, eventuale volume dovrà andare o provenire dall'esterno di Ω , per cui intuitivamente sarà pari al flusso.

Teorema 4.1 (della divergenza). *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n . Sia D aperto stokiano limitato di \mathbb{R}^n con $\bar{D} \subset \Omega$. Sia $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\Omega)$. Allora:*

$$\int_D \operatorname{div} \vec{F}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial D} \vec{F}(x_1, \dots, x_n) \cdot \hat{n}(x_1, \dots, x_n) d\sigma = \Phi(\partial D, \vec{F}).$$

dove la frontiera è orientata trasversalmente con la normale esterna.

Dimostrazione. (del teorema della divergenza) Cominciamo col provare il teorema nel caso seguente: $\vec{F} = (0, \dots, 0, F_n)$, $D = \{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \tilde{x} \in A, g_1(\tilde{x}) \leq x_n \leq g_2(\tilde{x})\}$, dove A è

²La formulazione precisa di questo concetto richiede la definizione di misura di Hausdorff che non introdurremo.

aperto di \mathbb{R}^{n-1} , $g_1, g_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni C^1 con $g_1(\tilde{x}) < g_2(\tilde{x})$, (diremo che tale regione è *semplice* rispetto all'asse x_n). Poniamo:

$$\begin{aligned} S_n^+ &:= \{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \tilde{x} \in A, x_n = g_2(\tilde{x})\}, \\ S_n^- &:= \{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \tilde{x} \in A, x_n = g_1(\tilde{x})\}. \end{aligned}$$

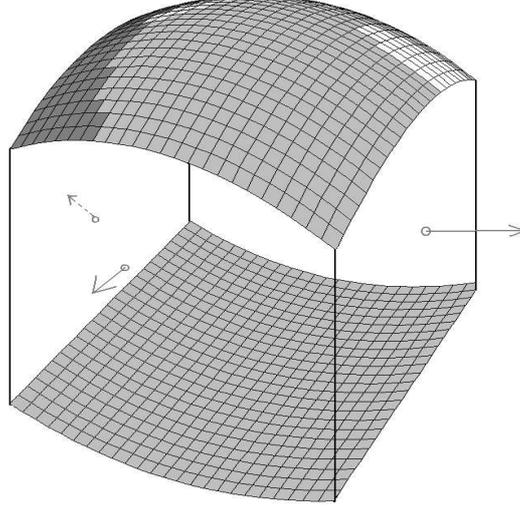


FIGURA 7. Regione z -semplice

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_D \partial_{x_n} F_n(\tilde{x}, x_n) dx &= \int_A \int_{g_1(\tilde{x})}^{g_2(\tilde{x})} \partial_{x_n} F_n(\tilde{x}, x_n) dx_n d\tilde{x} \\ &= \int_A F_n(\tilde{x}, g_2(\tilde{x})) - F_n(\tilde{x}, g_1(\tilde{x})) d\tilde{x} = \int_{S_n^+ \cup S_n^-} \vec{F} \cdot \hat{n}(x) d\sigma, \end{aligned}$$

infatti $\hat{n}(x) d\sigma = \hat{n}(x) \omega_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x}$ e tale espressione è $(-\nabla g_2, 1)$ su S^+ e $(\nabla g_1, -1)$ su S^- . D'altra parte la normale a $\partial D \setminus (S^+ \cup S^-)$ è contenuta nello spazio ortogonale a \vec{e}_n , per cui

$$\int_{\partial D \setminus (S_n^+ \cup S_n^-)} \vec{F} \cdot \hat{n}(x) d\sigma = 0.$$

Si ottiene così in questo caso particolare che

$$\int_D \partial_{x_n} F_n(x) dx = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{n}(x) d\sigma.$$

Se supponiamo che la regione D sia semplice rispetto a tutti gli assi (regione *elementare*, ovvero esistano A_1, \dots, A_n aperti di \mathbb{R}^{n-1} $g_1^i, g_2^i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni C^1 con $g_1^i(\tilde{x}) < g_2^i(\tilde{x})$ per $i = 1, \dots, n$ tali che, posto $\tilde{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ valga:

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} : \tilde{x}_i \in A_i, g_1^i(\tilde{x}_i) \leq x_i \leq g_2^i(\tilde{x}_i)\}$$

possiamo scrivere ogni campo

$$\vec{F}(x) = (F_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, F_i, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, F_n)$$

e applicando il precedente si ottiene:

$$\int_D \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i(x) dx = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{n}(x) d\sigma,$$

ovvero il risultato richiesto. Il caso generale si ottiene decomponendo D in regioni elementari. \square

Esempio 18. Supponiamo di avere il seguente campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^4, z^8 \cos z)$ e di volerne calcolare il flusso uscente da $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. La frontiera di D è S definita da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La normale uscente unitaria è

$$\hat{n}(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Un calcolo diretto del flusso pertanto porta al seguente integrale:

$$\Phi(S, \vec{F}) = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \int_S \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^5}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z^9 \cos z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) d\sigma.$$

La divergenza di \vec{F} è semplicemente $\text{div } \vec{F}(x) = 1 + 4y^3 + 8z^7 \cos z - z^8 \sin z$, quindi:

$$\Phi(S, \vec{F}) = \int_D (1 + 4y^3 + 8z^7 \cos z - z^8 \sin z) dx dy dz.$$

Per le simmetrie di D la disparità delle funzioni $4y^3$ e $8z^7 \cos z - z^8 \sin z$, si ha:

$$\Phi(S, \vec{F}) = \int_D (1 + 4y^3 + 8z^7 \cos z - z^8 \sin z) dx dy dz = \int_D dx dy dz = \text{Vol}(D) = \frac{4}{3}\pi.$$

Corollario 4.1. *Siano Ω , D , \vec{F} come nel teorema della divergenza e siano $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ campo scalare di classe C^1 . Allora si ha:*

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} g \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma &= \int_D (\nabla g \cdot \vec{F} + g \text{div } \vec{F}) dx. \\ \int_{\partial D} g \hat{n} d\sigma &= \int_D \nabla g dx. \end{aligned}$$

Inoltre se $n = 3$ e $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono campi vettoriali C^1 si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\vec{F} \times \vec{G}) \cdot \hat{n} d\sigma &= \int_D (\vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})) dx \\ \int_D \nabla \times \vec{F} dx &= \int_{\partial D} \hat{n} \times \vec{F} d\sigma. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima e la terza formula discendono direttamente dalle identità per la divergenza di un prodotto tra un campo scalare e uno vettoriale e per la divergenza del prodotto vettoriale di due campi vettoriali su \mathbb{R}^3 . Per quanto riguarda la seconda formula, sia \vec{e}_i il vettore i -esimo della base canonica. Poniamo $\vec{F} = \vec{e}_i$, ovviamente la divergenza è nulla. La prima formula pertanto si riduce a:

$$\int_{\partial D} g \vec{e}_i \cdot \hat{n} d\sigma = \int_D \nabla g \cdot \vec{e}_i dx.$$

Sommando su tutti gli indici i si ottiene la formula desiderata.

Per quanto riguarda la quarta, si applichi il teorema della divergenza al prodotto vettoriale tra \vec{F} e \vec{e}_i e si sommi poi sugli indici i . \square

In \mathbb{R}^2 , ponendo $\vec{F} = (Q(x, y), -P(x, y))$ il teorema della divergenza implica il seguente risultato:

Proposizione 4.1 (Formula di Green). *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^2 . Sia G aperto stokiano limitato di \mathbb{R}^2 con $\bar{G} \subset \Omega$. Siano $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe $C^1(\Omega)$ (con derivate parziali continue in Ω). Allora si ha:*

$$\int_{\partial G} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \int \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove la frontiera di G è orientata trasversalmente con la normale esterna.

La formula di Green si estende dagli aperti di \mathbb{R}^2 alle superfici immerse in \mathbb{R}^3 nel modo seguente:

Teorema 4.2 (del rotore). *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^3 sia Σ una superficie di \mathbb{R}^3 di bordo γ contenuta in Ω . Sia $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale di classe C^1 . Allora:*

$$\int_{\Sigma} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n} d\sigma = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr,$$

dove γ è orientato trasversalmente con la normale esterna (rispetto a Σ).

Osservazione 5. Osserviamo infatti che se $\vec{F} = (P, Q, R)$ si ottiene dal teorema:

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

Scegliendo $R = 0$, $dz = 0$, ovvero \vec{F} e γ sono contenuti nel piano xy , si ha esattamente la formula di Green. Il risultato precedente prende il nome di Teorema di Kelvin-Stokes.

Dimostrazione. (del teorema del rotore) Omessa. \square

Osservazione 6. La seguente osservazione può essere utile nello svolgimento di alcune tipologie di esercizi. Supponiamo di avere un campo \vec{F} di cui calcolare il flusso attraverso una superficie Σ orientata di bordo γ . Può essere utile considerare una superficie ausiliaria S con il medesimo bordo γ tale che $\Sigma \cup S$ racchiuda il volume V . Se la divergenza di \vec{F} è nulla, l'integrale di essa esteso a V è nullo, quindi il flusso attraverso $\Sigma \cup S$ di \vec{F} è nullo, ma allora il flusso attraverso Σ (che è l'incognita del problema) è uguale al flusso attraverso S . Se possiamo scegliere una superficie S di espressione più semplice rispetto a Σ , questo fatto abbrevia notevolmente i calcoli.

Esempio 19. Supponiamo di avere la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di parametrizzazione cartesiana $z = f(x, y)$, $f(x, y) = (1 - x^2 + y^2)(e^x \sin(2\pi y) + 1)$, con $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Σ ha l'orientamento indotto dalla parametrizzazione. Sia $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si ha $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 0$. Cerchiamo una superficie ausiliaria S nel modo seguente: il bordo di Σ è dato da $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$, e inoltre $\Sigma \subset D \times [0, +\infty[$. Poniamo $S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$. Il volume V è dato da:

$$V := \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq (1 - x^2 + y^2)(e^x \sin(2\pi y) + 1)\}.$$

È necessario scegliere gli orientamenti opportuni: la normale dovrà essere esterna a V , quindi $\hat{n}(x) = (0, 0, -1)$ per ogni $x \in S$. Se orientiamo Σ con la normale esterna a V , dal teorema della divergenza si ha:

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{F}(x) \, dx dy dz = \int_{S \cup \Sigma} \vec{F}(x) \cdot \hat{n}(x) \, d\sigma,$$

da cui:

$$\int_{\Sigma} \vec{F}(x) \cdot \hat{n}(x) \, d\sigma = - \int_S \vec{F}(x) \cdot \hat{n}(x) \, d\sigma = \int_S d\sigma = \operatorname{Area}(S) = \pi.$$

D'altra parte, dobbiamo capire se la normale a Σ indotta dalla parametrizzazione sia esterna a V oppure no. In caso affermativo il flusso richiesto è π altrimenti sarà $-\pi$. Posto $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, si ha $\partial_1 \varphi(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $\partial_2 \varphi(0, 0) = (0, 1, 2\pi)$. Il prodotto esterno di tali vettori è $(0, -2\pi, 1)$, quindi la normale della parametrizzazione in $(0, 0, f(0, 0))$ è esterna a V . Per continuità essa è esterna in tutto Σ e il flusso è π .

5. FORME DIFFERENZIALI LINEARI

La teoria delineata in precedenza trova la sua sistemazione più elegante e moderna nel linguaggio delle *forme differenziali*. Daremo solo brevi cenni di tale teoria, il lettore interessato può consultare [2].

In tutta questa sezione, X indicherà lo spazio vettoriale R^n , mentre X^* indicherà lo spazio delle funzioni lineari da X in \mathbb{R} . È noto che X e X^* sono isomorfi perché R^n ha dimensione finita, pertanto su X^* ci è la medesima topologia di X .

Se $f \in X^*$ e $x \in X$ scriveremo spesso $\langle f, x \rangle$ per indicare il numero reale $f(x)$.

Definizione 5.1. Sia $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ base di X . Allora su X^* è definita la *base duale* $\mathcal{B}^* = \{d_1, \dots, d_n\}$ nel modo seguente: $\langle d_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle d_i, e_i \rangle = 1$. Spesso scriveremo dx_i al posto di d_i .

Definizione 5.2. Sia D aperto di X . Chiameremo *forma differenziale lineare* o *forma differenziale di grado 1* o *1-forma* di classe C^ℓ su D una funzione $\omega : D \rightarrow X^*$ di classe C^ℓ .

Esempio 20. Sia D aperto di X , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Il suo differenziale $df(x)$ in un punto x è una mappa lineare da X in \mathbb{R} , quindi per ogni x si ha $df(x) \in X^*$. Pertanto l'applicazione df che mappa x in $df(x)$ è una 1-forma. Si ha

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) dx_i.$$

Tale scrittura si deve intendere nel modo seguente: supponiamo che $h \in X$ abbia coordinate $h = (h_1, \dots, h_n)$ rispetto alla base scelta in X . Su X^* resta definita la base duale, e si ha

$$\langle df(x), h \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i \in \mathbb{R}.$$

Definizione 5.3. Sia D aperto di X , ω una 1-forma di classe C^ℓ su D . Scelta una base $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ di X , i coefficienti di ω rispetto a \mathcal{B}^* , base duale di B sono dati da $\omega_i(x) = \langle \omega(x), e_i \rangle$. In questo modo $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$

Definizione 5.4. Sia D aperto di X , ω una 1-forma di classe C^ℓ su D . Diremo che ω è *esatta* se esiste $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $df(x) = \omega(x)$ per ogni $x \in D$. Ognuna di tali funzioni f si dirà una *primitiva* di ω . Se D è aperto connesso, due primitive differiscono per una costante (la loro differenza ha differenziale nullo).

Definizione 5.5. Sia D aperto di X , ω una 1-forma di classe C^1 su D . Diremo che ω è *chiusa* se detti $\omega_i(x)$ i suoi coefficienti si ha $\partial_k \omega_i(x) = \partial_i \omega_k(x)$ per ogni $x \in D$, $i, k = 1, \dots, n$. Ogni forma esatta è chiusa (il viceversa in generale non è vero). Infatti sia f una primitiva di ω . Allora $\omega_i(x) = \partial_i f(x)$, pertanto $\partial_j \omega(x) = \partial_{ij}^2 f(x)$. Poiché f è due volte differenziabile in x , vale il teorema di Schwarz, quindi $\partial_{ij}^2 f(x) = \partial_{ji}^2 f(x)$, segue la tesi.

Definizione 5.6. Sia D aperto di X , ω una 1-forma di classe C^1 su D . Diremo che ω è *localmente esatta* se per ogni $x \in D$ esiste un intorno aperto $U \subset D$ di x tale che $\omega|_U$ sia esatta.

Proposizione 5.1. Sia D aperto di X , ω una 1-forma di classe C^1 su D . Allora ω è *localmente esatta* se e solo se ω è *chiusa*.

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 5.7. Sia D aperto di X , ω una 1-forma su D , $\gamma : [0, T] \rightarrow D$ un cammino in D . Poniamo allora:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^T \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Proposizione 5.2. Sia D aperto di X , ω una 1-forma esatta su D , $\gamma : [0, T] \rightarrow D$ un circuito in D . Allora:

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

In particolare l'integrale di ω lungo un cammino in D dipende solo dagli estremi.

Dimostrazione. Sia f primitiva di ω . Per definizione si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^T \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^T df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^T \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) dt = f \circ \gamma(T) - f \circ \gamma(0),$$

e tale espressione è nulla perché $\gamma(0) = \gamma(T)$. L'ultimo asserto è ovvio. □

Definizione 5.8. Siano Z, Y spazi topologici, $\gamma_0, \gamma_1 : Z \rightarrow Y$ funzioni continue. Un'*omotopia* fra γ_0 e γ_1 è una funzione continua $H : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ e $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in Z$. Si dirà che γ_0 e γ_1 sono omotope. Se pensiamo al secondo parametro di H come ad una variabile temporale, allora H descrive una *deformazione continua* di γ_0 in γ_1 . Una funzione continua $\gamma : X \rightarrow Y$ è detta *nullomotopa* se è omotopa ad una funzione costante. Nel nostro caso le funzioni γ_0, γ_1 saranno cammini, per cui si avrà $Y = \Omega$ aperto di \mathbb{R}^n e Z intervallo di \mathbb{R} .

Proposizione 5.3. Sia D aperto di X . Se Ω è una 1-forma continua e localmente esatta in D , e γ_1, γ_2 sono omotopi in D , allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

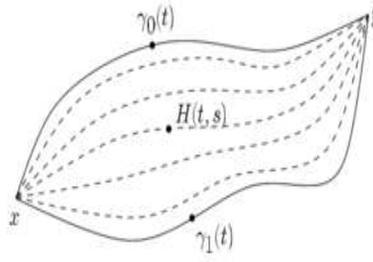


FIGURA 8. Omotopia

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è la seguente: detta $H : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow D$ l'omotopia da γ_1 a γ_2 , consideriamo per ogni $x \in D$ una palla aperta $U_x = B(x, r(x))$ tale che $\omega|_{U_x}$ sia esatta. Posto $V_x = H^{-1}(U_x)$, si ha che $\{V_x : x \in D\}$ è un ricoprimento aperto del compatto $[0, T] \times [0, 1]$. Possiamo quindi suddividere $[0, T] \times [0, 1]$ in un numero finito di rettangoli compatti $Q_{k\ell} = [t_{k-1}, t_k] \times [\lambda_{\ell-1}, \lambda_\ell]$ in modo che $H(Q_{k\ell}) \subset U_{x_{k\ell}}$, dove la forma è esatta. Sfruttando il fatto che il numero di tali rettangoli è finito e che sulle immagini di tali rettangoli la forma è esatta si perviene alla tesi. Infatti in ciascun circuito costituita dall'immagine del bordo di ogni

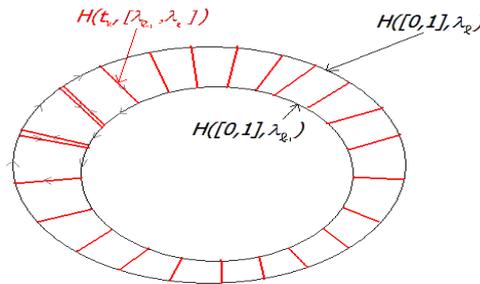


FIGURA 9. Invarianza per omotopia

$Q_{k\ell}$ l'integrale è nullo. Sommando sugli indici k si ottiene che l'integrale sul circuito $H([0, 1], \lambda_\ell$ è uguale a quello sul circuito $H([0, 1], \lambda_{\ell-1})$, infatti i contributi laterali di due celle adiacenti si elidono (poiché percorsi in senso opposto). Quindi l'integrale su γ_1 è uguale a quello su γ_2 perché l'integrale tra tutti i circuiti intermedi tra loro (ovvero $H([0, 1], \lambda_\ell)$ per ogni ℓ) è lo stesso. \square

Definizione 5.9. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$. Diremo che Ω è:

- (1) *semplicemente connesso* se esso è connesso per archi (ovvero dati comunque due punti di Ω esiste un cammino contenuto in Ω che li congiunga) e se dato un qualunque circuito γ contenuto in Ω esso è omotopo in Ω ad un circuito costante $\gamma_0 \equiv P \in \Omega$.
- (2) *stellato rispetto a a* se per ogni $x \in \Omega$ si ha $a + t(x - a) \in \Omega$ per ogni $t \in [0, 1]$;
- (3) *stellato* se esiste $P \in \Omega$ tale per cui Ω sia stellato rispetto ad P .

Se Ω è stellato, allora è semplicemente connesso, il viceversa in generale non è vero.

Definizione 5.10. Sia D aperto di X , \vec{F} campo vettoriale su D . Definiamo una 1-forma nel modo seguente:

$$\langle \omega_{\vec{F}}(x), h \rangle = \vec{F}(x) \cdot h.$$

Chiameremo tale forma, la forma *associata* al campo \vec{F} , e i suoi coefficienti nella base duale sono esattamente i coefficienti di \vec{F} rispetto alla base di X .

Proposizione 5.4. *Sia Ω aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^3 , \vec{F} campo vettoriale su Ω . Se $\text{rot } \vec{F} = 0$ in Ω , allora esiste f campo scalare su Ω tale che $\vec{F} = \nabla f$ e in particolare \vec{F} è conservativo.*

Dimostrazione. Se il rotore è nullo, si ha che la forma associata a \vec{F} è chiusa, ed essendo Ω semplicemente connesso, essa è esatta, da cui $\vec{F} = \nabla f$ con f campo scalare, quindi \vec{F} è conservativo. Se Ω è stellato rispetto ad a , si può scegliere

$$f(x) = \int_0^1 \vec{F}(a + t(x - a)) \cdot (x - a) \cdot dt.$$

□

Proposizione 5.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto stellato rispetto ad $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Omega$, \vec{F} campo vettoriale su Ω . Se $\text{div } \vec{F} = 0$ in Ω , allora esiste \vec{A} tale che $\text{rot } \vec{A} = \vec{F}$. Il campo \vec{A} prende il nome di potenziale vettore per \vec{F} e si ha:*

$$\vec{A}(x) = \int_0^1 t \vec{F}(a + t(x - a)) \times (x - a) dt.$$

Dimostrazione. Per calcolo diretto. □

6. COMPLEMENTI

Definizione 6.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato. Sia $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione integrabile.

Il *baricentro* di un corpo che occupi lo spazio Ω e abbia densità ρ è il punto $G = (G_1, G_2, G_3) \in \mathbb{R}^3$ dove per ogni $i = 1 \dots 3$:

$$G_i := \frac{1}{M} \int \int_{\Omega} x_i \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3,$$

essendo

$$M := \int \int_{\Omega} \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

la massa totale del corpo.

Data una retta r , indichiamo con $d_r(x_1, x_2, x_3)$ la distanza dal punto (x_1, x_2, x_3) da r . Il *momento di inerzia rispetto alla retta r* di un corpo che occupi lo spazio Ω e abbia densità ρ è definito da:

$$\mathcal{I}(\Omega, \rho, r) := \int \int_{\Omega} \rho(x_1, x_2, x_3) d_r^2(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

L'*energia cinetica* di un corpo rigido che ruoti con velocità angolare $\omega(t)$ attorno alla retta r è data da:

$$T := \frac{1}{2} \mathcal{I}(\Omega, \rho, r) \omega^2(t).$$

Teorema 6.1 (Guldino). *L'area di una superficie di rotazione in \mathbb{R}^3 ottenuta ruotando di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ attorno all'asse z una curva regolare semplice γ di supporto Γ contenuto nel piano xz è*

$$A = \alpha \cdot x_G \cdot \ell(\gamma),$$

dove $G = (x_G, z_G)$ è il baricentro della curva e $\ell(\gamma)$ è la lunghezza di γ .

Il volume di un solido di rotazione Ω in \mathbb{R}^3 ottenuto ruotando di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ attorno all'asse z una figura piana K nel piano xz è

$$V = \alpha \cdot x_G \cdot A,$$

dove $G = (x_G, z_G)$ è il baricentro di K e A l'area di K .

Definizione 6.2. Se una delle tre dimensioni del corpo Ω è trascurabile rispetto alle altre due useremo il termine *lamina* per indicare tale corpo. Si può rappresentare una lamina con un dominio $\tilde{\Omega}$ nel piano \mathbb{R}^2 . La densità sarà una funzione $\tilde{\rho} : \tilde{\Omega} \rightarrow [0, +\infty[$. Il baricentro $G = (G_1, G_2)$ apparterrà al piano della lamina e avrà coordinate:

$$G_x := \frac{1}{M} \int \int_{\tilde{\Omega}} x \tilde{\rho}(x, y) dx dy,$$

essendo

$$M := \int \int_{\tilde{\Omega}} \rho(x, y) dx dy$$

la massa totale del corpo.

Se r è una retta appartenente allo stesso piano della lamina, ovvero il piano (x, y) , il *momento di inerzia rispetto alla retta r* della lamina che occupi lo spazio $\tilde{\Omega}$ e abbia densità $\tilde{\rho}$ è definito da:

$$\mathcal{I}(\tilde{\Omega}, \tilde{\rho}, r) := \int \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\rho}(x, y) d_r^2(x, y) dx dy.$$

Se s è una retta nello spazio perpendicolare al piano della lamina, indicato con $P = (P_x, P_y)$ il punto in cui la retta s interseca il piano della lamina il *momento di inerzia rispetto alla retta s* della lamina che occupi lo spazio $\tilde{\Omega}$ e abbia densità $\tilde{\rho}$ è definito da:

$$\mathcal{I}(\tilde{\Omega}, \tilde{\rho}, s) := \int \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\rho}(x, y) \sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2} dx dy.$$

(si ricordi che $\sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2}$ è la distanza del punto $(x, y, 0)$ dalla retta s) Parleremo in questo caso anche di momento d'inerzia della lamina rispetto al punto P .

Definizione 6.3 (Equazioni di Maxwell nel vuoto). Indichiamo con (x, y, z, t) i punti di $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Indichiamo con:

| | |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | la densità di carica elettrica, |
| $\vec{j} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ | la densità di corrente, |
| $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ | il campo elettrico, |
| $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ | il campo magnetico, |
| $\varepsilon_0 > 0$ | la costante elettrica nel vuoto, |
| $\mu_0 > 0$ | la costante magnetica nel vuoto. |

Queste quantità sono legate tra loro dalle seguenti relazioni, note come Equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

dove gli operatori di rotore e divergenza agiscono sulle sole variabili spaziali (x, y, z) , e dalla legge di conservazione della carica:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}.$$

Nel caso statico, le derivate rispetto a t sono nulle.

Esempio 21. Supponiamo di avere una sfera D_ξ centrata nell'origine e di raggio ξ carica con densità di carica uniforme pari a ρ_0 . Vogliamo calcolare il campo elettrico \vec{E} generato da essa nello spazio in condizioni statiche. Cerchiamo soluzioni del tipo

$$\vec{E}(x, y, z) = E(|x, y, z|) \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|},$$

per $|(x, y, z)| > R$. Per la simmetria del problema, ci poniamo in coordinate sferiche $\psi(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$ centrate nel centro della sfera carica. Consideriamo a questo punto

$$D_R := \{(r, \theta, \phi) \in [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[: 0 \leq r \leq R\},$$

che in coordinate cartesiane corrisponde alla sfera centrata nell'origine e di raggio $R > \xi$.

Per il Teorema della divergenza si ha:

$$\int_{D_R} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial D_R} \vec{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

Dalla prima equazione di Maxwell si ha:

$$\int_{D_R} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{D_R} \rho(x) \, dx \, dy \, dz.$$

Quindi:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{D_\xi} dx \, dy \, dz = \int_{\partial D} \vec{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

Per quanto riguarda il primo integrale si ha (la funzione integranda è l'elemento di volume in coordinate sferiche, ovvero il determinante Jacobiano della trasformazione):

$$\int_{D_\xi} dx \, dy \, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{4\pi\xi^3}{3},$$

pertanto posto $Q = \frac{4}{3}\pi\xi^3$ che corrisponde alla carica complessiva del conduttore, si ha:

$$\int_{\partial D_R} \vec{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Nel secondo integrale abbiamo che:

$$\int_{\partial D_R} \vec{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma = E(R) \int_{\partial D_R} d\sigma$$

La superficie della sfera è parametrizzata da $(R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$, per calcolare l'area osserviamo che l'elemento di area 2-dimensionale è dato dalla radice quadrata della somma del quadrato di tutti i determinanti di ordine 2 dello Jacobiano della parametrizzazione, ovvero:

$$\begin{aligned} \omega_2(\theta, \phi) &= R^2 \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta \sin^2 \phi + \sin^4 \theta \cos^2 \phi} = R^2 \sqrt{4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta} \\ &= R^2 \sqrt{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin^4 \theta} = R^2 \sin \theta \\ \int_{\partial D_R} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Si ottiene infine:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3}.$$

Dato che non vi sono campi magnetici, il campo \vec{E} è irrotazionale e poichè $\mathbb{R}^3 \setminus D_\xi$ è semplicemente connesso, esiste un potenziale Φ tale che $\vec{E} = \nabla\Phi$. Definiamo $\rho(x) = \rho_0$ se $|x| < \xi$ e $\rho(x) = 0$ altrimenti, si ha che Φ risolve l'equazione di Poisson $\Delta\Phi = \rho(x)/\epsilon_0$ e che $\vec{E} = \nabla\Phi$, nel nostro caso abbiamo trovato:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|(x, y, z)|^2}.$$

In particolare, Φ è costante sulle superfici sferiche e quindi anche su ∂D_ξ . Si può provare che la soluzione trovata è l'unica soluzione dell'equazione di Poisson con questi dati iniziali tale per cui il potenziale si annulli all'infinito.

7. ESERCIZI

Esercizio 7.1. Sia $a > 0$. Calcolare l'area del cappio della curva di equazioni parametriche:

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \quad y = \frac{at^2}{1+t^3}.$$

Svolgimento. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t)) := \left(\frac{at}{1+t^3}, \frac{at^2}{1+t^3} \right).$$

Eseguiamo un rapido studio delle funzioni F_1 e F_2 :

$$F_1(0) = 0, \lim_{|t| \rightarrow \infty} F_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -1^\pm} F_1(t) = \mp\infty, F_1'(t) = \frac{a(1-2t^2)}{(1+t^3)^2} > 0 \text{ sse } |t| < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$F_2(0) = 0, \lim_{|t| \rightarrow \infty} F_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -1^\pm} F_2(t) = \pm\infty, F_2'(t) = \frac{at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} > 0 \text{ sse } 0 < t < \sqrt[3]{2}.$$

Per $t < -1$, entrambe queste funzioni sono strettamente decrescenti, pertanto il cappio si avrà eventualmente per $t > -1$. Il cappio si ha se esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $t_1 < t_2$ tali per cui $F(t_1) = F(t_2) =: (\bar{x}, \bar{y})$, quindi si deve avere:

$$\frac{at_1}{1+t_1^3} = \frac{at_2}{1+t_2^3}, \quad \frac{at_1^2}{1+t_1^3} = \frac{at_2^2}{1+t_2^3}.$$

In particolare, si dovrà avere $0 < t_1 < \sqrt{2}/2$ e $t_2 > \sqrt[3]{2}$, per gli intervalli di monotonia delle due funzioni. Sostituendo la prima uguaglianza nella seconda, si ha:

$$\frac{at_1^2}{1+t_2^3} = \frac{at_1t_2}{1+t_1^3},$$

da cui:

$$(t_1 - t_2) \cdot \frac{at_1}{1+t_1^3} = 0.$$

Ne segue $t_1 = 0$, da cui $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Risostituendo nelle uguaglianze e osservando che $t_2 \neq 0$ si ha che il punto $(0, 0)$ viene raggiunto asintoticamente per $t \rightarrow +\infty$, quindi $t_2 = +\infty$ e il cappio è descritto dalla curva $\gamma = \{F(t) : t \geq 0\}$.

Sia C la regione di piano circoscritta da tale curva. L'area del cappio è data da:

$$A = \iint_C dx dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_{\gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente C .

Nel nostro caso, determiniamo P , Q in modo tale che il membro di destra sia pari ad A . Una scelta possibile è porre $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} A &= \oint_{\gamma} x dy = \int_0^{+\infty} F_1(t)F_2'(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{at}{1+t^3} \cdot \frac{at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} dt = a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2(2-t^3)}{(1+t^3)^3} dt \\ &= \frac{a^2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{2-t^3}{(1+t^3)^3} \cdot 3t^2 dt = \frac{a^2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{2-s}{(1+s)^3} ds = \frac{a^2}{3} \int_1^{+\infty} \frac{3-u}{u^3} du = \frac{a^2}{6}. \end{aligned}$$

Pertanto l'area richiesta vale $A = a^2/6$.

Esercizio 7.2. Sia $a > 0$. Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla curva di equazione polare:

$$\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Svolgimento. Scegliamo come dominio per l'angolo θ l'intervallo (di lunghezza 2π) $[-\pi/2, 3/2\pi]$. Osserviamo innanzitutto che dovendosi avere $\cos 2\theta \geq 0$, si dovrà avere $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3/4\pi, 5/4\pi] =: D$. Inoltre $\rho(-\pi/4) = \rho(\pi/4) = \rho(3/4\pi) = \rho(5/4\pi) = 0$, quindi l'equazione data definisce nel piano cartesiano una curva chiusa γ passante per l'origine. Sia C la regione di piano circoscritta da tale curva. L'area di tale regione è data da:

$$A = \iint_C dx dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_{\gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente C .

Nel nostro caso, determiniamo P , Q in modo tale che il membro di destra sia pari ad A . Una

scelta possibile è porre $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$. Ricordando che in coordinate polari si ha $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$, $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$, si ha allora:

$$\begin{aligned} A &= \int_D \rho(\theta) \cos(\theta) \cdot \left(\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta \right) d\theta \\ &= \int_D \rho(\theta) \cos(\theta) \cdot \left(\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_D \rho(\theta) \cdot \rho'(\theta) \sin 2\theta d\theta + 2a^2 \int_D \cos 2\theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_D \frac{d}{d\theta} [\rho^2(\theta)] \sin 2\theta d\theta + a^2 \int_D \cos 2\theta \cdot (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= -a^2 \int_D \sin^2 2\theta d\theta + a^2 \int_D \cos^2 2\theta d\theta + a^2 \int_D \cos 2\theta d\theta \\ &= -a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta + \\ &+ \left(-a^2 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \sin^2 2\theta d\theta + a^2 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \cos^2 2\theta d\theta + a^2 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \cos 2\theta d\theta \right). \end{aligned}$$

Le funzioni integrande sono tutte periodiche di periodo π , pertanto i loro integrali sull'intervallo $[3/4\pi, 5/4\pi]$ coincidono con i corrispondenti sull'intervallo $[-\pi/4, \pi/4]$. si ha allora:

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(-a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta \right) \\ &= 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 2a^2, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il seguente fatto (si ricordi che $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta &= 2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2(\pi - 2\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2(\pi - 2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2(2\theta) d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta. \end{aligned}$$

Pertanto l'area richiesta vale $2a^2$.

Esercizio 7.3. Sia $a > 0$. Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla curva di equazione polare:

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta).$$

Svolgimento. Si ha $\rho(0) = \rho(2\pi)$, quindi l'equazione data definisce una curva chiusa γ nel piano cartesiano. Sia C la regione di piano circoscritta da tale curva. L'area di tale regione è data da:

$$A = \int \int_C dx dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_{\gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \int \int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente C .

Nel nostro caso, determiniamo P , Q in modo tale che il membro di destra sia pari ad A . Una scelta possibile è porre $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$ Ricordando che in coordinate polari si ha $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$, $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$, si ha allora:

$$\begin{aligned} A &= \oint_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos \theta \cdot (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot (-\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 \cos^2 \theta d\theta - a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (1 + \cos \theta) \cos \theta d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta + \cos^4 \theta + 2 \cos^3 \theta - (\cos \theta - \cos^3 \theta - \cos^4 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} 2 \cos^4 \theta + 3 \cos^3 \theta - \cos \theta d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 d\theta \\ &= \frac{a^2}{8} \int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2)^2 d\theta = \frac{a^2}{8} \int_0^{2\pi} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4 + 2 + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta}) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) d\theta = \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

Pertanto l'area richiesta vale $3\pi a^2/2$.

Esercizio 7.4. Si calcoli utilizzando le formule di Gauss-Green nel piano:

$$I := \int \int_D x^2 dx dy.$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Svolgimento. La regione di piano D è delimitata dalle due circonferenze γ_1 e γ_2 centrate nell'origine e di raggio rispettivamente 1 e 2. Posto $B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r\}$, si ha $D = \overline{B}_2 \setminus B_1$, da cui:

$$\int \int_D x^2 dx dy = \int \int_{B_2} x^2 dx dy - \int \int_{B_1} x^2 dx dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_{\gamma_i} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \int \int_{B_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente B_i .

Nel nostro caso, determiniamo P, Q in modo tale che l'integranda del membro di destra sia pari ad x^2 . Una scelta possibile è porre $Q(x, y) = x^3/3, P(x, y) = 0$. Si ha quindi:

$$I := \frac{1}{3} \oint_{\gamma_2} x^3 dy - \frac{1}{3} \oint_{\gamma_1} x^3 dy.$$

Parametizziamo γ_i per mezzo di coordinate polari. Si ha allora

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta)^3 \cdot (2 \cos \theta) d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \cdot (\cos \theta) d\theta = 5 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 d\theta = \frac{5}{16} \int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2)^2 d\theta \\ &= \frac{5}{16} \int_0^{2\pi} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4 + 2 + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta}) d\theta \\ &= \frac{5}{8} \int_0^{2\pi} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) d\theta = \frac{15}{4} \pi. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale $15\pi/4$.

Esercizio 7.5. Sia $B(x, y, z) = (1 - \sin x, -1, z \cos x)$ un campo magnetico indipendente dal tempo. Verificare che $\operatorname{div} B = 0$ e trovarne un potenziale vettore A .

Svolgimento. Si ha $\operatorname{div} B(x, y, z) = -\cos x + \cos x = 0$, pertanto il campo ha divergenza nulla. Per calcolare un potenziale vettore, essendo \mathbb{R}^3 stellato rispetto all'origine, si applica la formula:

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \int_0^1 s B(sx, sy, sz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ds = \int_0^1 s \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 1 - \sin(sx) & x \\ \vec{e}_2 & -1 & y \\ \vec{e}_3 & sz \cos(sx) & z \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^1 s \cdot \begin{pmatrix} -z -szy \cos(sx) \\ -(1 - \sin(sx))z + szx \cos(sx) \\ (1 - \sin(sx))y + x \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^1 [-sz - s^2zy \cos(sx)] ds \\ \int_0^1 [-(1 - \sin(sx))sz + s^2zx \cos(sx)] ds \\ \int_0^1 [(1 - \sin(sx))sy + sx] ds \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_1(x, y, z) \\ A_2(x, y, z) \\ A_3(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo le tre componenti di A :

$$\begin{aligned}
 A_1(x, y, z) &= \int_0^1 [-sz - s^2zy \cos(sx)] ds = - \left[\frac{s^2}{2} z \right]_{s=0}^{s=1} - zy \int_0^1 s^2 \cos(sx) ds \\
 &= -\frac{z}{2} - zy \left(\left[\frac{\sin sx}{x} s^2 \right]_{s=0}^{s=1} - \frac{2}{x} \int_0^1 s \sin sx ds \right) \\
 &= -\frac{z}{2} - \frac{zy \sin x}{x} + \frac{2zy}{x} \int_0^1 s \sin sx ds \\
 &= -\frac{z}{2} - \frac{zy \sin x}{x} + \frac{2zy}{x} \left(\left[-s \frac{\cos sx}{x} \right]_{s=0}^{s=1} + \frac{1}{x} \int_0^1 \cos sx ds \right) \\
 &= -\frac{z}{2} - \frac{zy \sin x}{x} - \frac{2zy \cos x}{x^2} + \frac{2zy}{x^3} \int_0^x \cos \theta d\theta \\
 &= -\frac{z}{2} - \frac{zy \sin x}{x} - \frac{2zy \cos x}{x^2} + \frac{2zy \sin x}{x^3}.
 \end{aligned}$$

Sfruttando i passaggi precedenti:

$$\begin{aligned}
 A_2(x, y, z) &= \int_0^1 [-(1 - \sin(sx))sz + s^2zx \cos(sx)] ds. \\
 &= - \left[\frac{s^2}{2} z \right]_{s=0}^{s=1} + z \int_0^1 s \sin(sx) ds + zx \int_0^1 s^2 \cos(sx) ds. \\
 &= -\frac{z}{2} - \frac{z \cos x}{x} + \frac{z \sin x}{x^2} + z \sin x + \frac{2z \cos x}{x} - \frac{2z \sin x}{x^2} \\
 &= -\frac{z}{2} + \frac{z \cos x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) z \sin x.
 \end{aligned}$$

Il terzo integrale è:

$$\begin{aligned}
 A_3(x, y, z) &= \int_0^1 [(1 - \sin(sx))sy + sx] ds = \int_0^1 [s(x + y) - sy \sin(sx)] ds \\
 &= \left[\frac{s^2}{2} (x + y) \right]_{s=0}^{s=1} - y \int_0^1 s \sin(sx) ds \\
 &= \frac{x + y}{2} + \frac{y \cos x}{x} - \frac{y \sin x}{x^2}
 \end{aligned}$$

Verifichiamo a titolo di prova il risultato ottenuto. Per definizione si ha:

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right),$$

e d'altra parte:

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = -\frac{z}{2} - \frac{z \sin x}{x} - \frac{2z \cos x}{x^2} + \frac{2z \sin x}{x^3}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\frac{1}{2} - \frac{y \sin x}{x} - \frac{2y \cos x}{x^2} + \frac{2y \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial x} &= z \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{x} + z \frac{d}{dx} \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sin x \right) = -\frac{z \sin x}{x} - \frac{z \cos x}{x^2} + \frac{2z \sin x}{x^3} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) z \cos x \\ &= -\frac{z \sin x}{x} - \frac{2z \cos x}{x^2} + \frac{2z \sin x}{x^3} + z \cos x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \frac{1}{2} + y \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{x} - y \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{y \sin x}{x} - \frac{y \cos x}{x^2} - \frac{y \cos x}{x^2} + \frac{2y \sin x}{x^3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{y \sin x}{x} - \frac{2y \cos x}{x^2} + \frac{2y \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

Si ha dunque:

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sin x \right) = 1 - \sin x$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{y \sin x}{x} - \frac{2y \cos x}{x^2} + \frac{2y \sin x}{x^3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{y \sin x}{x} - \frac{2y \cos x}{x^2} + \frac{2y \sin x}{x^3} \right) = -1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= \left(-\frac{z \sin x}{x} - \frac{2z \cos x}{x^2} + \frac{2z \sin x}{x^3} + z \cos x \right) - \left(-\frac{z \sin x}{x} - \frac{2z \cos x}{x^2} + \frac{2z \sin x}{x^3} \right) \\ &= z \cos x \end{aligned}$$

Quindi $\text{rot}A(x, y, z) = (1 - \sin x, -1, z \cos x) = B(x, y, z)$ e la soluzione è stata verificata essere corretta.

Esercizio 7.6. Siano dati i seguenti sottinsiemi di \mathbb{R}^3 :

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

$$\gamma = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

e sia

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y}{1+z^2}, x^5 z^{100} - y, z + x^2 \right)$$

(1) si usi il teorema della divergenza per calcolare:

$$I := \int_S F \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

dove \hat{n} è la normale esterna alla superficie chiusa $\Sigma = S \cup D$;

(2) Detta ω_F^1 la 1-forma differenziale canonicamente associata a F , si calcoli

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1$$

dove γ^+ è la curva γ orientata in senso antiorario nel piano $z = 0$;

(3) si verifichi il teorema di Stokes per il campo F sulla superficie S .

Svolgimento.

Indichiamo con $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ il volume delimitato da Σ , denoteremo poi $F = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_S F \cdot \hat{n} \, d\sigma + \int_D F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

Si ha poi

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 0.$$

Pertanto:

$$\int_S F \cdot \hat{n} \, d\sigma = - \int_D F \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

Sulla superficie D si ha che la normale uscente da C è $\hat{n} = (0, 0, -1)$ e $F = (y, -y, x^2)$, quindi:

$$\int_S F \cdot \hat{n} \, d\sigma = - \int_D F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_D x^2 \, dx dy$$

Per calcolare l'ultimo integrale, utilizziamo la formula di Green:

$$\oint_{\gamma} (P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy) = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente D .

Nel nostro caso, determiniamo P , Q in modo tale che l'integranda del membro di destra sia pari ad x^2 . Una scelta possibile è porre $Q(x, y) = x^3/3$, $P(x, y) = 0$. Si ha quindi:

$$I := \frac{1}{3} \oint_{\gamma} x^3 \, dy.$$

Parametizziamo γ per mezzo di coordinate polari. Si ha allora

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \cdot \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \, d\theta = \frac{1}{3 \cdot 16} \int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{3 \cdot 16} \int_0^{2\pi} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4 + 2 + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta}) \, d\theta \\ &= \frac{1}{3 \cdot 8} \int_0^{2\pi} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) \, d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale $I = \frac{\pi}{4}$.

(2) ω_F^1 è la 1-forma differenziale associata al campo vettoriale F ,

$$\omega_F^1(x) = F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dz + F_3(x, y, z) dz.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma} \omega_F^1(x) &= \int_{+\gamma} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dz + F_3(x, y, z) dz \\ &= \int_{+\gamma} y dx - y dy \end{aligned}$$

Passando alla rappresentazione di γ in coordinate polari, si ha $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, quindi:

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma} \omega_F^1(x) &= \int_{+\gamma} y (dx - dy) = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot (-\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta = - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

(3) Per verificare il teorema di Stokes è necessario calcolare:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &:= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), \\ &= \left(-100x^5 z^{99}, \frac{-2yz}{1+z^2} - 2x, 5x^4 z^{100} - \frac{1}{1+z^2} \right) \end{aligned}$$

In generale la divergenza di un rotore è nulla, pertanto, per il teorema della divergenza:

$$0 = \int_C \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) dx dy dz = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F d\sigma = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma + \int_D \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma,$$

da cui si deduce:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma = - \int_D \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma,$$

Sulla superficie D si ha che la normale uscente da C è $\hat{n} = (0, 0, -1)$ e $\operatorname{rot} F = (0, -2x, -1)$, quindi:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma = - \int_D \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma = \int_D (-1) dx dy$$

L'ultimo integrale è l'opposto dell'area di D , pertanto vale $-\pi$. Ricordando il risultato del punto precedente, si ha:

$$\int_{+\gamma} \omega_F^1(x) = -\pi = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} d\sigma,$$

e questo porge la verifica richiesta.

Esercizio 7.7. Calcolare il seguente integrale:

$$I_1 := \int_{S_1} F \cdot \hat{n} d\sigma,$$

dove $F := (xz, xy, yz)$ e $S_1 := \partial\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Svolgimento. Posto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, $S_1 = \partial C$. Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\int_{S_1} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_C (x + y + z) \, dx dy dz.$$

Il calcolo dell'integrale triplo non presenta particolari difficoltà:

$$\begin{aligned} \int_C (x + y + z) \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} \left[\frac{x^2}{2} + yx + zx \right]_{x=0}^{x=1-z-y} \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{(1-z-y)^2}{2} + (y+z)(1-z-y) \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-z-y)(1+y+z) \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-(z+y)^2) \, dy \, dz \stackrel{w=y+z}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_z^1 (1-w^2) \, dw \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[w - \frac{w^3}{3} \right]_{w=z}^{w=1} \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - z + \frac{z^3}{3} \right) \, dz \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (2 - 3z + z^3) \, dz = \frac{1}{6} \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Quindi $I_1 = 1/8$.

Esercizio 7.8. Sia dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y^2, 0, x - y)$. Calcolare il flusso del rotore di F attraverso la porzione di superficie cartesiana S di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$, con $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (il versore normale alla superficie è quello indotto dalla parametrizzazione cartesiana standard).

Si calcoli il precedente flusso usando il teorema di Stokes.

Svolgimento. La parametrizzazione cartesiana di S è

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y)) = (x, y, 1 - x^2 - y^2).$$

S ha equazione $G(x, y) = x^2 + y^2 + z - 1 = 0$. La direzione della normale è data da:

$$\nabla G(x, y) = (2x, 2y, 1).$$

Per stabilire se $\hat{n} = \nabla G = ((\nabla G)_1, (\nabla G)_2, (\nabla G)_3)$ o $\hat{n} = -\nabla G$, è necessario verificare l'orientamento della superficie calcolando

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \\ (\nabla G)_1 & (\nabla G)_2 & (\nabla G)_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix} = 4y^2 + 4x^2 > 0$$

Poiché il determinante è positivo, si ha $\hat{n} = \nabla G(x, y) = (2x, 2y, 1)$. Calcoliamo ora il rotore di F .

$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & 0 & x - y \end{pmatrix} = (-1, -1, -2y)$$

Pertanto per quanto riguarda il flusso richiesto si ha:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_D (-1, -1, -2y) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx dy = - \int_D 2x + 4y \, dx dy$$

Passando in coordinate polari, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, si ottiene:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = - \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2r(\cos \theta + 2 \sin \theta) r \, d\theta \, dr = - \int_0^1 2r^2 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos \theta - 2 \sin \theta) \, d\theta = \frac{2}{3}.$$

Calcoliamo ora il flusso utilizzando il teorema di Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \oint_{+\partial S} F \, d\gamma.$$

Parametriamo il bordo di D in senso antiorario: esso è dato da $\gamma_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ per $-\pi/2 < \theta < 0$, $\gamma_2(t) = (1 - t, 0)$ per $0 < t < 1$ e $\gamma_3(s) = (0, -s)$ per $0 < s < 1$. Il bordo di S orientato in senso positivo sarà allora l'immagine delle tre curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mediante la parametrizzazione ϕ di S :

$$\phi \circ \gamma_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0);$$

$$\phi \circ \gamma_2(t) = (1 - t, 0, 1 - (1 - t)^2) = (1 - t, 0, 2t - t^2);$$

$$\phi \circ \gamma_3(s) = (0, -s, 1 - s^2).$$

Pertanto si avrà:

$$\oint_{+\partial S} F \, d\gamma = \int_{\phi \circ \gamma_1} F \, d\gamma + \int_{\phi \circ \gamma_2} F \, d\gamma + \int_{\phi \circ \gamma_3} F \, d\gamma$$

dove:

$$\int_{\phi \circ \gamma_1} F \, d\gamma = \int_{-\pi/2}^0 (\sin^2 \theta, 0, \cos \theta - \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta = - \int_{-\pi/2}^0 \sin^3 \theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta = 1 - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$\stackrel{w=\cos \theta}{=} 1 - \int_1^0 -w^2 \, dw = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\phi \circ \gamma_2} F \, d\gamma = \int_0^1 (0, 0, 1 - t) \cdot (-1, 0, 2 - 2t) \, dt = \int_0^1 2(1 - t)^2 \, dt = \frac{2}{3}.$$

$$\int_{\phi \circ \gamma_3} F \, d\gamma = \int_0^1 (-s^2, 0, s) \cdot (0, -1, -2s) \, dt = \int_0^1 -2s^2 \, dt = -\frac{2}{3}.$$

Sommando i tre contributi si ottiene:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \oint_{+\partial S} F \, d\gamma = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

che verifica così il calcolo diretto svolto in precedenza.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Giuseppe De Marco, *Analisi 2/1*, Decibel Zanichelli, Padova, 1993.
- [2] ———, *Analisi 2/2*, Decibel Zanichelli, Padova, 1993.

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI VERONA

STRADA LE GRAZIE 15 - I-37134 VERONA, ITALY.

E-mail address: `antonio.marigonda@univr.it`