Capitolo 3

Calcolo differenziale

1 Breve premessa

Per studiare come cambiano i valori di una data funzione f al variare della variabile indipendente x una nozione di fondamentale importanza è quella di rapporto incrementale e di limite del rapporto incrementale. Tali nozioni appaiono in modo naturale sia in questioni geometriche elementari, come ad esempio la determinazione dell'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un dato puto, sia in questioni fisiche di base, come il calcolo della velocità media ed istantanea di un punto materiale che si muove su una retta.

2 La derivata

Vediamo subito la definizione di derivata di una funzione in un punto.

(2.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$ un punto di accumulazione per E. Diciamo che f è* derivabile in x*, se esiste finito*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

Se f è derivabile in x, il valore di tale limite si chiama derivata di f in x *e si denota col simbolo $Df(x)$ o $f'(x)$. La funzione $\{x \mapsto f'(x)\}$ si chiama* funzione derivata *di f ed ha per dominio l'insieme degli x in cui f è derivabile. Essa si denota col simbolo Df o f'. Una funzione si dice* derivabile*, se è derivabile in ogni $x \in E$.*

La funzione

$$\left\{\xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\right\}$$

si chiama *rapporto incrementale* di f relativo al punto x. Geometricamente, il rapporto incrementale in un punto ξ rappresenta il coefficiente angolare della retta che congiunge i due punti

$(x, f(x))$ e $(\xi, f(\xi)$ del grafico di f. La derivata di una funzione f in un punto x, quando esiste, rappresenta invece il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto x (come limite dei coefficienti angolari delle rette secanti il grafico nei due punti x e ξ arbitrariamente vicini). La retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$ è data dall'equazione $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Da un punto di vista fisico, se ad esempio la funzione s rappresenta lo spazio percorso da un punto materiale P posizionato sulla retta reale in funzione del tempo t, allora

$$\left\{\tau \mapsto \frac{s(t+\tau) - s(t)}{\tau}\right\}$$

indica la velocità media del punto materiale sull'intervallo di tempo $[t, t+\tau]$ mentre il suo limite per $\tau \to 0$, ossia la derivata di s, esprime la velocità istantanea di P.

Veniamo ora all'importante relazione che sussiste tra le funzioni derivabili e le funzioni continue.

(2.2) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f sia derivabile in x. Allora f è continua in x.*

Dimostrazione. Risulta

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} \left(f(x) + \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}(\xi - x) \right) = f(x)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(2.3) Osservazione *La funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$ ma non è derivabile il tale punto. Infatti, si ha*

$$\lim_{\xi \to 0^-} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \to 0^-} \frac{|\xi|}{\xi} = -1,$$

mentre

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{|\xi|}{\xi} = 1,$$

per cui f non è derivabile in 0.

Vediamo ora alcuni esempi di funzioni derivabili.

(2.4) Teorema *Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = 0\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da* $f(x) = x$. *Allora* f *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ f'(x) = 1\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 1\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.6) Teorema *La funzione* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ (\exp)'(x) = \exp x\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\exp \xi - \exp x}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \left(\exp x \frac{\exp(\xi - x) - 1}{\xi - x} \right) = \exp x\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.7) Teorema *La funzione* $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è derivabile e*

$$\forall x \in]0, +\infty[:\ (\log)'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\log \xi - \log x}{\xi - x} = \frac{1}{x} \frac{\log(\xi/x)}{(\xi/x) - 1}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.8) Teorema *Le funzioni* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sono derivabili e*

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ (\cos)'(x) = -\sin x\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin)'(x) = \cos x \,.$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$\frac{\cos\xi - \cos x}{\xi - x} = \frac{\cos(x + (\xi - x)) - \cos x}{\xi - x} = \frac{\cos(\xi - x) - 1}{\xi - x}\cos x - \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x}\sin x \,,$$

$$\frac{\sin\xi - \sin x}{\xi - x} = \frac{\sin(x + (\xi - x)) - \sin x}{\xi - x} = \frac{\cos(\xi - x) - 1}{\xi - x}\sin x + \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x}\cos x \,.$$

Passando al limite per $\xi \to x$, si ottiene facilmente la tesi. ■

(2.9) Teorema *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x \in f^{-1}(F)$ di accumulazione per $f^{-1}(F)$ con $f(x)$ di accumulazione per F. Supponiamo che f sia derivabile in x e che g sia derivabile in $f(x)$. Allora $(g \circ f)$ è derivabile in x e*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \,.$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in F$ poniamo

$$\omega(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} - g'(f(x)) & \text{se } y \neq f(x) \,, \\ 0 & \text{se } y = f(x) \,. \end{cases}$$

Per definizione di derivata la funzione ω è continua in $f(x)$. Inoltre si ha

$$\forall y \in F : g(y) - g(f(x)) = g'(f(x))(y - f(x)) + \omega(y)(y - f(x)) \,.$$

Ne segue per ogni $\xi \in E \setminus \{x\}$

$$\frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} = g'(f(x))\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \omega(f(\xi))\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \,.$$

Passando al limite per $\xi \to x$, si ottiene la tesi. ■

(2.10) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f e g siano derivabili in x. Allora le funzioni $(f + g)$, $(f - g)$ e (fg) sono derivabili in x e*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \,,$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \,,$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Dimostrazione. La formula sulla derivata di una somma si ottiene passando al limite nell'espressione

$$\frac{(f+g)(\xi)-(f+g)(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} + \frac{g(\xi)-g(x)}{\xi - x}\,.$$

Partendo dalla formula

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(\xi)-(fg)(x)}{\xi - x} &= \frac{f(\xi)g(\xi)-f(x)g(\xi)+f(x)g(\xi)-f(x)g(x)}{\xi - x} = \\ &= \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}g(\xi) + f(x)\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi - x}\end{aligned}$$

e ricordando che g è continua in x, si deduce la derivabilità del prodotto. Poiché $f - g = f + (-1)g$, la differenza è riconducibile a prodotto e somma. ■

(2.11) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f e g siano derivabili in x e che $g(x) \neq 0$. Allora la funzione (f/g) è derivabile in x e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Dimostrazione. Partendo dalla formula

$$\frac{(1/g)(\xi)-(1/g)(x)}{\xi - x} = -\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi - x}\frac{1}{g(\xi)g(x)}$$

e ricordando che g è continua in x, si deduce che $(1/g)$ è derivabile in x e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Dal teorema precedente ne segue che

$$\left(f\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.12) Teorema *Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^n$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = nx^{n-1}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 1$, la proprietà è già stata provata. Supponiamo che il fatto sia vero per un certo $n \geq 1$. Poiché $x^{n+1} = x^n x$, si deduce che $\{x \mapsto x^{n+1}\}$ è derivabile con derivata

$$nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.13) Teorema *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e sia* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *la funzione definita da* $f(x) = x^\alpha$. *Allora* f *è derivabile e*

$$\forall x \in]0, +\infty[:\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Dimostrazione. Poiché

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x)\,,$$

si deduce per composizione che f è derivabile e

$$f'(x) = \exp(\alpha \log x)\frac{\alpha}{x} = \alpha \exp(\alpha \log x)\exp(-\log x) = \alpha \exp\left((\alpha - 1)\log x\right) = \alpha x^{\alpha-1}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.14) Teorema *Sia* $a \in]0, +\infty[$ *e sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da* $f(x) = a^x$. *Allora* f *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = (\log a)a^x\,.$$

Dimostrazione. Poiché $a^x = \exp(x \log a)$, risulta

$$f'(x) = (\log a)\exp(x \log a) = (\log a)a^x\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.15) Teorema *La funzione* tan *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathrm{dom}\,(\tan) :\ (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla derivata di un quoziente risulta

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.16) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale. Allora f è derivabile.*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei Teoremi (2.4) e (2.12) e della derivabilità di somma e prodotto. ■

(2.17) Teorema *Sia f una funzione razionale. Allora f è derivabile.*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente e della derivabilità di un quoziente. ■

(2.18) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e $x \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x e che $f'(x) \neq 0$. Allora $f(x)$ è di accumulazione per $f(I)$ e $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x)$ con*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dimostrazione. La funzione f è continua in x. Allora per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap I) \subseteq V$. Essendo f iniettiva, ne segue

$$f(U \cap (I \setminus \{x\})) \subseteq V \cap (f(I) \setminus \{f(x)\}).$$

Poiché x è di accumulazione per I, si deduce che $f(x)$ è di accumulazione per $f(I)$.

Per ogni $y \in f(I) \setminus \{f(x)\}$ risulta

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x))}{y - f(x)} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x)}{f^{-1}(y) - x}\right)^{-1}.$$

Passando al limite per $y \to f(x)$ e tenendo presente la continuità di f^{-1}, si ha la tesi. ■

(2.19) Teorema *Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, $n \geq 3$, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Dimostrazione. La funzione f è derivabile in ogni $x \neq 0$ per il teorema precedente. Inoltre risulta $x = [f(x)]^n$. Derivando membro a membro, si ottiene per ogni $x \neq 0$

$$1 = n[f(x)]^{n-1} f'(x)\,,$$

quindi

$$f'(x) = \frac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,,$$

da cui la tesi.■

(2.20) Teorema *Sia $n \in \mathbb{N}$, n pari, $n \geq 2$, e sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Allora f è derivabile in ogni $x \in]0, +\infty[$ e*

$$\forall x \in]0, +\infty[:\ f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,.$$

Dimostrazione. Si ragiona come nel teorema precedente.■

(2.21) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|$. Allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ f'(x) = \frac{x}{|x|}\,.$$

Dimostrazione. Poiché $|x| = \sqrt{x^2}$, risulta per composizione

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}\,,$$

da cui la tesi.■

(2.22) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \log|x|$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ f'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Dimostrazione. Si ha per composizione

$$f'(x) = \frac{1}{|x|}\frac{x}{|x|} = \frac{1}{x}\,,$$

da cui la tesi.■

(2.23) Teorema *La funzione* arccos : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ *è derivabile in ogni* $x \in]-1,1[$ *e*

$$\forall x \in]-1,1[:\ (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \arccos x$, si ha che f è derivabile in $]-1,1[$ per il Teorema (2.18). Inoltre per ogni $x \in [-1,1]$ risulta $x = \cos(f(x))$. Derivando membro a membro, si ottiene per ogni $x \in]-1,1[$

$$1 = -\sin(f(x))\,f'(x)\,,$$

da cui

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin(f(x))}\,.$$

Tenuto conto che $f(x) \in]0,\pi[$, ne segue

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos(f(x))]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.24) Teorema *La funzione* arcsin : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ *è derivabile in ogni* $x \in]-1,1[$ *e*

$$\forall x \in]-1,1[:\ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dimostrazione. Si ragiona in modo simile al teorema precedente. In questo caso, posto $f(x) = \arcsin x$, si ha $x = \sin(f(x))$, quindi

$$1 = \cos(f(x))\,f'(x)\,.$$

Tenuto conto che $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, ne segue

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(f(x))]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.25) Teorema *La funzione* arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \arctan x$, si ha che f è derivabile per il Teorema (2.18). Inoltre da $x = \tan(f(x))$ segue

$$1 = \left(1 + [\tan(f(x))]^2\right) f'(x) = (1 + x^2) f'(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

3 Punti di non derivabilità

Come nel caso dei punti di discontinuità, vogliamo fare una sorta di classificazione dei punti di *non derivabilità* per una funzione $f : E \to \mathbb{R}$. Vediamo ora almeno tre diverse situazioni di non derivabilità per una funzione f in un punto: punti angolosi, flessi a tangente verticale e cuspidi. Per ogni $x \in E$ di accumulazione per E poniamo

$$f'_-(x) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad f'_+(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diciamo che $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ sono rispettivamente la derivata sinistra e destra di f in x.

(3.1) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$ di accumulazione per E. Diciamo che x è un punto angoloso per f se esistono*

$$-\infty < f'_-(x) < +\infty \quad \textit{oppure} \quad -\infty < f'_+(x) < +\infty \quad \textit{e} \quad f'_-(x) \neq f'_+(x).$$

(3.2) Esempio *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione modulo, $f(x) = |x|$. Allora 0 è un punto angoloso per f, poichè è immediato verificare che $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$.*

(3.3) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$ di accumulazione per E. Diciamo che x è un flesso a tangente verticale per f, se esiste*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty$$

oppure

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty,$$

ossia se il rapporto incrementale non ha limite finito.

(3.4) Esempio *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Allora 0 è un punto di flesso a tangente verticale per f, essendo*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty.$$

(3.5) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$ di accumulazione per E. Diciamo che x è un punto di cuspide per f se esistono*

$$f'_-(x) = -\infty, \qquad f'_+(x) = +\infty,$$

oppure

$$f'_-(x) = +\infty, \qquad f'_+(x) = -\infty,$$

ossia se esistono entrambe infinite le derivate sinistre e destre e di segno opposto.

(3.6) Esempio *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$. Allora 0 è un punto di cuspide per f, essendo immediato verificare che*

$$f'_-(0) = -\infty, \qquad f'_+(0) = +\infty.$$

Come si vede da queste definizioni, in tutti e tre i tipi di non derivabilità, le derivate destre e sinistre esistono, finite o infinite. Si può pensare anche a situazioni in cui le derivate sinistre e destre non esistono, come ad esempio la funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ che vale 0 in $x = 0$. Evidentemente $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ non esistono.

4 Alcune proprietà delle funzioni derivabili

In questa sezione vedremo alcuni classiche proprietà delle funzioni derivabili.

(4.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è:*

− un punto di massimo locale *(o* relativo*) per f, se esiste un intorno U di x tale che*

$$\forall \xi \in U \cap E : \; f(\xi) \leq f(x)\,;$$

− un punto di minimo locale *(o* relativo*) per f, se esiste un intorno U di x tale che*

$$\forall \xi \in U \cap E : \; f(\xi) \geq f(x)\,.$$

(4.2) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in \mathrm{int}\,(E)$. Supponiamo che x sia un massimo o un minimo locale per f e che f sia derivabile in x. Allora $f'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che x sia un massimo locale per f. Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : \; f(\xi) \leq f(x)$$

e sia $r > 0$ tale che $[x-r, x+r] \subseteq U \cap E$. Se poniamo $y_n = x + \frac{r}{n+1}$, evidentemente $y_n \to x$. Inoltre
$$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \le 0\,.$$
Passando al limite per $n \to +\infty$, si deduce che $f'(x) \le 0$. Ponendo $z_n = x - \frac{r}{n+1}$, si ottiene in modo simile $f'(x) \ge 0$, da cui $f'(x) = 0$. Se x è un minimo locale, il ragionamento è simile. ■

(4.3) Osservazione *Geometricamente il risultato precedente afferma che la retta tangente al grafico di una funzione f in un punto di massimo o di minimo locale deve necessariamente essere una retta parallela all'asse x, nel riferimento cartesiano xy.*

(4.4) Teorema (di Rolle) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a) = f(b)$ e che f sia derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che
$$\forall \xi \in [a, b] : \; f(x_1) \le f(\xi) \le f(x_2)\,.$$
Se $x_1, x_2 \in \{a, b\}$, si ha $f(x_1) = f(x_2)$, per cui f è costante. In tal caso risulta $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in]a, b[$. Altrimenti si ha $x_1 \in]a, b[$ oppure $x_2 \in]a, b[$. Per il teorema precedente ne segue rispettivamente $f'(x_1) = 0$ oppure $f'(x_2) = 0$. ■

(4.5) Osservazione *Geometricamente il teorema di Rolle afferma che, per una funzione derivabile, se agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ la funzione f assume valori uguali, allora necessariamente esiste all'interno dell'intervallo un punto a tangente orizzontale.*

(4.6) Teorema (di Cauchy) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Supponiamo che f e g siano derivabili su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che*
$$g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)\,.$$
Se poi $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, risulta $g(a) \neq g(b)$, per cui
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Dimostrazione. Definiamo $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ponendo
$$\varphi(x) = g(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f(x)\big(g(b) - g(a)\big)\,.$$

Evidentemente φ è continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ con

$$\varphi'(x) = g'(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f'(x)\big(g(b) - g(a)\big)\,.$$

Inoltre si ha

$$\varphi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b)\,, \qquad \varphi(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a)\,.$$

Per il Teorema di Rolle esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$, ossia

$$g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)\,.$$

Se poi $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, dal Teorema di Rolle applicato a g si ha $g(a) \neq g(b)$. ■

Il risultato precedente ha la seguente importante implicazione.

(4.7) Teorema (di Lagrange o del valor medio) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)\,.$$

Dimostrazione. Si tratta del Teorema di Cauchy nel caso particolare in cui $g(x) = x$. ■

(4.8) Osservazione *Geometricamente il teorema di Lagrange afferma che, per una funzione derivabile, deve necessariamente esistere all'interno dell'intervallo $[a, b]$ un punto in cui la retta tangente al grafico risulta parallela alla retta che congiunge i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.*

(4.9) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione crescente (risp. decrescente) e $x \in E$ un punto di accumulazione per E. Supponiamo che f sia derivabile in x. Allora si ha $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$).*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente, altrimenti il ragionamento è simile. Per ogni $\xi \in E \setminus \{x\}$ risulta

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0\,,$$

da cui, passando al limite per $\xi \to x$, si ottiene $f'(x) \geq 0$. ■

(4.10) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile in ogni $x \in \operatorname{int}(I)$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se* $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in \operatorname{int}(I)$*, la funzione* f *è costante;*

(b) *se* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \operatorname{int}(I)$*, la funzione* f *è crescente;*

(c) *se* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in \operatorname{int}(I)$*, la funzione* f *è strettamente crescente;*

(d) *se* $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in \operatorname{int}(I)$*, la funzione* f *è decrescente;*

(c) *se* $f'(x) < 0$ *per ogni* $x \in \operatorname{int}(I)$*, la funzione* f *è strettamente decrescente.*

Dimostrazione.
(a) Siano $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Per il Teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x', x'']$, esiste $\xi \in]x', x''[$ tale che

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x') = 0\,.$$

Ne segue $f(x') = f(x'')$, per cui f è costante.
(b) Siano di nuovo $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Ragionando come in precedenza, si trova

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x') \geq 0\,,$$

per cui f è crescente. Le affermazioni (c), (d) ed (e) si dimostrano in modo simile. ■

(4.11) Osservazione *Per la validità dell'affermazione* (a) *è indispensabile che la funzione* f *sia definita su un intervallo, come si vede dal seguente esempio: sia* $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ponendo* $f(x) = 1$ *su* $[0,1]$ *e* $f(x) = -1$ *su* $[2,3]$*. Allora* f *è derivabile,* $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in]0,1[\cup]2,3[$ *ma* f *non è constante.*

(4.12) Osservazione *L'affermazione* (c) *costituisce solo una condizione sufficiente affinchè la funzione sia strettamente crescente. Infatti, ad esempio* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = x^3$ *è strettamente crescente, anche se* $f'(0) = 0$.

Siano I *un intervallo in* $\mathbb{R}$*,* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile e* $x \in I$*. Si verifica facilmente che, se* f' *è continua in* x *e* $f'(x) > 0$*, allora esiste un intorno* U *di* x *tale che* f *è strettamente crescente su* $U \cap I$*. L'ipotesi di continuità di* f' *è necessaria, come si vede dal seguente esempio: si consideri* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tale che* f' *non è continua in* 0*, definita da*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \textit{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Allora f *è derivabile con* $f'(0) = 1$*, ma* f *non è crescente in nessun intorno di* 0.

5 I teoremi di L'Hôpital

Vediamo ora alcuni utili strumenti per il calcolo dei limiti di quozienti, nel caso delle forme indeterminate $0/0$ e $?/\infty$.

(5.1) Teorema (Forma 0/0) *Siano* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *e siano* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,, \qquad \forall x \in]a, b[:\ g'(x) \neq 0\,.$$

Allora si ha $g(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in]a, b[$ *e*

$$\liminf_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

esiste anche

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e risulta

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dimostrazione. Trattiamo soltanto il caso $a \in \mathbb{R}$. Definiamo $F, G : [a, b[\to \mathbb{R}$ ponendo

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > a\,, \\ 0 & \text{se } x = a\,, \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x > a\,, \\ 0 & \text{se } x = a\,. \end{cases}$$

Evidentemente F e G sono continue su $[a, b[$ e derivabili su $]a, b[$ con $F'(x) = f'(x)$ e $G'(x) = g'(x)$. Per ogni $x \in]a, b[$, $g(x) = G(x)$ non può annullarsi, altrimenti dal Teorema di Rolle seguirebbe $g'(\xi) = G'(\xi) = 0$ per qualche $\xi \in]a, x[$. Se

$$\limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty,$$

è ovvio che

$$\limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Altrimenti sia $M > \limsup\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Esiste un intorno U di a tale che

$$\forall \xi \in U \cap]a, b[:\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq M\,.$$

Possiamo supporre che U sia un intervallo. Per ogni $x \in U \cap]a, b[$ applichiamo il Teorema di Cauchy a F e G sull'intervallo $[a, x]$. Sia $\xi \in]a, x[$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Tenuto conto che $\xi \in U$, risulta

$$\forall x \in U \cap]a, b[: \ \frac{f(x)}{g(x)} \leq M .$$

Ne segue $M \geq \limsup\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, quindi

$$\limsup_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

per l'arbitrarietà di M. Il ragionamento per il minimo limite è simile. ∎

(5.2) Osservazione *Si considerino $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 , \\ 0 & \text{se } x = 0 , \end{cases}$$

$$g(x) = x .$$

Si verifica che f e g sono derivabili e $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ per $x \to 0$. Osserviamo anche che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ma

$$\limsup_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \limsup_{x \to 0} \left\{ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right\} = 1, \qquad \liminf_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1.$$

Pertanto il teorema di L'Hôpital fornisce soltanto una condizione sufficiente per l'esistenza del limite del quoziente f/g.

(5.3) Esempio *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell .$$

Allora, come conseguenza del teorema di L'Hôpital, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

(5.4) Teorema (Forma $?/\infty$) *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g\,:]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty\,,$$
$$\forall x \in]a, b[:\ g'(x) \neq 0\,.$$

Allora
$$\liminf_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

In particolare, se esiste
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

esiste anche $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e risulta*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(5.5) Osservazione *Naturalmente i risultati precedenti ammettono una semplice variante nel caso in cui sia del tipo $0/0$ o $?/\infty$ il limite nell'estremo destro dell'intervallo $]a, b[$, ossia quando*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to b} |g(x)| = +\infty\,.$$

(5.6) Corollario *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile in ogni punto di $[a, b] \setminus \{x\}$ e che esista finito*

$$\lim_{\xi\to x} f'(\xi)\,.$$

Allora f è derivabile in x e

$$f'(x) = \lim_{\xi\to x} f'(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Si calcolino i limiti

$$\lim_{\xi\to x^+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\,,$$

$$\lim_{\xi \to x^-} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

utilizzando i Teoremi precedenti. ■

6 La formula di Taylor

La nozione di derivata di ordine superiore al primo può essere introdotta con una definizione ricorsiva. Conveniamo che *derivabile una volta* sia sinonimo di derivabile.

(6.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in E$ un punto di accumulazione per E e $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Diciamo che f è* derivabile k-volte in x*, se*

(a) *f è derivabile;*

(b) *la funzione $f' : E \to \mathbb{R}$ è derivabile $(k-1)$-volte in x.*

Diciamo che f è derivabile k-volte*, se è derivabile k-volte in ogni $x \in E$. Infine, diciamo che f è* indefinitamente derivabile*, se f è derivabile k-volte per ogni $k \geq 1$. Poniamo ricorsivamente*

$$D^k f(x) = f^{(k)}(x) := D^{k-1}(Df)(x)\,.$$

Poniamo anche $D^0 f(x) = f^{(0)}(x) := f(x)$.

(6.2) Esempio *Si verifica che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & se\ |x| < 1 \\ 0 & se\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

è indefinitamente derivabile.

(6.3) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in x. La funzione polinomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$P_n(\xi) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k$$

si chiama polinomio di Taylor *di f di ordine n relativo al punto x. La funzione $R_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$R_n(\xi) := f(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k$$

si chiama resto di Taylor *di f di ordine n relativo al punto x. Evidentemente risulta $f = P_n + R_n$.*

(6.4) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in x. Sia P_n il polinomio di Taylor di f di ordine n relativo al punto x. Allora*

$$\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n \Longrightarrow P_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) .$$

Dimostrazione. Data una qualunque funzione polinomiale della forma

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j (\xi - x)^j ,$$

dimostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} k!\, a_k & \text{se } k \leq n , \\ 0 & \text{se } k \geq n + 1 . \end{cases}$$

Ragioniamo per induzione su k. Ovviamente $P^{(0)}(x) = P(x) = a_0$. Supponiamo ora che la proprietà sia vera per un certo k. Risulta

$$P'(\xi) = \sum_{j=1}^{n} j a_j (\xi - x)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) a_{j+1} (\xi - x)^j .$$

Per l'ipotesi induttiva ne segue

$$\begin{aligned} P^{(k+1)}(x) &= D^k(P')(x) = \begin{cases} k!(k+1)\, a_{k+1} & \text{se } k \leq n - 1 \\ 0 & \text{se } k \geq n \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (k+1)!\, a_{k+1} & \text{se } k + 1 \leq n \\ 0 & \text{se } k + 1 \geq n + 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Nel nostro caso si ha dunque

$$P_n^{(k)}(x) = k! \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

se $0 \leq k \leq n$. ■

(6.5) Osservazione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in x. Allora il polinomio di Taylor di f di ordine n in x è l'unico polinomio P di grado al più n tale che $P^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ se $0 \leq k \leq n$.*

(6.6) Teorema (Formula di Taylor col resto di Peano) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in x. Sia R_n il resto di f di ordine n relativo al punto x. Allora*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{R_n(\xi)}{(\xi - x)^n} = 0\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Per $n = 1$ si ha

$$\lim_{\xi \to x} \frac{R_1(\xi)}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - f'(x) \right) = 0\,.$$

Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per un certo $n \geq 1$ e consideriamo f derivabile $(n+1)$-volte in x. Poniamo $g = f'$, che è quindi derivabile n-volte in x. Per l'ipotesi induttiva applicata a g risulta

$$\lim_{\xi \to x} \frac{g(\xi) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^n} = 0\,.$$

D'altronde dal Teorema di L'Hôpital per la forma $0/0$ si deduce che

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \to x} \frac{R_{n+1}(\xi)}{(\xi - x)^{n+1}} &= \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^{n+1}} = \\
&= \lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^{k-1}}{(n+1)(\xi - x)^n} = \\
&= \lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x)(\xi - x)^k}{(n+1)(\xi - x)^n} = \\
&= \frac{1}{n+1} \lim_{\xi \to x} \frac{g(\xi) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^n} = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto l'affermazione è vera per $n + 1$. ■

(6.7) Osservazione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in x. Se si definisce $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \dfrac{R_n(\xi)}{(\xi - x)^n} & \text{se } \xi \neq x\,, \\ 0 & \text{se } \xi = x\,, \end{cases}$$

risulta che ω è continua in x con $\omega(x) = 0$ e per ogni $\xi \in [a, b]$ si ha

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k + \omega(\xi)(\xi - x)^n .$$

(6.8) Teorema (Formula di Taylor col resto di Lagrange) *Siano $x, b \in \mathbb{R}$, $f : [x, b[\to \mathbb{R}$ una funzione e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte su $[x, b[$ con derivata n-esima continua e derivabile $(n + 1)$-volte su $]x, b[$.*

Allora per ogni $\xi \in]x, b[$ esiste $t \in]x, \xi[$ tale che

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k + \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(t)(\xi - x)^{n+1} .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Naturalmente un enunciato simile è valido su un intervallo della forma $]a, x]$.

(6.9) Esempio *Con qualche semplice calcolo di derivate si determinano facilmente i primi termini degli sviluppi in serie di McLaurin (ossia sviluppi di Taylor centrati nell'origine) delle principali funzioni elementari:*

1. $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$;
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$;
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$;
4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$;
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Questi ed altri sviluppi di funzioni elementari possono essere particolarmente utili anche per il calcolo di limiti di forme indeterminate. Si provi anche a rappresentare questi polinomi nell'intorno dell'origine, confrontando i risultati con i grafici delle rispettive funzioni.

Vediamo ora una utile conseguenza dei risultati precedenti.

(6.10) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in]a, b[$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in x e che*

$$f'(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0 ,$$

$$f^{(n)}(x) \neq 0 .$$

Allora esiste un intorno U di x in cui la differenza $(f(\xi) - f(x))$ assume lo stesso segno di $f^{(n)}(x)(\xi - x)^n$. In particolare valgono i seguenti fatti:

(a) *se n è pari e $f^{(n)}(x) > 0$, il punto x è un minimo locale per f;*

(b) *se n è pari e $f^{(n)}(x) < 0$, il punto x è un massimo locale per f;*

(c) *se n è dispari, il punto x non è né un massimo né un minimo locale per f.*

Dimostrazione. Per la Formula di Taylor col resto di Peano si ha

$$f(\xi) = f(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(\xi - x)^n + \omega(\xi)(\xi - x)^n$$

con $\omega :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua in x ed $\omega(x) = 0$. Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U : \ |\omega(\xi)| < \frac{1}{2n!} \left| f^{(n)}(x) \right| .$$

Poiché

$$f(\xi) - f(x) = \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) + \omega(\xi) \right) (\xi - x)^n ,$$

ne segue la tesi. ■

7 Funzioni convesse

(7.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è* convessa*, se per ogni $x_0, x_1 \in I$ e per ogni $t \in]0, 1[$ si ha*

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) .$$

Diciamo che f è concava*, se $-f$ è convessa.*

La condizione di convessità può essere scritta nelle forme equivalenti

$$f\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big) \leq f(x_0) + t\big(f(x_1) - f(x_0)\big) ,$$

$$f\big(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)\big) \leq f(x_1) + (1-t)\big(f(x_0) - f(x_1)\big) .$$

(7.2) Osservazione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $x \in I$. Se f è derivabile in x, allora*

$$\forall \xi \in I : \ f(\xi) \geq f(x) + f'(x)(\xi - x) .$$

Infatti, dalla definizione di convessità, risulta immediatamente che

$$\frac{f\big(x + t(\xi - x)\big) - f(x)}{t(\xi - x)} \leq \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

per ogni $t \in]0, 1[$, *da cui segue la proprietà desiderata passando al limite per* $t \to 0^+$. *Da un punto di vista geometrico la proprietà appena enunciata si commenta dicendo che per una funzione convessa e derivabile, il grafico della funzione rimane sempre al di sopra della retta tangente in ogni punto. Naturalmente, per una funzione concava e derivabile, il grafico della funzione rimane sempre al di sotto della retta tangente.*

Vediamo ora che le funzioni convesse sono continue all'interno del dominio.

(7.3) Teorema *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa. Allora* $f|_{]a,b[}$ *è continua.*

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in]a, b[$, consideriamo la retta r passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(a, f(a))$ e la retta s passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(b, f(b))$, aventi rispettivamente equazioni

$$y = f(x_0) + \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(x - x_0), \qquad y = f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0).$$

Allora, per definizione dei funzione convessa, si deve avere

$$f(x_0) + \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0),$$

per ogni $x \in [x_0, b]$. Passando al limite per $x \to x_0^+$ si ottiene la continuità di f a destra in x_0. Ragionando in modo simile si ottiene

$$f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(x - x_0),$$

per ogni $x \in [a, x_0]$, da cui segue anche la continuità di f a sinistra in x_0. ■

(7.4) Osservazione *Il teorema precedente diventa falso senza l'ipotesi che l'intervallo* I *sia aperto in* $\mathbb{R}$, *come si evince dal seguente semplice esempio: sia* f *la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 0 \\ x^2 & se\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allora f *è convessa ma discontinua sull'intervallo chiuso* $[0, 1]$.

(7.5) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su* $\text{int}(I)$. *Allora f è convessa se e solo se $f' : \text{int}(I) \to \mathbb{R}$ è crescente.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia convessa. Siano $x_0, x_1 \in \text{int}(I)$ con $x_0 < x_1$. Per ogni $s, t \in]0, 1[$ risulta

$$f\big(x_0 + s(x_1 - x_0)\big) - f(x_0) \leq s\big(f(x_1) - f(x_0)\big),$$

$$f\big(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)\big) - f(x_1) \leq (1-t)\big(f(x_0) - f(x_1)\big),$$

da cui

$$\frac{f\big(x_0 + s(x_1 - x_0)\big) - f(x_0)}{x_0 + s(x_1 - x_0) - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f\big(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)\big) - f(x_1)}{x_1 + (1-t)(x_0 - x_1) - x_1}.$$

Passando al limite per $s \to 0$ e $t \to 1$, si ottiene

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1).$$

Supponiamo ora che f' sia crescente. Siano $x_0, x_1 \in I$ e sia $t \in]0, 1[$. Supponiamo ad esempio $x_0 < x_1$. Applicando il Teorema di Lagrange agli intervalli $[x_0, (1-t)x_0 + tx_1]$ e $[(1-t)x_0 + tx_1, x_1]$, si ottiene

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) - f(x_0) = f'(\xi_0)t(x_1 - x_0),$$

$$f(x_1) - f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) = f'(\xi_1)(1-t)(x_1 - x_0),$$

con $x_0 < \xi_0 < (1-t)x_0 + tx_1 < \xi_1 < x_1$. Poiché $f'(\xi_0) \leq f'(\xi_1)$, ne segue

$$(1-t)\Big(f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) - f(x_0)\Big) \leq t\Big(f(x_1) - f\big((1-t)x_0 + tx_1\big)\Big),$$

ossia

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

da cui la tesi. ■

(7.6) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile due volte su* $\text{int}(I)$. *Allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$.*

Dimostrazione. Dai Teoremi (4.9) e (4.10) si deduce che che $f' : \text{int}(I) \to \mathbb{R}$ è crescente se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$. La tesi segue allora dal teorema precedente. ■

(7.7) Esempio *Sia* $\alpha \in [1, +\infty[$ *e sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da* $f(x) = |x|^\alpha$. *Allora* f *è convessa. Si verifica invece che la funzione* $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è concava. Mediante questa proprietà si dimostra la seguente notevole disuguaglianza: siano* $\alpha, \beta \in]1, +\infty[$ *tali che* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. *Allora*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |xy| \leq \frac{1}{\alpha}\,|x|^\alpha + \frac{1}{\beta}\,|y|^\beta .$$

Inoltre, se $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *sono tali che* $\alpha < \beta$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $M > 0$ *tale che*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x|^\alpha \leq \varepsilon |x|^\beta + M .$$

8 Esercizi

(8.1) Esercizio *Determinare le derivate delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione:*

$f(x) = 10x^7 - 3x^2 + 1,$	$f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1},$	$f(x) = \frac{1}{\sin(x)},$
$f(x) = \sqrt{x},$	$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\right),$	$f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}},$
$f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}},$	$f(x) = x^x,$	$f(x) = \arctan(x + 3^x),$
$f(x) = \ln(\ln x),$	$f(x) = (x^2 + 2)^{\sin x},$	$f(x) = e^{e^x},$
$f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x},$	$f(x) = \sin^2 x \sin(x^2),$	$f(x) = \sin^2(\cos 3x),$
$f(x) = \ln(\tan x),$	$f(x) = \log_3(\log_2(\log_5(x))),$	$f(x) = 2^{\sin x},$
$f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}},$	$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$	$f(x) = (\sin x)^{\cos x}.$

(8.2) Esercizio *Sia $f(x)$ la funzione così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x)\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. *Stabilire se la funzione è continua in $x = 0$;*
2. *stabilire se la funzione è derivabile in $x = 0$;*
3. *stabilire se la funzione deriata è continua nell'insieme dei numeri reali.*

(8.3) Esercizio *Verifica se le seguenti funzioni, nell'intervallo chiuso a fianco indicato, soddisfano le ipotesi del Teorema di Lagrange e, in caso affermativo, calcolare le ascisse dei punti che verificano il suddetto teorema:*

1. $y = x - x^3 \qquad [-2; 1]$;
2. $y = x^2 \qquad [3; 4]$;
3. $y = \frac{x^2-x-4}{x-1} \qquad [-1; 0]$;
4. $y = x|2x - 1| \qquad [0; 2]$;

(8.4) Esercizio *Si determinino gli insiemi nei quali le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:*

1. $y = x^2 - 5x + 6$;

2. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$;

3. $y = \frac{3x+1}{x+1}$;

4. $y = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$;

(8.5) Esercizio *Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della curva $y = f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$:*

1. $f(x) = \cos x, \qquad x_0 = \pi/3$;

2. $f(x) = \sin(\log x), \qquad x_0 = e^{\pi/3}$;

3. $f(x) = (x \log |x|)^3, \qquad x_0 = -1$;

4. $f(x) = e^{-|x|}, \qquad x_0 = -1$;

(8.6) Esercizio *Determinare per ciascuna delle seguenti funzioni i punti di massimo o minimo relativo:*

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ *per* $x \in [0; 2]$;

2. $f(x) = 3x + 1/x$, *per* $x \in (0; 3]$;

3. $f(x) = x^{2/3}(x - 5)$, *per* $x \in [0; 4]$;

4. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$, *per* $x \in [-4; 3]$.

(8.7) Esercizio *Utilizzando i teoremi sulle derivate dimostrare che:*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

(8.8) Esercizio *Utilizzare il teorema di Lagrange per dimostrare la seguente disuguaglianza:*

$$e^x \geq x + 1.$$

(8.9) Esercizio *Stabilire per quali valori di a la seguente funzione è continua e derivabile in $x = 0$:*

$$f(x) = \begin{cases} (\sin(|x|^a) \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(8.10) Esercizio *Calcolare la $f'(0)$ in base alla definizione. Calcolare poi $f'(x)$ per $x \neq 0$, e stabilire se la derivata prima è continua in $x = 0$.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{(-1/x^2)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(8.11) Esercizio *Calcolare la derivata n-esima di:*

1. $f(x) = xe^x$;
2. $f(x) = x^n\sqrt{x}$;
3. $f(x) = \sin(2x)$.

(8.12) Esercizio *Verificare che la funzione $f(x) = \sin(e^x)$ soddisfa l'equazione*

$$f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0.$$

(8.13) Esercizio *Scrivere l'equazione della tangente in $x_0 = 0$ al grafico della funzione $f(x)$, sapendo che tale funzione è continua e derivabile con continuità e che*

1. $f(0) = 0$;
2. $\lim_{x\to 0} f'(x)\frac{x+2}{x-3} = 4$.

(8.14) Esercizio *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Mostrare che in ogni punto $x_0 \in (a,b)$ f ammette derivata destra e derivata sinistra.*

(8.15) Esercizio *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$f(x_0) > \max\left\{\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x)\right\}.$$

Mostrare che f ammette massimo su (a,b).

(8.16) Esercizio *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$f(x_0) < \min\left\{\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x)\right\}.$$

Mostrare che f *ammette minimo su* (a, b).

(8.17) Esercizio *Sia* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile. Supponiamo che esista* $x_0 > 0$

$$f(x_0) > \max\left\{\lim_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right\}.$$

Mostrare che f *ammette massimo su* $[0, +\infty)$.

(8.18) Soluzione esercizio (8.2). *Si ha che*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

e quindi le funzione è continua in $x = 0$. *La derivata prima di* f *è uguale a*

$$\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}(1-\cos(x))\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

quando $x \neq 0$. *Per vedere se la funzione è derivabile in* $x = 0$ *usiamo la definizione di derivata e cioè calcoliamo*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0.$$

Quindi $f'(0) = 0$. *Si vede facilmente che*

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

non esiste e pertanto f' *non è continua in* $x = 0$.

(8.19) Soluzione esercizio (8.7). *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si vede facilmente che $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Pertanto* f *è una funzione costante in* $(-\infty, 0)$ *e in* $(0, +\infty)$. *Per calcolare il valore della costante, basta ad esempio valutare* $f(-1)$ *e* $f(1)$. *Si ha che*

$$f(-1) = -2\arctan(1) = -2\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$f(1) = 2\arctan(1) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(8.20) Esercizio *Utilizzare la regola di de l'Hopital per risolvere i seguenti limiti:*

1. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos(x)}$;

2. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$;

3. $\lim_{x\to+\infty} x^2(\arctan(x+1) - \arctan(x))$;

4. $\lim_{x\to-1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}\right)$;

5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^{x\log(x^2)}}{(e^{2x}-1)(\log x)^2}$;

6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^3/6}{2x^2+2x+1-e^{2x}}$

(8.21) Esercizio *Scrivere la formula di McLaurin arrestata al quarto ordine con resto in forma di Peano di:*

$$f(x) = (\sin x)^2$$

(8.22) Esercizio *Scrivere la formula di McLaurin arrestata al terzo ordine con resto in forma di Peano di:*

$$f(x) = e^{\sin x}$$

(8.23) Esercizio *Risolvere i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}$;

2. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$;

3. $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^{3\sqrt{(x^2+1)}+\log x}$;

4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\sin x+x^2/2}{x^3}$

(8.24) Esercizio *Discutere al variare del parametro a il seguente limite (utilizzare gli sviluppi di Taylor):*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+\sin^2 x) - 2(1-\cos(\sqrt{x}))}{x^a}$$

(8.25) Esercizio *Discutere al variare del parametro a il seguente limite (utilizzare gli sviluppi di Taylor):*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$$

(8.26) Esercizio *Sia f una funzione di classe C^3 tale che:*

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=e^2$$

calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

(8.27) Esercizio *Studiare il grafico della seguente funzione:*

$$f(x)=\sqrt{e^x-1-x}$$

(8.28) Esercizio *Tracciare il grafico delle seguenti funzioni*

1. $f(x)=2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x$;
2. $f(x)=xe^{\frac{3}{\ln x}}$;
3. $f(x)=(x-1)e^x-(x+1)e^{-x}$;
4. $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{se } x<0, \\ -x^2+1, & \text{se } x\geq 0; \end{cases}$
5. $f(x)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}}\right)$;
6. $f(x)=\arctan\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|^{\frac{1}{2}}\right)$;
7. $f(x)=\frac{e^{-|x+2|}-\frac{3x}{4}-\frac{5}{2}}{x+2}$;
8. $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln|x|}$.

(8.29) Esercizio *Data la funzione*

$$f(x)=\arctan\left(\ln\left(e^x-\sqrt{|x|}\right)\right),$$

1. *determinare il campo di esistenza di f;*
2. *studiare il grafico delle funzioni*

$$g(x)=e^x-\sqrt{|x|}$$

e

$$h(x)=\ln\left(e^x-\sqrt{|x|}\right);$$

3. *trovare i punti di massimo e minimo locale;*
4. *disegnare il grafico di f;*
5. *qual è l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0^+$?*

(8.30) Esercizio *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}\,.$$

1. *Tracciare il grafico di f.*
2. *Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nei punti A di ascissa $x = 0$ e B di ascissa $x = 4$.*
3. *Determinare le coordinate del punto C di intersezione delle due tangenti e calcolare l'area del triangolo trovato.*
4. *Indicati con x_1 e x_2 le ascisse dei punti di intersezione del grafico di f con la retta $y = h$, calcolare*
$$x_1 + x_2, \quad x_1 x_2, \quad \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}.$$
5. *Una generica retta r uscente dal punto A interseca il grafico di f in due punti P_1 e P_2. Trovare l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto medio P del segmento P_1P_2 al variare di r e disegnare tale curva.*