Diario del corso di Analisi Matematica 2

G. Orlandi

a.a. 2011-12

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 5/10/11 (2 ore). Proprietà assiomatiche di una funzione distanza su un insieme: positività, simmetria, diseguaglianza triangolare. Spazi metrici. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ dotati della distanza euclidea. Distanza geodetica sulla sfera.

Proprietà assiomatiche di una norma su uno spazio vettoriale: positività, positiva 1-omogeneità, disuguaglianza triangolare. Esempi: il valore assoluto su $\mathbb{R}$, la norma euclidea $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma ℓ^∞ su $\mathbb{R}^n$: per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_i|\,,\ i = 1, ..., n.\}$. Defnizione di norma ℓ^1 su $\mathbb{R}^n$: $||x||_{\ell^1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Una norma $||\cdot||$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V definita da $d(x, y) = ||x - y||$ per $x, y \in V$. Se V è uno spazio euclideo, dotato cioè di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, quest'ultimo definisce una norma (detta norma euclidea) $||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$.

Lo spazio vettoriale $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ può essere dotato della norma ℓ^∞ (detta norma della convergenza uniforme) definita da $||f||_{\ell^\infty} = \sup\{|f(t)|\,,\ t \in [a, b]\}$. Si può definire su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ anche la norma ℓ^1 (detta norma della convergenza in media) ponendo $||f||_{\ell^1} = \int_a^b |f(t)|dt$. Definizione di norma ℓ^2 su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$:

$$||f||_{\ell^2} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Si tratta di una norma euclidea, indotta dal prodotto scalare $\langle f, g\rangle_{\ell^2} = \int_a^b f(t)g(t)dt$, definito per $f, g \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$. Questa norma (detta della convergenza in media quadratica) è spesso usata in problemi di minima distanza (cfr. *metodo dei minimi quadrati*).

Osservazione: sia $f \in C^0([a, b])$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$. Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Da ciò discende che se $g \in C^0([a, b])$ ha norma ℓ^1 (o ℓ^2) nulla, allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Lezione del 6/10/11 (1 ora) Motivazione dell'uso della norma ℓ^2 per problemi di minima distanza (generalizzazione del *metodo dei minimi quadrati*, in uso ad es. per il calcolo di regressioni lineari in statistica, nei modelli di apprendimento, la regolarizzazione di Tychonoff, l'approssimazione mediante sviluppi di Fourier, JPEG...), come ad esempio l'approssimazione di una funzione $f \in C^0([a,b])$ mediante polinomi di grado (inferiore o uguale a) n. Il polinomio che realizza la minima distanza (ovvero la migliore approssimazione in media quadratica) di f è la proiezione ortogonale di f (rispetto al prodotto scalare ℓ^2) sul sottospazio finito-dimensionale $V :=$span$< v_0, v_1, ..., v_n >$, dove per $i = 0, 1, ..., n$ si è posto $v_i(x) = x^i$, $x \in [a,b]$. Pertanto, il polinomio P_f che realizza la minima distanza è dato da

$$P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle f, \, e_i \rangle_{\ell^2([a,b])} \cdot e_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b f(t) e_i(t) dt \right] \cdot e_i(x) \, , \quad x \in [a,b],$$

dove $\{e_i\}_{i=0,...,n}$ è una base ortonormale di V, costruibile applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ di V. A lezione abbiamo svolto il caso particolare $[a,b] = [0,1]$, $n = 1$.

Osservazione: $C^0([a,b];\mathbb{R})$ (e in genere gli spazi di funzioni che si considerano in analisi) è uno spazio vettoriale infinito dimensionale: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $E_n = \{1, x, ..., x^n\}$ è linearmente indipendente, in quanto una combinazione lineare non nulla di elementi di E è un polinomio, e per il Teorema fondamentale dell'Algebra si annulla solo in un numero finito di punti (inferiore o uguale ad n), e non può pertanto coincidere con la funzione identicamente nulla su $[a,b]$.

Lezione del 7/10/11 (3 ore). Nozione di limite di successione in uno spazio metrico (X,d): dati $x_n, x_0 \in X$, si dice che $x_n \to x_0$ in X se $d(x_n, x_0) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione di funzione continua tra spazi metrici: $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Caratterizzazione della continuità: $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ in X si ha $f(x_n) \to f(x_0)$ in Y.

Esempio di una funzione continua su $C^0([a,b])$: la funzione $F : C^0([a,b];\mathbb{R}) \to C^0([a,b];\mathbb{R})$ che associa ad f la sua funzione integrale $F(f)$ definita da $F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una funzione continua rispetto alla norma ℓ^∞. Infatti, si ha la seguente stima:

$$\begin{aligned} |F(f)(x) - F(g)(x)| = |F(f-g)(x)| &= | \int_a^x [f(t) - g(t)] \, dt| \\ &\leq \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \leq \int_a^x ||f - g||_\infty dt \\ &\leq ||f - g||_\infty \cdot (x - a) \qquad \forall \, a \leq x \leq b \, , \end{aligned}$$

da cui i ricava, passando al sup su $x \in [a,b]$ ad ambo i membri,

$$||F(f) - F(g)||_\infty \leq (b-a) ||f - g||_\infty \, ,$$

da cui si deduce che se $||f-g||_\infty \to 0$, allora $||F(f)-F(g)||_\infty \to 0$. ovvero la continuità della funzione F.

Topologia in uno spazio metrico (X,d). Definizione di intorno sferico aperto (o palla aperta) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$: $B(x,r) = \{y \in X\ ,\ d(x,y) < r\}$. Un insieme $A \subset X$ si dice aperto se $\forall\, x \in A\ \exists\, r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A$. La collezione dei sottoinsiemi aperti di X si dice topologia di X.

Un insieme $C \subset X$ si dice chiuso se il complementare $X \setminus C$ è aperto. Caratterizzazione: C è chiuso se per ogni successione di punti $x_n \in C$ convergente a $\bar{x} \in X$ si ha che $\bar{x} \in C$.

Due distanze su X si dicono *equivalenti* se inducono la stessa topologia su X (ovvero gli stessi insiemi aperti). In particolare, una successione in X converge rispetto alla prima distanza se e solo se converge rispetto alla seconda distanza, e una funzione definita su X è continua rispetto alla prima distanza se e solo se è continua rispetto alla seconda distanza.

Si può dimostrare che due distanze d_1, d_2 sono equivalenti se e solo se per ogni $B_1(x,r)$ (palla aperta relativa alla distanza d_1) esiste $B_2(x,s)$ (palla aperta relativa alla distanza d_2) interamente contenuta in $B_1(x,r)$ e reciprocamente.

Analogamente, due norme su uno spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se le distanze associate sono equivalenti. Caratterizzazione: due norme N_1, N_2 su V sono equivalenti se e solo se esistono delle costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che per ogni $v \in V$ si abbia $N_2(v) \leq C_1 \cdot N_1(v)$ e $N_1(v) \leq C_2 \cdot N_2(v)$ (ovvero la norma N_1 controlla la norma N_2 e viceversa).

In $\mathbb{R}^n$ (o in uno spazio vettoriale normato finito dimensionale) *tutte* le norme sono equivalenti. In particolare per $v \in \mathbb{R}^n$ si ha (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$):

$$||v||_\infty \leq ||v|| \leq ||v||_1 \leq \sqrt{n}||v|| \leq n||v||_\infty .$$

Lezione del 12/10/11 (2 ore). Su uno spazio V a dimensione infinita, le norme non possono essere tutte equivalenti tra di loro. Ad esempio, su $C^0([a,b])$ la norma ℓ^∞ controlla la norma ℓ^1, (ovvero $||f||_{\ell^1([a,b])} \leq (b-a) \cdot ||f||_{\ell^\infty([a,b])}$ per ogni $f \in C^0([a,b])$), ma la norma ℓ^1 non controlla la norma ℓ^∞, come dimostra l'esempio della successione di funzioni $f_n \in C^0([0,1])$, definite ponendo $f_n(x) = n{\cdot}x$ per $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = 2-n{\cdot}x$ per $1/n \leq x \leq 2/n$, e $f_n(x) = 0$ per $2/n \leq x \leq 1$, che converge in media alla funzione identicamente nulla ($||f_n||_{\ell^1} = 1/n \to 0$ per $n \to +\infty$) ma non vi converge uniformemente (sia ha $||f_n||_{\ell^\infty} = 1$ per ogni n, quindi non può tendere a 0).

La norma $\ell^2([a,b])$ controlla la norma $\ell^1([a,b])$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Definizione di convergenza uniforme: date $f, f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che le f_n convergono uniformemente ad f in I se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \equiv \lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} = 0\,.$$

Defininzione di convergenza puntuale: le f_n convergono puntualmente ad f in I se $\forall\, x \in I$, $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale, mentre il viceversa non è vero in generale.

Proprietà della convergenza uniforme: siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ tali che $||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} \to 0$ per $n \to +\infty$.
1) se le f_n sono continue, allora f è continua.
2) se $I = [a, b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).
3) se $f_n \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ (ossia $f_n, f_n' \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$) e $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente in $[a, b]$, allora $g = f'$ su $[a, b]$.

Lezione del 13/10/11 (1 ora). Dimostrazione dei punti 1) 2) 3) della lezione precedente:

2) Dall'esempio della lezione del 7/10/11 (continuità della trasformata integrale F) si deduce, ponendo $g = f_n$ ed $x = b$, che

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq (b - a) \cdot ||f_n - f||_{\ell^\infty([a,b])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty \,.$$

3) Si ha $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$, ed il primo membro converge a $f(x) - f(a)$ perchè le f_n in particolare convergono puntualmente, mentre il secondo membro converge a $\int_a^b g(t)dt$ per la convergenza uniforme di f_n' su $[a, b]$ ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

1) Per ogni $\epsilon > 0$ si ha, per ogni $n > n_0$, $||f_n - f||_\infty < \epsilon$. Sia $x_0 \in [a, b]$ e fissato $n > n_0$, sia $\delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (tale δ esiste per la continuità di f_n). Allora, per ogni $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$, si ha, per la diseguaglianza triangolare,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon \,,$$

ovvero f è continua in x_0, per ogni $x_0 \in [a, b]$.

Nel caso particolare delle serie di funzioni, cioè quando $f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$, con $u_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, le proprietà della convergenza uniforme si traducono come segue: date $u_k \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$, se la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$, allora converge ad una funzione continua. Inoltre, vale

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty u_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b u_k(t)dt \qquad \text{(integrazione per serie).}$$

Se inoltre $u_k \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ e $\sum_{k=0}^\infty u_k'(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$ allora

$$\left(\sum_{k=0}^\infty u_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^\infty u_k'(x) \qquad \text{(derivazione per serie).}$$

Lezione del 14/10/11 (3 ore). Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Una successione convergente è di Cauchy. Spazi metrici completi. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$, con la distanza euclidea (o una qualunque norma). Completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dotato della norma $||\cdot||_\infty$.

Dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{f_n\} \subset C^0([a,b];\mathbb{R})$, per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\ n_0$ tale che $\forall\, n,m > n_0$ $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. In particolare, per ogni $a \le x \le b$ si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, dunque $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\forall\ a \le x \le b$, ed è dunque convergente per la completezza di $\mathbb{R}$. Detto $f(x) = \lim_m f_m(x)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon\ \forall\, n > n_0$, $\forall\ a \le x \le b$. Passando al sup su $x \in [a,b]$ si ottiene $||f_n - f||_\infty \le \epsilon\ \forall\, n > n_0$, ovvero $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$. Inoltre, $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ in quanto limite uniforme di funzioni continue. Pertanto la successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ rispetto alla norma ℓ^∞. □

Osservazione (non svolto a lezione): sia $L^\infty(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\,,\ ||f||_\infty < +\infty\}$ lo spazio delle funzioni limitate, definite su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. La prima parte della dimostrazione della completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dimostra in realtà che $L^\infty(I;\mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞ è uno spazio metrico completo.

Osservazione: lo spazio $C^0([a,b])$ *non è completo* rispetto alla convergenza in media, o in media quadratica: si consideri ad esempio la successione $f_n \in C^0([-1,1])$ e la funzione discontinua f definite rispettivamente da $f_n(x) = 0$ se $-1 \le x \le -1/n$, $f_n(x) = nx + 1$ se $-1/n \le x \le 0$, $f_n(x) = 1$ se $0 \le x \le 1$, e da $f(x) = 0$ per $1 \le x < 0$ e $f(x) = 1$ se $0 \le x \le 1$. Si ha $||f_n - f||_{\ell^1} = \int_{-1/n}^0 (nx+1)\,dx = 1/2n \to 0$. Quindi f_n è una successione di Cauchy rispetto alla norma ℓ^1 (in quanto successione convergente), ma il limite f non è una funzione continua.

Osservazione: lo spazio metrico completo rispetto alla norma ℓ^1 è lo spazio delle funzioni sommabili *secondo Lebesgue* $L^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ \int_a^b |f(x)|dx < +\infty\}$. Analogamente è completo rispetto alla norma ℓ^2 lo spazio $L^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty\}$ delle funzioni a quadrato sommabile *secondo Lebesgue*.

Un criterio utile per la convergenza uniforme di una serie di funzioni è il criterio di convergenza totale (di Weierstrass). Lo enunciamo nel quadro più generale degli spazi normati.

Teorema della convergenza totale: sia $(X, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato completo. Sia $\{u_k\} \subset X$. Se la serie delle norme $\sum_{k=0}^\infty ||u_k||$ è convergente in $\mathbb{R}$, allora la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k$ è convergente in X, ovvero $\lim_n ||\sum_{k=n}^\infty u_k|| = 0$.

Dimostrazione: detta $y_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la successione delle somme parziali, dimostriamo che $\{y_n\}$ è di Cauchy in X: si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$||y_n - y_m|| = ||\sum_{k=n+1}^m u_k|| \le \sum_{k=n+1}^m ||u_k|| < \epsilon \qquad \text{per ogni } m > n > n_0\,,$$

dato che la successione numerica $s_n = \sum_{k=0}^n ||u_k||$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ipotesi, e $\sum_{k=n+1}^m ||u_k|| = s_m - s_n$. □

Applicazione alla convergenza delle serie di potenze. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze reali centrata in $x_0 = 0$, e sia $r > 0$ il suo raggio di convergenza, ovvero $r^{-1} = \limsup_k |a_k|^{1/k}$. La serie converge uniformemente in $[-R, R]$ per ogni $0 < R < r$, e quindi in particolare converge ad una funzione continua.

Dimostrazione: si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{|x| \leq R} |a_k| \cdot |x|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k \ < +\infty \,,$$

poichè per il criterio della radice

$$\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k| R^k} = \left(\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right) \cdot R = r^{-1} R < 1 \,.$$

Si può dunque applicare il criterio di convergenza totale nello spazio $C^0([-R, R]; \mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞. $\square$

In particolare, per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie. Si può così calcolare ad esempio

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b^{2k+1} - a^{2k+1})}{(2k+1) k!} \,.$$

Inoltre, dato che la serie delle derivate di una serie di potenze è a sua volta una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza, vale anche il teorema di derivazione per serie. Iterando il ragionamento si deduce che una serie di potenze converge ad una funzione di classe C^∞ (ovvero dotata di derivate continue di ogni ordine).

Osservazione: la regola di derivazione per serie di potenze può essere utilizzata ad esempio per la ricerca di soluzioni di equazioni differenziali sotto forma di serie di potenze $\sum a_k x^k$ (esempio: equazioni lineari a coefficienti polinomiali come l'equazione di Bessel (di ordine n) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$), trasformando l'equazione differenziale in un sistema triangolare per i coefficienti a_k.

Oservazione: le stesse proprietà di convergenza si ottengono per le serie di potenze complesse $\sum c_k (z - z_0)^k$.

Lezione del 19/10/11 (2 ore). Sviluppi in serie di Fourier per funzioni 2π-periodiche. Ad una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ si associa la funzione$S_n(f)$ che rappresenta la migliore approssimazione in norma $\ell^2([-\pi, \pi])$ di f mediante polinomi trigonometrici di grado (inferiore o uguale a) n, ovvero un elemento dello spazio $(2n+1)$-dimensionale

$$X = \text{span} < 1, \quad \cos kt \,, \quad \sin kt >_{k=1,\dots,n} \;.$$

Osservando che la base di X è ortogonale, si ottiene la formula di rappresentazione $S_n(f)(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$, con i coefficienti di Fourier di f dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, ..., n.$$

Teorema di Fourier: se $f \in L^2([-\pi,\pi])$ (ad es. f continua a tratti) allora $||f - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \to 0$ per $n \to +\infty$, ovvero la serie di Fourier di f, definita da $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)$ converge in media quadratica ad f.

Lezione del 20/10/11 (1 ora). Diseguaglianza di Bessel:

$$||f - S_n(f)||^2_{\ell^2([-\pi.\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \left(\pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, facendo tendere $n \to +\infty$ si otiene il decadimento a zero dei coefficienti di Fourier $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$ (lemma di Riemann-Lebesgue). Dal Teorema di Fourier si ottiene inoltre l'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 .$$

Forma complessa dei coefficienti di Fourier: posto $c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}$ per, $c_{-j} = a_{-j} + ib_{-j}$ per $j > 0$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, si ha

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikt}, \qquad \text{con } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt .$$

Coefficienti di Fourier delle funzioni pari e delle funzioni dispari.

Osservazione: la norma ℓ^2 (come la norma ℓ^1), essendo una norma integrale, non distingue due funzioni i cui valori differiscono su un numero finito di punti del dominio (in particolare una almeno delle due funzioni non può essere continua), quindi non è una norma in senso stretto su $L^2([a,b])$ (rispettivamente $L^1([a,b])$), mentre lo è in senso stretto su $C^0([a,b])$ (cfr. osservazione a margine della Lezione del 5/10/11). Il Teorema di Fourier afferma che la differenza in norma ℓ^2 tra la serie di Fourier di f e la funzione stessa f è nulla: per quanto osservato, questo non significa a priori che la serie di Fourier converga puntualmente ad f su tutto l'intervallo $[-\pi,\pi]$.

Esempio (onda quadra): sia f definita da $f(x) = 1$ se $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ se $-\pi < x < 0$ e siano $f(0), f(\pm\pi)$ definite ad arbitrio. La serie di Fourier di f converge puntualmente ad f per $x \neq 0, \pm\pi$. Inoltre, in $0, \pm\pi$ la sua somma vale zero, indipendentemente dai valori assunti da $f(0), f(\pm\pi)$.

Lezione del 21/10/11 (3 ore). Convergenza puntuale delle serie di Fourier: se (l'estensione periodica di) f è continua a tratti in $\mathbb{R}$ (e le discontinuità sono di tipo salto), e per ogni x in cui f è continua esistono finite la derivata destra e sinistra, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente alla media dei limiti destro e sinistro di f (in particolare converge ad f nei punti di continuità di f).

Coefficienti di Fourier della derivata: sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$ derivabile con derivata $f' \in L^2([-\pi,\pi])$. Detti a_k, b_k (o, in forma complessa, c_k) i coefficienti di Fourier di f, e rispettivamente α_k, β_k e γ_k i coefficienti di Fourier di f' si ha la relazione $\alpha_0 = 0$,

$\alpha_k = kb_k$, $\beta_k = ka_k$ e $\gamma_k = (-ik)c_k$, ossia ad un'operazione differenziale su f corrisponde un'operazone algebrica (moltiplicazione) sui suoi coefficienti di Fourier.

Dall'identità di Parseval si ottiene in particolare

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt\,,$$

da cui si deduce che quanto più una funzione è regolare (ossia quante più derivate possegga) tanto più rapido è il decadimento a zero dei suoi coefficienti di Fourier.

Convergenza uniforme delle serie di Fourier: sia f 2π- periodica, di classe C^1 a tratti (ossia f continua a tratti e con derivata continua a tratti. In realtà basta f continua a tratti e $f' \in L^2([-\pi,\pi])$). Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in ogni intervallo $[a,b]$ in cui f è continua.

Dimostrazione nel caso $f \in C^0([-\pi,\pi])$ e $f' \in L^2([-\pi,\pi])$: dallo studio della convergenza totale della serie di Fourier di f si ricava

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(k|a_k| + k|b_k|) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{2}(a_k^2 + b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)| dt \, < +\infty\,,\end{aligned}$$

da cui la convergenza uniforme della serie di Fourier su $[-\pi,\pi]$ (e, per periodicità, su tutto $\mathbb{R}$) ad una funzione periodica $g \in C^0([-\pi,\pi])$. Questa coincide con f, come si può dedurre invocando il teorema di convergenza puntuale, o quello di Fourier di convergenza in media quadratica: si ha infatti

$$||g - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \leq \sqrt{2\pi}||g - S_n(f)||_{\ell^\infty([-\pi,\pi])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

ossia $||g - f||_{\ell^2([-\pi,\pi])} = 0$, come si deduce da

$$||g - f||_{\ell^2([-\pi,\pi])} \leq ||g - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} + ||S_n(f) - f||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Dalla condizione $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - f(t)|^2 dt = 0$ si deduce, per la continuità di $|g(t) - f(t)|$, che $|g(t) - f(t)| = 0$ per ogni $t \in [-\pi,\pi]$, ossia $g = f$.

Il principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli): dato (X,d) spazio metrico completo, $T : X \to X$ una contrazione (ossia $\exists\, K < 1$ tale che $d(T(x),T(y)) \leq K \cdot d(x,y)\ \forall\, x,y \in X$), allora esiste un'unico punto fisso $\bar{x} \in X$ di T (ovvero un'unica soluzione $\bar{x}$ in X dell'equazione $x = T(x)$).

La dimostrazione è costruttiva, mediante uno schema iterativo, e fornisce anche una stima dell'errore. Sia $x_0 \in X$, definiamo per ricorrenza la successione $x_{n+1} = T(x_n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Due i casi: o $x_{n+1} = x_n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, e quindi $x_n = x_{n+1} = T(x_n)$ è punto fisso di T, oppure rimane definita una successione $\{x_n\} \subset X$, che risulta essere di Cauchy in X. Infatti, si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq K^n \cdot d(x_1, x_0)\,,$$

da cui si deduce che, per $m > n+1 > n_0$, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1} K^j \cdot d(x_1, x_0) = K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-n-1} K^j \\ &\leq K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{\infty} K^j \leq K^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1-K} < \epsilon \end{aligned}$$

per n_0 sufficientemente grande, e per ogni $m > n+1 > n_0$, ovvero $\{x_n\}$ è di Cauchy in X. Sia $\lim_m x_m = \bar{x} \in X$ per la completezza di X.

Passando al limite per $m \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene la stima dell'errore $d(\bar{x}, x_n) \leq K^n \frac{d(x_1,x_0)}{1-K}$. Inoltre, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione di ricorrenza $x_{n+1} = T(x_n)$, dato che $x_{n+1} \to \bar{x}$ e $T(x_n) \to T(\bar{x})$ per la continuità di T (data dalla stima $d(T(\bar{x}), T(x_n)) \leq K \cdot d(\bar{x}, x_n)$), si deduce $\bar{x} = T(\bar{x})$, e dunque $\bar{x}$ è un punto fisso di T.

Supponendo $\hat{x} \in X$ sia un qualunque punto fisso di T, si ha $d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T(\hat{x}), T(\bar{x})) \leq K \cdot d(\hat{x}, \bar{x})$, ossia $(1-K) \cdot d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$, da cui $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$ e dunque $\hat{x} = \bar{x}$, ovvero l'unicità del punto fisso. □

Il principio delle contrazioni si applica nelle più svariate situazioni: ad esempio, per dimostrare il Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy (per equazioni e sistemi di equazioni differenziali), oppure il Teorema del Dini delle funzioni implicite/inverse (esistenza e unicità locale per soluzioni di sistemi di equazioni algebriche non lineari), o anche per provare la dipendenza continua delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati del problema.

Funzioni vettoriali di una variabile reale: derivazione per componenti, interpretazione geometrica della derivata come vettore tangente alla curva immagine. Interpretazione fisica come vettore velocità associato alla legge oraria di un punto materiale. Equazione parametrica della retta tangente alla curva immagine: una parametrizzazione canonica è data dallo sviluppo di Taylor di f arrestato al primo ordine.

Funzioni di più variabili reali. Domini (si considereranno domini D che siano insiemi aperti, o contenuti nella chiusura di insiemi aperti). Insiemi di livello, sottolivello, sopralivello. Funzioni continue. Gli insiemi di livello di una funzione continua sono chiusi nel dominio della funzione. Grafico Γ_f di una funzione di più variabili $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\Gamma_f = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) :\ (x_1, ..., x_n) \in D,\ x_{n+1} = f(x_1, ..., x_n)\}$.

Insiemi compatti per successioni. Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un insieme compatto per successioni di $\mathbb{R}^n$ (in generale, su uno spazio metrico compatto per successioni) ammette massimo e minimo. Dimostrazione: sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D compatto per successioni. Data una successione massimizzante $\{p_n\} \subset D$ (ossia $f(p_n) \to \sup_D f$) esiste una sottosuccessione $p_{n_k} \to \bar{p} \in D$, da cui $f(p_{n_k}) \to f(\bar{p})$ per continuit'a di f. D'altra parte, si ha anche $f(p_{n_k}) \to \sup_D f$, da cui la tesi.

Definizione: dato X spazio metrico, $A \subset X$ si dice limitato se $A \subset B(x_0, r)$ per un certo $x_0 \in X$ ed $r > 0$. L'insieme A si dice totalmente limitato se $\forall\, \epsilon > 0$ esiste una ϵ-rete di A, ovvero $\exists\ x_1, ..., x_N \in X$ (con N dipendente da ϵ) tale che $A \subset \cup_j B(x_j, \epsilon)$.

Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni: in $\mathbb{R}^n$, un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato; in generale, uno spazio metrico (X, d) è compatto per successioni se e solo se è completo e totalmente limitato.

Lezione del 26/10/11 (2 ore). Derivabilità per funzioni di più variabili. Derivata direzionale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p_0 \in \Omega$: data una direzone $e \in \mathbb{R}^2$ (ossia $e = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$), la retta passante per $p_0 = (x_0, y_0)$ avente direzione e è data da $t \mapsto r(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb)$, e la derivata nella direzione e di f in p_0 è definita da $D_e f(p_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(r(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + ta, y_0 + tb)$. Se $e = (1, 0)$ (risp. $e = (0, 1)$) si pone $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (risp. $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$), e tale derivata si chiama derivata parziale rispetto a x (risp. rispetto a y). Esempi di calcolo di derivate parziali.

Interpretazione geometrica delle derivate direzionali: sia $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\,,\ (x, y) \in \Omega\,\}$ il grafico di f. La mappa $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb))$ ha come immagine la curva costituita dalla restrizione del grafico di f alla retta $r(t)$ di cui sopra, passante per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ per $t = 0$. Il vettore

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)) = (a, b, D_e f(x_0, y_0)\,),$$

applicato nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, è dunque un vettore tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la cui componente orizzontale è la direzione $e = (a, b)$, e la cui componente verticale è la derivata direzionale di f nella direzione e in p_0.

Esempio di una funzione che ammette derivate parziali ma non è continua. Esistono esempi di funzioni f che ammettono tutte le derivate direzionali in un certo punto p_0, ma non sono continue in p_0.

Funzioni differenziabili. Differenziale $df(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto $p_0 \in \Omega$. Si tratta di un'applicazione lineare che verifica

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - df(p_0) \cdot (p - p_0)|}{|p - p_0|} = 0\,.$$

In altre parole, per una funzione differenziabile in p_0 vale lo sviluppo di Taylor al primo ordine

$$f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(|p - p_0|)\,.$$

Se f è differenziabile in p_0 allora esistono le derivate direzionali di f in p_0 e si ha $D_e f(p_0) = df(p_0) \cdot e$ per ogni direzione $e \in \mathbb{R}^n$.

Se f è differenziabile in p_0, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(p_0, f(p_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è data da $x_{n+1} = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0)$, ovvero

$$x_{n+1} = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0), \quad \text{dove } p = (x_1, ..., x_n) \quad \text{e } p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}).$$

Detta $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, il piano tangente al grafico è generato dai vettori $\{e_i + e_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\}_{i=1,...,n}$ (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$). Un vettore normale al piano tangente in $(p_0, f(p_0))$ è dato dal vettore $N_{p_0} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Il differenziale $df(p_0)$ si rappresenta mediante il gradiente $\nabla f(p_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)) \in \mathbb{R}^n$, ovvero si ha $df(p_0) \cdot v = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Il gradiente individua la direzione di massima crescita di f in p_0, ossia

$$\max_{|e|=1} D_e f(p_0) = \max_{|e|=1} \langle \nabla f(p_0), e \rangle = |\nabla f(p_0)|\,, \quad \text{per } e = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}.$$

Lo schema di flusso gradiente per la determinazione di massimi locali: dato $p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \nabla f(p) \\ p(0) = p_0\,, \end{cases}$$

ovvero il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ x_i(0) = x_{0,i} & i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Detto $\bar{p} = \lim_{t \to +\infty} p(t)$, se $\bar{p} \in \Omega$ allora $\nabla f(\bar{p}) = 0$, ossia $\bar{p}$ è un punto critico, che, per una scelta generica del dato iniziale p_0 risulta essere di massimo locale. L'analogo schema $\frac{dp}{dt} = -\nabla f(p)$ per i minimi locali anche detto schema di discesa gradiente.

Lezione del 27/10/11 (1 ora). Continuità di una funzione differenziabile. Condizioni sufficienti per la differenziabilità, teorema del differenziale totale: se in un intorno $B(p_0, r)$ esistono le derivate parziali di f e sono continue in p_0, allora f è differenziabile in p_0. Dimostrazione del teorema del differenziale totale. Funzioni di classe C^1.

Differenziale di funzioni vettoriali. Se $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$ e $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha la rappresentazione mediante la matrice Jacobiana $Df(p_0) \equiv \frac{\partial\{f_1,...,f_m\}}{\partial\{x_1,...,x_n\}}(p_0)$:

$$df(p_0) \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Esempi di funzioni vettoriali: trasformazioni di coordinate. Matrice Jacobiana $\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}}$ della trasformazione in coordinate polari. Coordinate cilindriche (r,θ,z) e sferiche (r,θ,ϕ) per $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ e rispettive matrici Jacobiane.

Lezione del 28/10/11 (3 ore). Campi vettoriali. Espressione del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine: $\vec{F}(p)=-Kp/|p|^3=-Kr^{-2}\hat{\imath}_r$, dove $r=|p|$, $\hat{\imath}_r=p/|p|$ e $K>0$ opportuno.

Superfici parametriche e cartesiane, vettori tangenti, vettore normale. Data la parametrizzazione (di classe C^1) $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in\mathbb{R}^3$, con $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$, i vettori colonna della matrice Jacobiana $D\vec{r}(p_0)$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(p_0)\equiv\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(p_0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(p_0)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(p_0)\end{bmatrix}\,,\qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(p_0)\equiv\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}(p_0)\\ \frac{\partial y}{\partial v}(p_0)\\ \frac{\partial z}{\partial v}(p_0)\end{bmatrix}$$

sono vettori tangenti alla superficie $S=\{\vec{r}(u,v)\,,(u,v)\in D\}\subset\mathbb{R}^3$ nel punto $\vec{r}(p_0)\in S$, e ne generano il piano tangente qualora siano linearmente indipendenti. Un vettore $N(p_0)$ normale alla superficie in $\vec{r}(p_0)\in S$ si ottiene, in modo canonico, mediante il prodotto vettoriale $N=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.

Regola della catena per il differenziale composto: se $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $g:U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ sono funzioni differenziabili rispettivamente in $p_0\in\Omega$ e $q_0=f(p_0)\in U$, allora $h=g\circ f:\Omega\to\mathbb{R}^k$ è differenziabile in p_0 e vale $dh(p_0)=d(g\circ f)(p_0)=dg(f(p_0))\cdot df(p_0)$. In termini delle matrici Jacobiane,

$$\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0)\right]=\left[\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\right]\cdot\left[\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\right]\,,\quad\text{ossia}\quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0)=\sum_{\ell=1}^m\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\,.$$

Data una funzione $f\in C^1(D;\mathbb{R})$, e dato l'insieme di livello $f^{-1}(c)$, $c\in\mathbb{R}$, se $p_0\in f^{-1}(c)$ e $\nabla f(p_0)\neq 0$, quest'ultimo vettore risulta ortogonale a $f^{-1}(c)$ in p_0. Dimostrazione (caso $n=2$): supponendo che intorno a p_0 l'insieme di livello si possa descrivere mediante una curva parametrica $p(t)=(x(t),y(t))$ di classe C^1, detta $g(t)=f((x(t),y(t))$ la funzione composta, si ha, applicando la regola della catena:

$$0=\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=<\nabla f,\frac{dp}{dt}>\,,$$

ovvero la condizione di ortogonalità. L'ipotesi che l'insieme di livello sia parametrizzabile intorno a p_0 è sempre soddisfatta nel caso $\nabla f(p_0)\neq 0$, in virtù del Teorema delle funzioni implicite.

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana delle derivate parziali seconde.Teorema di Schwarz: se $f\in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ (ovvero esistono le derivate parziali seconde e sono continue in D) allora la matrice Hessiana $D^2f(p)=[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(p)]$ è simmetrica per ogni $p\in D$.

Sviluppo di Taylor al secondo ordine per $f \in C^2(D;\mathbb{R})$ in $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \equiv p(t) = p_0 + tv \in D$ per $0 \leq t \leq t_0$. Posto $g(t) = f(p(t))$, si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p(t))v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle\,, \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p(t))v_j v_i = \langle D^2 f(p)\cdot v,\, v\rangle\,.$$

Dallo sviluppo di Taylor $g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + o(t^2)$ si ottiene

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(p_0)\cdot(p-p_0),\, (p-p_0)\rangle + o(|p-p_0|^2)\,.$$

Studio della natura dei punti critici di $f \in C^2(D,\mathbb{R})$: se p_0 è un punto critico di f (ossia $\nabla f(p_0) = 0$), allora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine si riduce a

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\langle D^2 f(p_0)\cdot(p-p_0),\, (p-p_0)\rangle + o(|p-p_0|^2)\,.$$

Sia $R \in O(n)$ tale che $R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R =$diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di $D^2 f(p_0)$, e sia $p - p_0 = R \cdot w$, con $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned}\langle D^2 f(p_0)\cdot(p-p_0),\, (p-p_0)\rangle &= \langle D^2 f(p_0)\cdot R\cdot w,\, R\cdot w\rangle = \langle R^t\cdot D^2 f(p_0)\cdot R\cdot w,\, w\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2\,.\end{aligned}$$

Otteniamo dunque, tenendo conto che $|w|^2 = |Rw|^2 = |p-p_0|^2$,

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 + o(|w|^2)\,,$$

da cui si deduce che se gli autovalori di $D^2 f(p_0)$ sono tutti positivi (risp. negativi) allora p_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale per f. Se vi sono autovalori di segno discorde, p_0 è detto un punto di sella. Se qualche autovalore di $D^2 f(p_0)$ risulta nullo (e gli altri non sono di segno discorde), allora il solo sviluppo di Taylor al secondo ordine non permette di decidere sulla natura del punto critico.

Lezione del 2/11/11 (2 ore). Alcune regole per la determinazione dei segni degli autovalori della matrice Hessiana. Massimi e minimi di funzioni su domini $D \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e limitati: vanno ricercati tra i punti critici interni a D e tra i massimi e minimi vincolati alla frontiera (o bordo) ∂D. Espressione del vincolo in forma parametrica o in forma implicita (ovvero come insieme di livello). Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma parametrica. Introduzione al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Lezione del 3/11/11 (1 ora). Applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange al calcolo dei massimi e minimi vincolati di una forma quadratica sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per $p = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, A matrice simmetrica, sia data la forma quadratica

$$Q(p) = p^t \cdot A \cdot p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Consideriamo il problema di massimo (risp. minimo) vincolato

$$\max_{|p|=1} Q(p) \,, \qquad \min_{|p|=1} Q(p) \,.$$

Il vincolo può essere espresso dall'equazione $g(p) = 0$, con $g(p) = |p|^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$. Impostando il problema con i moltiplicatori di Lagrange, siamo condotti a risolvere il sistema

$$\nabla Q(p) = \lambda \cdot \nabla g(p) \,, \qquad g(p) = 0 \,,$$

ovvero, effettuando i calcoli,

$$2A \cdot p = 2\lambda p \,, \qquad |p|^2 = 1 \,.$$

Pertanto i punti di estremo vincolato (tra cui il massimo ed il minimo) sono gli autovettori unitari di A. Osservando che, se p è un autovettore unitario, si ha

$$Q(p) = p^t \cdot A \cdot p =< A \cdot p, p >= \lambda < p, p >= \lambda,$$

si ha che i valori estremi corrispondono agli autovalori di A. In particolare il massimo ed il minimo autovalore realizzano rispettivamente il massimo ed il minimo di Q sull'insieme $\{|p| = 1\}$.

Un esempio di programmazione lineare: sia da massimizzare (minimizzare) la funzione $f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} a_i x_i \ + b$ sotto le condizioni $r_k(x_1, x_2) \leq 0$, con $r_k(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} c_{ik} x_i + d_k$, per $k = 1, ..., N$. Il vincolo imposto ad f rappresenta l'intersezione di N semipiani, ovvero un insieme *convesso* (ossia, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li unisce è interamente contenuto nell'insieme) a frontiera poligonale. Non essendoci punti critici interni ($\nabla f = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$), il massimo ed il minimo sono assunti alla frontiera poligonale, ed in generale nei vertici del poligono: infatti, per dati generici si ha che i vettori (c_{1k}, c_{2k}), che rappresentano le normali ai lati del poligono, non sono paralleli a $(a_1, a_2) = \nabla f$, ossia non possono esistere punti critici vincolati sui lati del poligono.

Lezione del 4/11/11 (1 ora). Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: se $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, e $p_0 \in g^{-1}(0) \cap \Omega$ è tale che $\nabla g(p_0) \neq 0$, allora p_0 è un punto di estremo vincolato per f ristretta a $g^{-1}(0)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$. Ciò equivale a dire che $(p_0, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$ è punto critico della funzione (di Lagrange) $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(p, \mu) = f(p) - \mu \cdot g(p)$.

La dimostrazione del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange segue dal Teorema del Dini delle funzioni implicite. Enunciato nel caso di due variabili: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$

è di classe $C^1(\Omega)$, $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in g^{-1}(0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$, allora esistono $\delta, \sigma > 0$, ed un intorno $R = [x_0-\delta, x_0+\delta]\times[y_0-\sigma, y_0+\sigma]$ tale che $g^{-1}(0)\cap R = \{(x,y) \in R\,,\ y = \phi(x)\}$, dove $\phi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1. Si ha inoltre la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}\,.$$

Il teorema del Dini dà delle condizioni affinchè l'insieme di livello $g^{-1}(0)$ possa rappresentarsi, localmente, come grafico di una opportuna funzione ϕ, la quale risulta definita implicitamente dall'equazione $g = 0$, e le cui derivate possono essere calcolate derivando implicitamente la relazione $g = 0$.

Dimostrazione del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: se $\nabla g(p_0) \neq 0$ allora almeno una delle sue componenti $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ non è nulla. Supponiamo per semplicità che sia $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0) \neq 0$. Per il Teorema del Dini, si ha intorno a p_0 $g(x_1, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})$, per cui , se p_0 è un estremo vincolato di f, si ha, adottando le notazioni di cui sopra,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}, \phi(x_1, ..., x_{n-1}))\Big|_{p_0} = \langle \nabla f(p_0), \tau_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$: infatti, dato che anche $\langle \nabla g(p_0), \tau_i\rangle = 0$ per ogni $i = 1, ..., n-1$, l'insieme $\{\nabla g(p_0), \tau_i\}_{i=1,...,n-1}$ forma una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$, e quindi, posto $\lambda = \frac{\langle \nabla f(p_0), \nabla g(p_0)\rangle}{|\nabla g(p_0)|^2}$, si ha necessariamente $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

Dimostrazione del Teorema delle funzioni implicite nel caso di due variabili. Supponendo $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, esiste $\sigma > 0$ tale che $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) > 0$ per $x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma$ e $y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma$. Possiamo anche supporre senza perdita di generalità che

$$\inf\{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y),\ x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma\,,\ y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma\} = \ell > 0\,.$$

In particolare, la funzione $t \mapsto G(x_0, t)$ è strettamente crescente per $y_0-\sigma \leq t \leq y_0+\sigma$, e dunque vale $G(x_0, y_0-\sigma) < 0$ e $G(x_0, y_0+\sigma) > 0$. Per la continuità di G esiste $0 < \delta < \sigma$ tale che $G(x, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x, y_0 + \sigma) > 0$ per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$. Per ogni $x_0-\delta \leq x \leq x_0+\delta$, la stretta monotonia della funzione $t \mapsto G(x, t)$ implica che esiste un unico punto $y \equiv \phi(x) \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $G(x, y) = G(x, \phi(x)) = 0$. Verifichiamo che la funzione implicita ϕ sia di classe C^1: siano x e $x+h$ in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, consideriamo la restrizione di G al segmento di estremi $p = (x, \phi(x))$ e $q = (x + h, \phi(x + h))$, ovvero la funzione

$$f(t) = G(p + t(q - p)) = G(x + th, \phi(x) + t(\phi(x + h) - \phi(x)))\,, \qquad 0 \leq t \leq 1\,.$$

Per il teorema di Lagrange del valor medio, si ha, per un certo $0 < \tau < 1$,

$$f(1) - f(0) = f'(\tau) = \frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau) \cdot h + \frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau) \cdot (\phi(x + h) - \phi(x))\,,$$

dove $p_\tau = p + \tau(q-p)$. Essendo $f(1) = f(0) = 0$, si ottiene in particolare

$$\phi(x+h) - \phi(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)} h \,.$$

Dalla relazione precedente si ricava, dato che $p_\tau \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$,

$$|\phi(x+h) - \phi(x)| \le h\frac{M}{\ell} \quad \text{con } M = \max\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,y),\ x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \sigma \le y \le y_0 + \sigma\}\,.$$

Facendo tendere h a zero, si ottiene così la continuità di ϕ per ogni $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$.

Ora, stabilito che ϕ è continua, si può dedurre che per $h \to 0$ il punto $p_\tau = (x + \tau h, \phi(x) + \tau(\phi(x+h) - \phi(x)))$ tende effettivamente a $p = (x, \phi(x))$, da cui, passando al limite per $h \to 0$ nella relazione

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)}\,,$$

si ottiene che ϕ è derivabile e vale la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}\,.$$

D'altra parte, il secondo membro della precedente relazione è costituito dalla composizione di funzioni continue, pertanto è continuo. Si deduce pertanto che ϕ è in realtà di classe C^1.

Lezione del 9/11/11 (2 ore). Il teorema del Dini delle funzioni implicite: sia $G : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 nelle variabili $(x,y) \equiv (x_1, .., x_n, y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial\{G_1,...,G_k\}}{\partial\{y_1,...,y_k\}} \neq 0$. Allora $\exists\, \delta, \sigma > 0$, ed esiste $\phi : B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to B_\sigma(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ tali che $G^{-1}(0) \cap (B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)) = \{(x,y) : x \in B_\delta(x_0)\,,\ y = \phi(x)\}$. Inoltre, ϕ è di classe C^1 e vale

$$D\phi(x) = -\left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{y_1, ..., y_k\}}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{x_1, ..., x_n\}}\right]\Bigg|_{y=\phi(x)}\,,$$

ovvero vale la formula di derivazione implicita

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_i(x, \phi(x))\right) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, \phi(x)) + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_\ell}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x)\,.$$

Alcune applicazioni del teorema delle funzioni implicite: descrizione delle soluzioni di sistemi di equazioni non lineari, esistenza e unicit per equazioni differenziali esatte, teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di k vincoli: sia $G = (G_1, ..., G_k) : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ di classe C^1, a sia $f \in C^1(A; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in G^{-1}(0)$ è un estremo vincolato per f ristretta a $G^{-1}(0)$ e se $DG(p_0)$ ha rango massimo k, allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(p_0) = \lambda_1 \nabla G_1(p_0) + ... + \lambda_k \nabla G_k(p_0)$.

Programmazione non lineare: nelle ipotesi precedenti, posto $p = (x_1, ..., x_{n+k})$, se si deve ottimizzare f ristretta ai vincoli $G_1(p) \leq 0$,..., $G_k(p) \leq 0$, il punto critico vincolato $p_0 = (x_1^0, ..., x_{n+k}^0)$ risulta essere un punto critico (libero) della lagrangiana

$$\Psi(x_1, ..., x_{n+k}, \lambda_1, ..., \lambda_k, u_1, ..., u_k) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (G_i(x, y) + u_i^2)\,.$$

Il sistema corrispondente $\nabla \Psi = 0$ è detto sistema delle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_{n+k}} \\ G_1(p_0) = -u_1^2 \\ \vdots \\ G_k(p_0) = -u_1^2 \\ \lambda_1 u_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k u_k = 0\,. \end{cases}$$

Lezione del 10/11/11 (1 ora). Teorema della funzione inversa: se $g : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è di classe C^1 e se $\det Dg(p_0) \neq 0$ (ovvero $\exists\ [Dg(p_0)]^{-1}$), allora $\exists\ U \subset D$ intorno di p_0 e $V \subset \mathbb{R}^k$ intorno di $q_0 = g(p_0)$ tale che $g : U \to V$ è invertibile. Inoltre, l'inversa g^{-1} è di classe C^1 (si dice che g è un diffeomorfismo locale), e $[Dg^{-1}(q_0)] = [Dg(p_0)]^{-1}$.

Esempio: la trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ verifica $\det\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}} = r \neq 0\ \forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$. Tale trasformazione è dunque un diffeomorfismo locale. Si osservi che la trasformazione non è globalmente invertibile, in quanto (r, θ) ed $(r, \theta + 2k\pi)$ hanno la stessa immagine $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Lezione dell' 11/11/11 (3 ore). Dimostrazione del teorema della funzione inversa. Richiamo preliminare: per A, B matrici tali che sia definito $A \cdot B$, si ha $||A \cdot B||_1 \leq ||A||_1 \cdot ||B||_1$ (compatibilità della norma ℓ^1 con il prodotto di matrici). Inoltre, per $v \in \mathbb{R}^k$, si ha $|v| \leq ||v||_1 \leq \sqrt{k}|v|$.

Sia $q \in B(q_0, s)$, e si consideri lo schema di tipo Newton $p_{n+1} = f(p_n)$, con

$$f(p) = p + [Dg(p_0)]^{-1}(q - g(p))\,.$$

Si ha $p = f(p)$, ossia p è punto fisso di f, se e solo se $q = g(p)$. In altre parole, se il punto fisso p esiste ed è unico, allora $p = g^{-1}(q)$, l'immagine inversa di q secondo g, ossia g è invertibile.

Dimostriamo che f è una contrazione se p è sufficientemente vicino a p_0, in modo da garantire esistenza e unicità del punto fisso di f, ovvero l'invertibilità locale di g intorno a p_0.

Dimostriamo preliminarmente la stima

$$|f(p) - f(p')| \leq M\sqrt{k}|p - p'| \quad \forall\, p, p' \in B_r(p_0), \quad \text{con } M = \sup_{p \in B_r(p_0)} ||Df(p)||_1 \,.$$

Si ha, per il teorema fondamentale del calcolo applicato a $t \mapsto f(p + t(p' - p))$

$$\begin{aligned}
|f(p) - f(p')| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(p' - p)) dt \right| = \left| \int_0^1 [Df(p + t(p' - p)] \cdot (p' - p) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |\, Df(p + t(p' - p)) \cdot (p' - p) \,| dt \\
&\leq \int_0^1 ||Df(p + t(p' - p)) \cdot (p' - p)||_1 dt \\
&\leq \int_0^1 ||Df(p + t(p' - p))||_1 ||p' - p||_1 dt \\
&\leq \int_0^1 M\sqrt{k}|p' - p| dt \leq M\sqrt{k}|p - p'| \,.
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo $Df(p)$ per ogni $p \in B_r(p_0)$, e dimostriamo che si ha $||Df(p)||_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ per ogni $p \in B_r(p_0)$ a patto di scegliere r sufficientemente piccolo (in particolare $M\sqrt{k} < 1/2$ e duque f è una contrazione). Si ha

$$Df(p) = I - [Dg(p_0)]^{-1}[Dg(p)] = [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)] \,,$$

da cui

$$||Df(p)||_1 = ||\, [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)] \,||_1 \leq ||Dg(p_0)^{-1}||_1 ||Dg(p_0) - Dg(p)||_1 \,,$$

e dato che g è di classe C^1 si ha che per $p \to p_0$ vale $||Dg(p_0) - Dg(p)||_1 \to 0$, da cui discende che $||Df(p)||_1$ può essere reso piccolo a piacere per p sufficientemente vicino a p_0.

Mostriamo ora che per q sufficientemente vicino a q_0 (ovvero per s sufficientemente piccolo) si ha che f è una contrazione di $\overline{B(p_0, r)}$ in sè, ossia che $|p - p_0| \leq r \Rightarrow |f(p) - p_0| \leq r$. Si ha

$$|f(p) - p_0| \leq |f(p) - f(p_0)| + |f(p_0) - p_0| \leq \frac{1}{2}|p - p_0| + ||Dg(p_0)^{-1}||_1 \sqrt{k}|q - q_0| \leq r$$

se si sceglie s in modo che $||Dg(p_0)^{-1}||_1 \sqrt{k} s \leq r/2$. Fissati dunque in tal modo s ed r, e ponendo $V = B(q_0, s)$ ed $U = g^{-1}(B(q_0, s)) \cap B(p_0, r)$, si ha che g ristretta ad U è un diffeomorfismo di U su V.

Integrali doppi e tripli per funzioni continue definite su un prodotto di intervalli. Teorema di Fubini-Tonelli (formula dell'integrale iterato). Estensione al caso di domini normali rispetto agli assi coordinati: nel caso degli integrali doppi, se ad esempio $h_1, h_2 \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ e $D = \{(x,y),\ a \le x \le b\,,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$, ed inoltre $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, si ha

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx\,.$$

Nel caso degli integrali tripli, se esistono funzioni continue $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ ed $h_1(x)$ e $h_2(x)$ tali che $D = \{(x,y,z),\ a \le x \le b\,,\ h_1(x) \le y \le g_2(x)\,,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$, ed $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, allora si ha

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx\,.$$

Calcolo di aree e volumi. Per $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha $\mathrm{Area}(D) = \iint_D dx\,dy$. Per $D \subset \mathbb{R}^3$ si ha $\mathrm{Volume}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz$. Integrali di funzioni simmetriche su domini simmetrici.

Lezione del 16/11/11 (2 ore). Formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli: se $T : R \subset \mathbb{R}^n \to D = T(R) \subset \mathbb{R}^n$, è di classe C^1 ed iniettiva tranne al più sui punti della frontiera ∂R del dominio, allora, per $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, posto $x = (x_1, ...x_n) = T(u_1, ..., u_n) = T(u)$, vale la formula

$$\int_D f(x)\,dx_1...dx_n = \int_R f(T(u)) \left|\det \frac{\partial\{T_1, ..., T_n\}}{\partial\{u_1, ..., u_n\}}(u)\right| du_1...du_n\,.$$

Uno dei passaggi chiave nella dimostrazione della formula è l'espressione del volume del parallelepipedo n-dimensionale $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori $v_j = (v_{1,j}, ...v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, ..., n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j, si ha $\mathrm{vol}\,(P) = |\det A|$.

Idea della dimostrazione della formula di cambiamento di variabile: data una partizione di R in cubetti n-dimensionali generati dai vettori $\Delta u_1 \cdot e_1, ..., \Delta u_n \cdot e_n$, questa induce una partizione di D data dalle immagini dei cubetti, il cui volume n-dimensionale è approssimativamente dato dal volume del parallelepipedo generato da $dT(u) \cdot (\Delta u_1 \cdot e_1), ..., dT(u) \cdot (\Delta u_n \cdot e_n)$, ovvero dai vettori $\Delta u_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial u_1}(u), ..., \Delta u_n \cdot \frac{\partial T}{\partial u_n}(u)$. Tale volume è dato da $|\det DT(u)|\Delta u_1...\Delta u_n$, e quindi la somma di Riemann di f su D si può esprimere come $\sum f(T(u))|\det DT(u)|\Delta u_1...\Delta u_n$, che converge al secondo membro della formula di cambiamento di variabili.

Esempi di calcolo di integrali multipli utilizzando trasformazioni di coordinate polari, sferiche e cilindriche. Volume della sfera, area dell'ellisse, momento d'inerzia di una palla rispetto ad un suo diametro.

Calcolo di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$: posto $f(x,y) = e^{-x^2}e^{-y^2}$, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right]dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 .$$

D'altra parte, trasformando in coordinate polari, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R\left[\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,d\theta\right]dr = \pi\,,$$

da cui la formula $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Lezione del 17/11/11 (1 ora). Formula per il calcolo del baricentro di figure piane o solide. Integrali curvilinei di prima specie. Data una funzione continua $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed una curva parametrizzata $\gamma : [a,b] \to D$ di classe C^1 e iniettiva (ovvero una curva semplice), detto $\Gamma = \{\gamma(t)\,,\ a \le t \le b\}$ il suo sostegno, si definisce l'integrale curvilineo (di prima specie) di f lungo Γ come segue:

$$\int_\Gamma f\,d\ell := \int_a^b f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b f(x_1(t),...,x_n(t))\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot x_i^2}\,dt\,.$$

Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando f, additività rispetto alla curva Γ (ossia, se $\Gamma = \cup_i\Gamma_i$ con $\Gamma_i = \{\gamma_i(t)\,,\ a_i \le t \le b_i\}$, γ_i di classe C^1 e iniettiva, $\gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$ per ogni i, si ha $\int_\Gamma f d\ell = \sum_i \int_{\Gamma_i} f d\ell$).

L'integrale curvilineo di prima specie è un integrale non orientato, e si utilizza per il calcolo di lunghezze di curve (caso $f \equiv 1$), masse di oggetti filiformi (se f rappresenta la densità lineare dell'oggetto) o baricentri e/o momenti d'inerzia (rispettivamente nel caso $f(x_1,...,x_n) = x_i$, o f rappresenti la distanza al quadrato da un asse, come ad esempio $f(x,y,z) = x^2+y^2$, la distanza al quadrato dall'asse z).

Lezione del 18/11/11 (3 ore). Integrali superficiali di prima specie. Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una superficie $S = \{\vec r(u,v),\ (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2\} \subset D$ definita mediante una parametrizzazione di classe C^1 iniettiva, si definisce l'integrale superficiale di f su S come segue:

$$\iint_S f\,da := \iint_R f(\vec r(u,v))\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv = \iint_R f(\vec r(u,v))\sqrt{\det([D\vec r]^t\cdot[D\vec r])}\,dudv\,.$$

Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, linearità, additività. Calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure bidimensionali. Formula per l'area di superfici cartesiane.

Campi vettoriali. Integrale curvilineo (detto di seconda specie) per campi vettoriali su curve orientate: se $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori continuo e $\Gamma \subset D$ è una curva orientata di primo estremo A e secondo estremo B, parametrizzata mediante $\gamma : [a, b] \to D$ di classe C^1, con $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, si pone

$$\int_\Gamma F \cdot d\ell := \int_a^b < F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > dt\,.$$

Notazione con le 1-forme differenziali: se $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, si pone

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot d\ell &= \int_\Gamma F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \\ &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))\dot x(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))\dot y(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))\dot z(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

L'applicazione $(x, y, z) \mapsto F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$ si dice 1-forma differenziale.

Proprietà dell'integrale curvilineo di seconda specie: indipendenza dalla parametrizzazione (a patto che conservi l'orientazione di Γ), linearità, additività. L'integrale curvilineo di seconda specie dipende dall'orientazione di Γ: se indichiamo con Γ_{AB} la curva Γ orientata da A a B e Γ_{BA} la stessa curva orientata da B ad A, si ha

$$\int_{\Gamma_{BA}} F \cdot d\ell = -\int_{\Gamma_{AB}} F \cdot d\ell\,.$$

Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei di seconda specie: se $F = \nabla\phi$, ovvero se F è il gradiente di una funzione (detta *potenziale scalare*) si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} \nabla\phi \cdot d\ell = \int_a^b \langle \nabla\phi(\gamma(t), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\phi(\gamma(t))\right)\, dt = \phi(B) - \phi(A)\,.$$

In particolare, l'integrale curvilineo di un gradiente dipende solamente dagli estremi della curva Γ, e dunque non cambia se calcolato lungo una qualsiasi altra curva che congiunga A a B.

Lezione del 23/11/11 (2 ore). Campi conservativi, potenziale scalare. Esempi di campi conservativi: il campo elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa puntiforme posta nell'origine, dato da $\vec F(x, y, z) = \pm\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ è conservativo. Si ha $\vec F = \nabla\phi$, con $\phi(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Il campo di una forza di richiamo elastica $F(x, y, z) = -k(x, y, z)$ è conservativo: si ha $F = \nabla\phi$ con $\phi(x, y, z) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Condizioni equivalenti alla proprietà di essere conservativo per un campo di vettori di classe C^0: indipendenza dalla traiettoria, circuitazione nulla. Determinazione di una funzione potenziale per un campo conservativo $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: fissato $p_0 \in D$, si pone $\phi(p) = \int_{\Gamma_{p_0 p}} F \cdot d\ell$, dove, per $p \in D$, $\Gamma_{p_0 p}$ è una curva orientata che collega p_0 a p. La definizione è consistente, per l'indipendenza dalla traiettoria. Dimostriamo che ad esempio $\frac{\partial \phi}{\partial x}(p) = F_1(p)$, la prima componente di F: detto $S = \{p + te_1\ ,\ 0 \le t \le h\}$ il segmento che unisce p a $p + he_1$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\phi(p + he_1) - \phi(p)}{h} &= \frac{1}{h}\int_S F \cdot d\ell = \frac{1}{h}\int_0^h < F(p + te_1), e_1 > dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h F_1(p + te_1) dt = F_1(p + \bar{t}e_1)\end{aligned}$$

per un certo $0 \le \bar{t} \le h$. La conclusione segue passando al limite per $h \to 0$, stante la continuità di F_1.

Condizione necessaria affinché un campo F di classe C^1 sia conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è che la matrice Jacobiana DF sia una matrice simmetrica (infatti, se $F = \nabla\phi$ in A allora $DF = D^2\phi$, che è simmetrica per il teorema di Schwarz). In dimensione due e tre, tale condizione si traduce nella condizione sulle derivate incrociate

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}\,.$$

Nozione di insieme semplicemente connesso (viene qui data la definizione in $\mathbb{R}^2$): $A \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni $\Gamma \subset A$ curva semplice chiusa, si ha $\Gamma = \partial D$ con $D \subset A$ (Γ è il bordo di un dominio *interamente* contenuto in A). Esempi di insiemi semplicemente connessi: palle, insiemi convessi, insiemi stellati. Esempi di insiemi non semplicemente connessi nel piano sono le corone circolari, ed in generale gli insiemi connessi privi di "buchi".

La condizione DF simmetrica su un dominio A semplicemente connesso è sufficiente affinchè F sia conservativo in A.

Dimostrazione della sufficienza della condizione nel caso di domini stellati (Lemma di Poincaré): sia $D \subset \mathbb{R}^2$ stellato rispetto all'origine, e sia $p = (x, y) \in D$. Definiamo $\phi(x, y) = \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)\, dt$ (lavoro di F lungo il segmento di estremi $(0, 0)$ e (x, y)). Grazie al teorema di derivazione sotto il segno di integrale, valido per integrandi di classe C^1 e la condizione $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)\right)\, dt \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty)\, dt \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty)\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(tF_1(tx, ty)\right)\, dt = F_1(x, y).\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y)$. Metodi di calcolo del potenziale di un campo conservativo.

Lezione del 24/11/11 (1 ora). Definizione di rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Campi irrotazionali. Un campo conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è irrotazionale in A. Rotore di u campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$.

Esempio fondamentale: il campo $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ è irrotazionale. Tuttavia non è conservativo su tutto il suo dominio di definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (un insieme non semplicemente connesso), in quanto il suo integrale curvilineo lungo una circonferenza di centro l'origine è diverso da zero. Sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\}$, che è semplicemente connesso, si ha $F = \nabla\theta$, dove θ è la funzione angolare definita dalla funzione inversa della trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ristretta a $(0,+\infty) \times (0, 2\pi)$.

Formule di Gauss-Green nel piano: sia $F = (F_1, F_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, sia $D \subset A$ un dominio tale che $\Gamma = \partial D$ sia una curva semplice chiusa di classe C^1 a tratti. Allora vale

$$\oint_\Gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

dove Γ è orientata in senso antiorario. Applicazione del teorema di Gauss-Green al calcolo di aree di figure piane.

Lezione del 25/11/11(3 ore). Dimostrazione del teorema di Gauss-Green nel caso di domini normali rispetto ad entrambi gli assi coordinati. Estensione per additività a domini piani più generali.

Rivisitazione del Teorema di Gauss-Green nel piano alla luce degli integrali orientati: la formula si può scrivere

$$\int_{\partial D} \langle F, \tau\rangle d\ell = \iint_D \langle \mathrm{rot}\, F, n\rangle da\,,$$

dove il dominio D giace in un piano orizzontale di $\mathbb{R}^3$, è orientato dal versore normale diretto verso l'alto $n = e_3$, ed il bordo ∂D è una curva semplice di classe C^1 a tratti orientata in senso antiorario dal versore τ, ovvero n e τ soddisfano la regola della mano destra, con n facente le veci del pollice. Scritta in tale forma, la fomula precedente è un caso particolare del Teorema di Stokes.

L'integrale a secondo membro è un integrale di flusso (se F è il campo di velocità di un fluido avente densità unitaria, serve a misurare la quantità di fluido che passa attraverso D nell'unità di tempo).

Integrali superficiali di seconda specie: sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, ed $S \subset A$ una superficie parametrizzata da $\vec{r}(u,v)$, di classe C^1, $(u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Si definisce

$$\iint_S \langle F, n\rangle da := \iint_R \langle F(\vec{r}(u,v)), \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\rangle\, dudv\,.$$

Proprietà degli integrali orientati di superficie: a parità di orientazione n, indipendenza dalla parametrizzazione $\vec{r}$ (conseguenza della formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi); linearità rispetto ad F, additività rispetto a S.

Teorema di Stokes nel caso di superfici C^1 regolari sino al bordo: sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfice con bordo ∂S, entrambi orientati da una parametrizzazione data $\vec{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, rango $D\vec{r}$ massimo, e iniettiva sino al bordo ∂R, dove può risultare di classe C^1 a tratti. Allora si ha $\int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle d\ell = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle da$ per ogni campo vettoriale F di classe C^1 definito in un intorno di S.

Dimostrazione del teorema di Stokes: si sfrutta l'invarianza per rotazioni degli integrali orientati per ottenere la validità della formula di Gauss-Green (nella versione Stokes) su un pezzo di superficie piana in $\mathbb{R}^3$ (ad es. un triangolo o un quadrilatero). dopodichè si sfrutta l'additività degl'integrali orientati per ottenere la validità della formula su una superficie ottenuta giustapponendo triangoli (o quadrilateri) non necessariamente complanari incollandoli tra loro lungo i rispettivi lati, dimostrando la formula per superfici poliedrali triangolate in $\mathbb{R}^3$. Per la dimostrazione nel caso di superfici di classe C^1 regolari sino al bordo si considera una partizione di R in quadratini, e si considera la superficie poliedrale S' formata dai triangoli i cui vertici sono immagine dei vertici dei quadratini secondo la parametrizzazione $\vec{r}$. Per il passo precedente, su S' vale la formula di Stokes. Facendo tendere il passo della quadrettatura di R a zero, gli integrali su S' e $\partial S'$ convergono rispettivamente agli integrali su S e ∂S, e in tal modo si ottiene la formula voluta.

Sia data $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva semplice chiusa orientata. Supponiamo $\Gamma = \partial S = \partial D$ per due superfici S e D orientate in modo da rispettare la regola della mano destra rispetto all'orientazione di Γ. Allora dal Teorema di Stokes si deduce che per ogni campo vettoriale F, $\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle da = \iint_D \langle \operatorname{rot} F, n \rangle da$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie a bordo fissato è indipendente dalla superficie. Equivalentemente, se Σ è una superficie orientata chiusa, ovvero $\partial \Sigma = \emptyset$, $\iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, n \rangle da = 0$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è nullo. Quindi i campi vettoriali F che sono rotori di altri campi vettoriali A (ossia $F = \operatorname{rot} A$), giocano dal punto di vista degli integrali di superficie di seconda specie lo stesso ruolo che giocano i campi conservativi (ossia i gradienti) nel caso degli integrali curvilinei di seconda specie. Se $F = \operatorname{rot} A$, il campo A viene detto potenziale vettore di F. L'esempio classico di un campo che ammette potenziale vettore è costituito dal campo magnetico $\vec{B}$.

Lezione del 30/11/11 (2 ore). Divergenza di un campo vettoriale $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si tratta della quantità scalare $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$. Una condizione necessaria affinchè un campo di classe C^1 sia un rotore è che abbia divergenza nulla, ovvero che sia solenoidale. Si ha cioè che $F = \operatorname{rot} A$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ implica $\operatorname{div} F = 0$ su D. Tale risultato è conseguenza del teorema di Schwarz.

La condizione non è in generale sufficiente: si prenda ad esempio $F(p) = \frac{i_r}{r^2} = \frac{p}{|p|^3}$ il campo elettrostatico generato da una carica positiva puntiforme situata nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Tale campo è solenoidale nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$, ma non è il rotore di alcun campo vettoriale definito sullo stesso dominio, in quanto detta Σ la superficie sferica di centro l'origine e raggio $R > 0$ (Σ è una superficie chiusa) orientata dal versore radiale $i_r = \frac{p}{|p|}$, si ha

$$\iint_\Sigma \langle F, n\rangle da = \iint_\Sigma \langle \frac{i_r}{R^2}, i_r\rangle da = \frac{1}{R^2}\int_\Sigma da = 4\pi \neq 0.$$

La condizione $\operatorname{div} F = 0$ risulta sufficiente affinchè sia $F = \operatorname{rot} A$ ad esempio su domini convessi (Lemma di Poincaré). In realtà detta implicazione è vera su domini D che verificano certe ipotesi meno stringenti (in buona sostanza, se per ogni superficie chiusa S in D, si ha $S = \partial V$ con V interamente contenuto in D).

Se il rotore di un campo vettoriale ne misura la "vorticità", la divergenza ne individua "sorgenti" e "pozzi". Un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$ è univocamente determinato conoscendo il valore di $\operatorname{div} F$ e $\operatorname{rot} F$. Decomposizione di Hodge (o Helmholtz) di un campo vettoriale F definito su $\mathbb{R}^3$: si ha $F = F_1 + F_2$ con F_1 irrotazionale e F_2 solenoidale, e la decomposizione è ortogonale rispetto al prodotto scalare di $\ell^2(\mathbb{R}^3)$.

Teorema della divergenza (o di Gauss): sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un dominio con bordo ∂V costituito da una superficie chiusa di classe C^1 a tratti, orientata dalla normale esterna a V, e sia F un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto $A \supset V$. Si ha

$$\iint_{\partial V} \langle F, n\rangle da = \iiint_V \operatorname{div} F \, dxdydz \,.$$

Dimostrazione nel caso di domini V normali rispetto a tutti e tre gli assi coordinati: dimostriamo ad esempio che la formula è vera nel caso $F = (0, 0, F_3)$. Il caso generale segue per linearità. Possiamo descrivere V in forma normale rispetto all'asse z, ovvero $V = \{(x, y) \in R,\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, con $R \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $g_i : R \to \mathbb{R}$ di classe C^1 per $i = 1, 2$. Si ha, da una parte,

$$\begin{aligned}\iiint \operatorname{div} F \, dxdydz &= \iint_R dxdy \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz\right] \\ &= \iint_R \left[F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))\right] dxdy.\end{aligned}$$

D'altro canto, $\partial V = \Gamma_{g_2} \cup \Gamma_{g_1} \cup \Sigma$ con $\Sigma \subset \partial R \times \mathbb{R}$ un'eventuale superficie laterale a normale orizzontale. In particolare, $\iint_\Sigma \langle F_3 e_3, n\rangle da = 0$. Tenuto conto delle orientazioni di Γ_{g_2} (normale verso l'alto) e Γ_{g_1} (normale verso il basso), si ha inoltre

$$\begin{aligned}\iint_{\Gamma_{g_2}} \langle F_3 e_3, n\rangle da &= \iint_R \langle (0, 0, F_3(x, y, g_2(x, y)), (-\frac{\partial g_2}{\partial x}, -\frac{\partial g_2}{\partial y}, 1)\rangle \, dxdy \\ &= \iint_R F_3(x, y, g_2(x, y))\, dxdy \,,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\iint_{\Gamma_{g_1}} \langle F_3 e_3, n\rangle da &= \iint_R \langle (0, 0, F_3(x, y, g_1(x, y)), (\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, -1)\rangle \, dxdy \\ &= -\iint_R F_3(x, y, g_1(x, y))\, dxdy \,.\end{aligned}$$

La somma dei flussi è pertanto uguale all'integrale triplo della divergenza di F su V, come volevasi dimostrare.

Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ è, così come il teorema di Stokes per superfici in $\mathbb{R}^3$, o il teorema di Gauss-Green nel piano, una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo.

Applicazione del teorema della divergenza al calcolo di volumi: il campo $F(p) = p = (x, y, z)$ ha divergenza $\operatorname{div} F = 3$, e dunque, per una data regione V a frontiera regolare ∂V si ha $3\ \operatorname{vol}(V) = \iint_{\partial V} \langle F, n \rangle \, da$.

Applicazione alla derivazione dell'equazione di continuità per i fluidi compressibili: dato un fluido in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avente all'istante t densità di volume $\rho_t(x, y, z)$ e velocità $V_t(x, y, z)$, supponendo che valga il principio di conservazione della massa si ha, per ogni regione R a frontiera regolare,

$$\frac{d}{dt} \iiint_R \rho_t(x, y, z) \, dxdydz = - \iint_{\partial R} \langle \rho_t V_t, n \rangle \, da,$$

ovvero, sfruttando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (valido se ρ_t è di classe C^1 rispetto a t) ed il teorema della divergenza,

$$\iiint_R \frac{\partial \rho_t}{\partial t} \, dxdydz = - \iiint_R \operatorname{div} (\rho_t V_t) \, dxdydz \quad \forall\, R \subset \Omega\,.$$

Per ogni $p \in \Omega$ si consideri $R = B(p, \epsilon)$ la palla di centro p e raggio ϵ. Dividendo ambo i membri dell'uguaglianza precedente per il volume di R e passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ottiene finalmente, applicando il teorema della media integrale, l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho_t(p)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_t(p) V_t(p)) = 0 \qquad \forall\, p \in \Omega\,.$$