Superfici

Geometria course, part 3/3 – outline of topics covered.

Warning: no pictures!

Contents

1 Prime definizioni

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme aperto e connesso del piano euclideo. (L'aperto U è l'analogo dell'intervallo I per le curve.) Coordinate (u, v).

- Un'applicazione $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ significa una terna (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) dove ogni $\phi_i : U \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞.
- Il differenziale $d\phi_{(u,v)}$ significa la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

- Ad ogni punto $(u, v) \in U$, la matrice jacobiana rappresenta l'applicazione lineare che manda un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ basato al punto (u, v), al vettore $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ basato al punto $\phi(u, v)$.
- Se il rango di $d\phi_{(u,v)}$ è 2, ci sono due direzioni indipendenti di rette tangenti alla superficie passanti per $\phi(u, v)$, ossia c'è un *piano tangente* passante per $\phi(u, v)$.

Definizione. *Una* superficie immersa *(o* parametrizzata*) è un'applicazione $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che il differenziale $d\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ abbia rango 2 in ogni punto $(u, v) \in U$.*

- L'immagine $\phi(U)$ è detta il *sostegno* di ϕ.
- Caveat: Il sostegno $\phi(U)$ di una superficie parametrizzata non è necessariamente omeomorfo a U (ad esempio se la superficie si interseca).

A noi interessano le superfici *regolari* (c.f. curve regolari):

Definizione. *Una superficie regolare e un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ tale che, per ogni $\mathbf{p} \in S$, esistono un intorno W di $\mathbf{p}$ in $\mathbb{R}^3$, un sottoinsieme connesso $U \subset \mathbb{R}^2$, e un'applicazione (di classe C^∞) $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ tale che*

1. *$\phi(U) = W \cap S$ e $\phi : U \to W \cap S$ è un omeomorfismo,*
2. *$d\phi_{(u,v)}$ è iniettivo (ha rango 2) $\forall (u, v) \in U$.*

- La prima condizione garantisce che ogni punto p di S ha un intorno in S diffeomorfo ad un aperto in $\mathbb{R}^2$.
- Per la seconda condizione, ad ogni punto p di S c'è un piano tangente passante per p, generato dai vettori indipendenti $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$.
- La coppia (U, ϕ) è detta una *carta locale* in $\mathbf{p}$.
- L'applicazione ϕ è detta *parametrizzazione locale* in $\mathbf{p}$
- le coordinate (u, v) dell'aperto U sono dette *coordinate locali* in $\mathbf{p}$.

Definizione. *Una collezione $\{(W_\alpha, U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ di carte locali che ricoprono S è detta* un'atlante *per S.*

2 Esempi di superfici regolari

Esempio. La superficie parametrizzata $\phi(u, v) = (u^3, v^3, uv)$ *non è* una superficie regolare. Perchè $d\phi = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \\ v & u \end{pmatrix}$ non ha rango 2 per $(u, v) = (0, 0)$.

Esempio. La superficie parametrizzata $\phi(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$ *non è* una superficie regolare.

2.1 Grafici

Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione liscia (cioè di classe C^∞). Il grafico di f è l'insieme

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 | (u, v) \in U\}$$

ed è una superficie regolare:

1. L'applicazione $\phi : U \to \mathrm{Gr}(f)$ data da $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ è una carta locale che ricopre $\mathrm{Gr}(f)$. Si vede che ϕ è un diffeomorfismo perchè la proiezione $\pi : \mathrm{Gr}(f) \to U$ data da $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ è l'inversa.
2. La matrice jacobiana è $d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$ ha rango due ad ogni punto (u, v) perchè le prime due righe sono linearmente indipendenti.

Lemma 2.1.1. *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare, allora ogni punto $p \in S$ ha un intorno omeomorfo ad un grafico $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ o $(u, f(u, v), v)$ o $(f(u, v), u, v)$.*

2.2 Insiemi di livello.

Definizione. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞.*

- *Un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si dice un* punto critico *di f se la matrice jacobiana $df = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ non ha rango massimo. (Quindi, dato che il rango massimo di df sarebbe 1, per non avere rango 1 dev'essere uguale a $(0, 0, 0)$ ad un punto critico). Le immagini dei punti critici tramite f (che sono quindi punti di $\mathbb{R}$ nell'immagine di f) sono dette* valori critici *di f.*
- *Un punto $a \in \mathbb{R}$ si dice un* valore regolare *se, per ogni $x \in f^{-1}(a)$, si ha $df(x) \neq (0, 0, 0)$. Cioè $a \in \mathbb{R} \cap f(\mathbb{R}^3)$ è un valore regolare se e solo se la controimmagine $f^{-1}(a)$ non contiene nessun punto critico di f.*

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Quindi $df = 2(x, y, z)$. Allora

1. l'unico punto critico di f è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$;
2. qualsiasi $a < 0$ è automaticamente regolare, perchè $f^{-1}(a)$ è vuoto (quindi non contiene un punto critico);
3. qualsiasi $a > 0$ è regolare, perchè $x^2 + y^2 + z^2 = a \implies (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ quindi $f^{-1}(a)$ non contiene un punto critico.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x, y, z) = xyz$. Quindi $df = (yz, xz, xy)$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme aperto e $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞. Se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f, allora ogni componente connessa dell'insieme di livello $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare.*

Dimostrazione. Per ogni $(x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$ sappiamo che $df(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Supponiamo, senza perdità di generalità, che $\partial f/\partial z \neq 0$. In questo caso costruiamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{pmatrix}$ che ha determinante $\partial f/\partial z \neq 0$.

Questa matrice è la matrice jacobiana $dF(x, y, z)$ dell'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Per il teorema della funzione inversa, se $dF(x_0, y_0, z_0)$ è invertibile, allora F è un diffeomorfismo locale, ossia F è un diffeomorfismo tra un intorno V di (x_0, y_0, z_0) ed un intorno W di $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, a)$. Inoltre possiamo supporre, senza perdità di generalità, che $W = U \times \tilde{U}$ dove $U \subset \mathbb{R}^2$ è un intorno di (x_0, y_0) e $\tilde{U} \subset \mathbb{R}$ è un intorno di a (perchè gli intorni che sono prodotti di aperti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di intorni – ogni intorno contiene un intorno del genere).

Quindi, $F : V \to W = U \times \tilde{U}$ è un diffeomorfismo, indichiamo la sua inversa con $G : W \to V$.

Sia $\phi : U \to f^{-1}(a)$ la funzione data da $\phi(x, y) = G(x, y, a)$. Verifichiamo che (U, ϕ) è una carta locale in (x_0, y_0, z_0):

1. L'applicazione $\phi : U \to \phi(U)$ è un'omeomorfismo perchè è la composizione di due omeomorfismi,

$$\begin{array}{rcl} I : U & \to & U \times \{a\} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, z) \\ G : U \times \{a\} & \to & G(U \times \{a\}) \\ (x, y, a) & \mapsto & G(x, y, a) \end{array}$$

   e $\phi(U) = G(U \times \{a\}) = f^{-1}(a) \cap V$.

2. $d\phi = dGdI = dG \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = la matrice 3x2 avente le prime due colonne di dG. Poichè dG è invertibile, le sue colonne sono linearmente indipendenti, quindi $d\phi$ è una matrice con due colonne indipendenti, perciò il rango di $d\phi$ è 2.

□

2.3 Superfici di rotazione

Definizione. *Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ un'arco (o curva) di Jordan, la cui traccia $\sigma(I)$ è contenuta in un piano $H \subset \mathbb{R}^3$, e sia L una retta in H disgiunta da $\sigma(I)$. La* superficie di rotazione *generata dalla curva σ e la retta L è la superficie ottenuta ruotando σ intorno a L.*

Proposizione 2.3.1. *Una superficie di rotazione è una superficie regolare.*

Proof. Senza perdità di generalità possiamo supporre (tramite un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$) che H sia il piano xz e L sia l'asse z. Abbiamo una curva parametrizzata $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(s) = (\sigma_1(s), 0, \sigma_2(s))$, e una matrice di rotazione R_θ data da

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La superficie di rotazione è l'insieme $S = \{R_\theta \sigma(s) | s \in I, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Una carta locale è la coppia (U, ϕ) dove $U = I \times (0, 2\pi)$ e ϕ è la funzione

$$\phi(s, \theta) = R_\theta \sigma(s).$$

Essere un'arco di Jordan significa che $\sigma : I \to \sigma(I)$ è un diffeomeomorfismo, □

---

3 Vettori tangenti e il piano tangente

- $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ una carta locale per S, $\phi(u, v) = \begin{bmatrix} \phi_1(u, v) \\ \phi_2(u, v) \\ \phi_3(u, v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- La matrice jacobiana/il differenziale di ϕ è la matrice $D\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u} \frac{\partial\phi}{\partial v} \right)$.
- Le colonne di $D\phi$ generano uno spazio vettoriale di dimensione 2, ossia un piano, indicato con T_pS. Cioè T_pS è lo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$. Il *piano tangente in p* è il piano parallelo a T_pS passante per p, cioè il sottoinsieme $\{p + \mathbf{v} | \mathbf{v} \in T_pS\}$ di $\mathbb{R}^3$.
- Il prodotto vettoriale $\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}$ è quindi ortogonale al piano tangente.
- L'equazione del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\mathbf{p}$ avente normale $\mathbf{n}$ è $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Il piano tangente in $\mathbf{p} = \phi(u, v)$ è quindi dato dalla formula $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \rangle = 0$.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞. Sia $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare, percui l'insieme di livello $S = f^{-1}(a)$ è una superficie regolare. Allora $\nabla f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$ è normale a $T_\mathbf{p}S$, e quindi l'equazione del piano tangente ad S passante per $\mathbf{p} \in S$ è data da $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \nabla f(\mathbf{p}) \rangle$.

Sia $\phi : U \to S$ qualsiasi carta locale in $\mathbf{p}$. Poichè l'immagine di ϕ è contenuta nell'insieme di livello $f^{-1}(a)$, vediamo che la composizione $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ è costante ($f \circ \phi(u, v) = a$). Quindi, la matrice jacobiana di $f \circ \phi$ è zero: $d(f \circ \phi) = (0\ 0)$. Dato che $d(f \circ \phi) = df d\phi = (\nabla f)^T d\phi$ significa che

$$(\nabla f)^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\ \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) = (0\ \ 0)$$

ossia $\nabla f \perp \frac{\partial \phi}{\partial u} \rangle$ e $\nabla f \perp \frac{\partial \phi}{\partial v}$. Poichè $\{\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\}$ è una base di $T_\mathbf{p}S$, concludiamo che ∇f è ortogonale al piano tangente, ossia ∇f è normale al piano tangente.

4 Smoothness and local smoothness

Proposizione 4.0.2. *Sia S una superficie regolare. Per ogni $p \in S$, esiste un'intorno W di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $W \cap S$ è un grafico (cioè $W \cap S$ ha una delle seguenti parametrizzazioni: $(x, y, f(x, y))$, $(x, f(x, z), z)$, oppure $(f(y, z), y, z)$).*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ e sia (U, ϕ) una carta locale in p con parametri locali (u, v) e $p = \phi(u_0, v_0)$. Poichè $\phi_u(u_0, v_0)$ e $\phi_v(u_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti, il loro prodotto vettoriale $\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$ non è nulla, perciò al meno una delle sue tre entrate non è nulla. Supponiamo, senza perdità di generalità, che la terza entrata di $\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$ non sia nulla, perciò $\frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \neq 0$. Ma questa quantità è il determinante della matrice jacobiana $DF(u_0, v_0)$ di un'applicazione $F : U \to \mathbb{R}^2$ data da $F(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$. Per il teorema dell'esistenza dell'inversa locale, il fatto che $0 \neq \det DF(u_0, v_0)$ implica che esistono un'intorno W di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ ed un'intorno U' di (u_0, v_0) in $\mathbb{R}^2$ tale che $F : U' \to W$ è un diffeomorfismo. Quindi, abbiamo una nuova carta locale in $p = (x_0, y_0, z_0)$, data dalla coppia $(W, \phi \circ F^{-1})$. I parametri locali di W sono (x, y), e abbiamo $\phi \circ F^{-1}(x_0, y_0) = (x_0, y_0, z_0)$, e $\phi \circ F^{-1}(x, y) = (x, y, \phi_3(F^{-1}(x, y))$. □

Lemma 4.0.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Per ogni $p \in S$, esistono un intorno W di p in $\mathbb{R}^3$, una carta locale (U, ϕ) in p e una funzione differenziabile $G : W \to U$ tale che $G|_{W \cap S} = \phi^{-1}$ e quindi $G \circ \phi : U \to U$ è l'identità $G \circ \phi(u, v) = (u, v)$.*

Proof. Sia (U, ϕ) una carta locale in $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$. Prendendo U sufficientemente piccolo, possiamo inoltre supporre che l'aperto di S sia un grafico, e senza perdità di generalità supponiamo che sia un grafico del tipo $(x, y, f(x, y)$. In un'intorno W di (x_0, y_0, z_0) l'applicazione $G : W \to U$ data da $(x, y, z) \mapsto F^{-1}(x, y) = (u, v)$ è differenziabile, essendo la composizione della proiezione $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ e il diffeomorfismo $F^{-1}(x, y) = (u, v)$. Perciò $G|_{W \cap S} = \phi^{-1}$. □

Corollario 4.0.4. *Siano (U, ϕ) e (W, ψ) due carte locali in $p \in S$. Allora l'applicazione*

$$\psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(U \cap W) \to \psi^{-1}(U \cap W)$$

è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. Siccome ψ e ϕ sono omemorfismi, la composizione $\psi^{-1} \circ \phi$ è un'omeomorfismo. È un diffeomorfismo se e solo se $\psi^{-1} \circ \phi$ e l'inversa $\phi^{-1} \circ \psi$ sono anche applicazioni *differenziabili*. Differenziabilità è una proprietà locale – può essere verificata in una carta locale qualsiasi. Per Lemma 4.0.3, per ogni punto $p \in S$ possiamo trovare una palla aperta B di p (aperta in $\mathbb{R}^3$) e una funzione differenziabile $G : B \to \psi^{-1}(B \cap S)$ tale che $G|_{B \cap S} = \psi^{-1}|_{B \cap S}$. Quindi la composizione

$$\psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(U \cap W \cap B) \to \psi^{-1}(U \cap W \cap B)$$

soddisfa $\psi^{-1} \circ \phi = G \circ \phi$. La funzione $G \circ \phi$ è la composizione di due funzioni differenziabili, quindi è differenziabile; concludiamo quindi che $\psi^{-1} \circ \phi$ è differenziabile.

Analogamente si trova che $\phi^{-1} \circ \psi$ è differenziabile.

$\square$

5 Funzioni differenziabili

Siano S una superficie regolare e $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Siccome S non contiene un aperto di $\mathbb{R}^3$ (ossia S è mai denso in $\mathbb{R}^3$), non ha senso parlare di derivate rispetto ai variabili x, y, z di $\mathbb{R}^3$.

Comunque, localmente ci sono le carte locali. Data una carta locale (U, ϕ) di S, la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ determina una funzione $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$.

Definizione. *Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ si dice* differenziabile *(di classe C^∞) se per ogni carta locale (U, ϕ) di S la funzione composta $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ è differenziable (di classe C^∞).*

Analogamente, se abbiamo una funzione continua $F : S_1 \to S_2$ tra due superfici regolari, differenziabilità significa differenziabilità rispetto alle carte locali.

Definizione. *Una funzione continua $F : S_1 \to S_2$ si dice* differenziabile *se, per ogni $p \in S_1$, esistono una carta locale (U_1, ϕ_1) in $p \in S_1$, e una carta locale (U_1, ϕ_2) in $F(p) \in S_2$, con $F(U_1) \subset U_2$, tale che la composizione $\phi_2 - 1 \circ F \circ \phi_1 : U_1 \to U_2$ è una funzione differenziabile.*

Lemma 5.0.5. *$F : S_1 \to S_2$ è differenziabile $\iff$ $F \circ \phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ è differenziabile per ogni carta locale (U_1, ϕ_1) di S_1.*

Dimostrazione. $\Longleftarrow$ è ovvio.

$\Longrightarrow$: Supponiamo che F sia differenziabile rispetto ad una carta locale (U_1, ϕ_1) in p (ossia $F \circ \phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ sia differenziabile). Sia (W_1, ψ_1) un'altra carta locale in p. Per il Corollario 4.0.4 la composizione $\phi_1^{-1} \circ \psi_1$ è un diffeomorfismo. Allora $F \circ \psi_1 = (F \circ \phi) \circ (\phi_1^{-1} \circ \psi_1)$ è la composizione di un diffeomorfismo con una funzione differenziabile, quindi è differenziabile. $\square$

6 La prima forma fondamentale

Definizione. *La* prima forma fondamentale *di S è l'applicazione $I_\mathbf{p} : T_\mathbf{p} S \to \mathbb{R}$ data da $I_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ \ \forall \mathbf{p} \in S$.*

Sia (U, ϕ) una carta locale di S, con coordinate locali (u, v).

L'applicazione $D\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to T_{\phi(u,v)} S$ è biunivoca, e identifica il vettore $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con il vettore $D\phi_{(u,v)} \mathbf{w} = w_1 \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) + w_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)$ di $T_{\phi(u,v)} S$.

Lemma 6.0.6. *La matrice $D\phi^T_{(u,v)} D\phi_{(u,v)}$ è simmetrica e definita positiva. Indicando le entrate con $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ dove E, F, G sono funzioni dei variabili u e v, abbiamo per ogni $\eta, \xi \in \mathbb{R}^2$ che*

$$\xi^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \eta = \langle d\phi_{(u,v)} \xi, d\phi_{(u,v)} \eta \rangle$$

dove $\langle , \rangle$ significa il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$. Quindi, la prima forma fondamentale rispetto alla carta locale è

$$I_{(u,v)}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mathbf{w} = w_1^2 E(u, v) + 2 w_1 w_2 F(u, v) + w_2^2 G(u, v).$$

Dimostrazione. Dato che $D\phi_{(u,v)} \xi$ e $D\phi_{(u,v)} \eta$ sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle D\phi_{(u,v)} \xi, d\phi_{(u,v)} \eta \rangle &= (D\phi_{(u,v)} \xi)^T D\phi_{(u,v)} \eta \\ &= \xi^T D\phi^T_{(u,v)} D\phi_{(u,v)} \eta. \end{aligned}$$

$\square$

Dato che $D\phi^T_{(u,v)} d\phi_{(u,v)} = \begin{bmatrix} (\partial_u\phi)^T \\ (\partial_v\phi)^T \end{bmatrix} (\partial_u\phi \;\; \partial_v\phi) = \begin{pmatrix} \langle\partial_u\phi, \partial_u\phi\rangle & \langle\partial_u\phi, \partial_v\phi\rangle \\ \langle\partial_v\phi, \partial_u\phi\rangle & \langle\partial_v\phi, \partial_v\phi\rangle \end{pmatrix}$ vediamo che

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle \\ F(u,v) &= \langle\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle \\ G(u,v) &= \langle\frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle. \end{aligned}$$

6.1 Lunghezza d'arco

Sia $\sigma : [a,b] \to U$ una curva in U. Allora $\phi \circ \sigma : [a,b] \to S$ è una curva in $S \subset \mathbb{R}^3$. La lunghezza di $\phi \circ \sigma$ è

$$\begin{aligned} L(\phi\circ\sigma) &= \int_a^b \|(\phi\circ\sigma)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle\phi\circ\sigma)'(t), \phi\circ\sigma)'(t)\rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle d\phi_{\sigma(t)}\sigma'(t), d\phi_{\sigma(t)}\sigma'(t)\rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{I_{\sigma(t)}(\sigma'(t))} dt \end{aligned}$$

Esempio. Sia S il grafico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$. Sia $\sigma : [a,b] \to U$ una curva $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$.

Quindi $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$, $\partial_u\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{bmatrix}, \partial_v\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{bmatrix}$. $\langle\partial_u\phi, \partial_u\phi\rangle = 1 + (\partial_u f)^2, \langle\partial_u\phi, \partial_v\phi\rangle = \partial_u f \partial_v f, \langle\partial_v\phi, \partial_v\phi\rangle = 1 + (\partial_v f)^2$.

Prima forma fondamentale:

$$\begin{aligned} I_{(u,v)}\mathbf{w} &= \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} (1 + (\partial_u f)^2 & \partial_u f \partial_v f \\ \partial_u f \partial_v f & 1 + (\partial_v f)^2 \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ &= (1 + (\partial_u f)^2) w_1^2 + 2\partial_u f \partial_v f w_1 w_2 + (1 + (\partial_v f)^2) w_2^2. \end{aligned}$$

Lunghezza dell'immagine di σ tramite ϕ:

$$L(\phi\circ\sigma) = \int_a^b \sqrt{(1 + (\partial_u f)^2)(\sigma_1'(t))^2 + 2\partial_u f \partial_v f \sigma_1'(t)\sigma_2'(t) + (1 + (\partial_v f)^2)(\sigma_2'(t))^2} dt$$

6.2 Area

- Sia $\phi : U \to S$ una carta locale, coordinate locali $\mathbf{u} = (u, v)$.
- Sia R un piccolo rettangolo in U avente lati di lunghezza $\triangle u$ e $\triangle v$, e quindi un'area di $\triangle u \triangle v$.
- Sia $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \in U$. In un intorno molto piccolo di $\phi(\mathbf{u}_0)$, la superficie S può essere approssimata dal piano tangente passante per $\phi(\mathbf{u}_0)$, e la funzione $\phi(\mathbf{u})$ può essere approssimata dalla funzione $d\phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$. Sia R un piccolo rettangolo in U basato a $\mathbf{u}_0$ avente lati $\triangle u\mathbf{e}_1$ e $\triangle v\mathbf{e}_2$. L'area di $\phi(R)$ può essere approssimata dall'area del parallelogramma generato dai due vettori

$$\begin{aligned} d\phi_{\mathbf{u}_0}(\triangle u\mathbf{e}_1) &= \triangle u d\phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{e}_1) = \triangle u \frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0) \\ d\phi_{\mathbf{u}_0}(\triangle v\mathbf{e}_2) &= \triangle v d\phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{e}_2) = \triangle v \frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Quindi $area(\phi(R)) \cong area(d\phi_{(u,v)}(R)) = \|\triangle u \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \triangle v \frac{\partial\phi}{\partial v}\| = \triangle u \triangle v \|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\| = area(R)\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\|$.

Quindi, se U è una regione in $\mathbb{R}^2$ contenuta in una carta locale, l'area di $\phi(U)$ è il limite

$$\begin{aligned} Area(\phi(U)) = \lim_{\delta_1,\delta_2\to 0} \sum_{i,j} area(d\phi(R_{i,j})) &= \lim_{\triangle u,\triangle v\to 0} \sum_{i,j} \|\partial_u\phi \times \partial_v\phi\| \triangle u \triangle v \\ &= \iint_U \|\partial_u\phi \times \partial_v\phi\| du\ dv. \end{aligned}$$

dove $\bigcup_{i,j} R_{i,j}$ è una sottodivisione di U in piccoli rettangoli aventi lati di lunghezze $\triangle u, \triangle v$.

Per la formula $\|a \times b\|^2 + |a \cdot b|^2 = \|a\|^2\|b\|^2$ abbiamo $\|a \times b\| = \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - |a \cdot b|^2}$ percui

$$\begin{aligned} Area(\phi(U)) &= \iint_U \sqrt{\|\partial_u\phi\|^2\|\partial_v\phi\|^2 - |\partial_u\phi \cdot \partial_v\phi|^2} du\ dv \\ &= \iint_U \sqrt{EG - F^2} du\ dv. \end{aligned}$$

7 Isometrie locali, isometrie

Siano S_1 e S_2 superfici regolari, e $F : S_1 \to S_2$ una funzione differenziabile tra loro. Data una carta locale in S_1, e una carta locale (U_2, ϕ_2) in S_2 tale che $F^{-1}(U_2) \supset U_1$, abbiamo la funzione $\phi : U_1 \to S_1$ e la funzione $F \circ \phi : U_1 \to S_2$.

Definizione. *La funzione F si dice una* isometria locale *se la prima forma fondamentale $I_{(u,v)}(\mathbf{w})$ definita rispetto a $\phi : U_1 \to S_1$ è uguale alla prima forma fondamentale $I_{(u,v)}(\mathbf{w})$ definita rispetto a $F \circ \phi : U_1 \to S_2$.*

Quindi, F è una isometria locale se e solo se $d\phi^T d\phi = d(F \circ \phi)^T d(F \circ \phi)$.

Definizione. *La funzione F si dice una isometria se F è un'omeomorfismo e anche una isometria locale.*

Esempio. La mappa $F : (x, 0, z) \to (\cos x, \sin x, z)$ è un'applicazione dal piano xz al cilindro di raggio unitario centrato all'asse z. Non è un'omeomorfismo (perchè non è biunivoca) ma è una isometria locale:

$$d\phi^T d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d(F \circ \phi)^T d(F \circ \phi) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Superfici orientate

Definizione. *La superficie S si dice orientabile se esiste un'applicazione differenziabile $\mathbf{n} : S \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{n}(p) \perp T_pS$ ad ogni $p \in S$, e $\|\mathbf{n}(p)\| = 1$ per ogni $p \in S$.*

Poichè $\|\mathbf{n}(p)\| = 1$ per ogni p, $\mathbf{n}$ è una mappa da S a S^2 (la sfera S^2 è l'insieme dei vettori unitari in $\mathbb{R}^3$.)

Definizione. *Un'applicazione differenziabile $\mathbf{n} : S \to S^2$ tale che $\mathbf{n}(p) \perp T_pS$ per ogni $p \in s$ è detta una* mappa di Gauss *per S.*

Poichè ad ogni punto $p \in S$ esistono esattamente due versori normali al piano T_pS, se S è orientabile esistono esattamente 2 possibili mappe di Gauss.

Esempio. Il nastro di Möbius non è orientabile.

Esempio. Mappa di Gauss per un'insieme di livello. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un'applicazione di classe C^∞, e $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare. Allora le componenti connesse dell'insieme di livello $f^{-1}(a)$ sono superfici regolari. Il vettore $\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$ è normale alla superficie quindi $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ è una mappa di Gauss. L'altra mappa di Gauss è $\mathbf{n} = \frac{-\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

Esempio. La sfera di raggio unitario è l'insieme di livello $f^{-1}(1)$ per la funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Abbiamo $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ e quindi una mappa di Gauss è

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \frac{(2x,2y,2z)}{\|(2x,2y,2z)\|} = (x,y,z)$$

perchè sulla sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Esempio. Mappa di Gauss rispetto ad una carta locale. Sia (U,ϕ) una carta locale in $p \in S$. Il prodotto vettoriale $\phi_u \times \phi_v$ è normale al piano tangente T_pS. Una mappa di Gauss è quindi $\mathbf{n}(u,v) = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$. L'altra mappa di Gauss è $\mathbf{n}(u,v) = -\frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$.

Esempio. Mappa di Gauss per un grafico. Siano $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Consideriamo il grafico $Gr(f) = \{(x,y,z) = (u,v,f(u,v)) | (u,v) \in U\}$. Allora una carta locale è (U,ϕ) dove $\phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$. Abbiamo $\phi_u = (1,0,f_u), \phi_v = (0,1,f_v)$ e $\phi_u \times \phi_v = (-f_u, -f_v, 1)$, quindi una mappa di Gauss è

$$\mathbf{n} = \frac{(-f_u,-f_v,1)}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}.$$

Esempio. Mappa di Gauss per una superficie di rotazione. Siano $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) \\ 0 \\ \sigma_2(t) \end{bmatrix}$ l'arco di Jordan nel piano xz, e $R(\theta)$ la matrice di rotazione per angolo θ attorno all'asse z in $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione locale della superficie di rotazione è $\phi(t,\theta) = R(\theta)\sigma(t)$. Siano $T(t)$ il versore tangente e $N(t)$ il versore normale di σ (sempre nel piano xz). Allora $\mathbf{n}(t,\theta) = R(\theta)N(t)$ è una mappa di Gauss per la superficie di rotazione, perchè è ortogonale a $\phi_t = R(\theta)\sigma'(t)$ e $\phi_\theta = R'(\theta)\sigma(t)$ che formano una base per il piano tangente:

$$\langle \phi_t, R(\theta)N(t)\rangle = \langle R(\theta)\sigma'(t), R(\theta)N(t)\rangle = \langle \sigma'(t), N(t)\rangle = 0$$
$$\langle \phi_\theta, R(\theta)N(t)\rangle = \langle R'(\theta)\sigma(t), R(\theta)N(t)\rangle = \sigma(t)^T R'(\theta)^T R(\theta)N(t) = 0$$

perchè $R'(\theta)^T R(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esempio. Mappa di Gauss per il toro parametrizzato da $\phi(\theta,t) = R(\theta)\begin{bmatrix} A + a\cos t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{n}(\theta,t) = R(\theta)\begin{bmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

9 Curvatura

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e orientata con la mappa di Gauss $\mathbf{n} : S \to S^2$.

Consideriamo il differenziale $d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_{\mathbf{n}(p)}S^2$.

Lemma 9.0.1. *$T_pS = T_{\mathbf{n}(p)}S^2$ (ugualianza di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$). Quindi, $d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$, ossia $d\mathbf{n}_p$ è un'* endomorfismo *di T_pS.*

Dimostrazione. Poichè T_pS e $T_{\mathbf{n}(p)}S^2$ sono piani passante per l'origine in $\mathbb{R}^3$ (NB passano per l'origine perchè sono sottospazi vettoriali), è sufficiente verificare che hanno la stessa direzione normale. Per definizione il vettore $\mathbf{n}(p)$ è normale al piano T_pS. Ma $\mathbf{n}(p)$ è anche normale al piano $T_{\mathbf{n}(p)}S^2$, perchè per qualsiasi punto $(x,y,z) \in S^2$, il vettore (x,y,z) è normale al piano tangente $T_{(x,y,z)}S^2$. □

Lemma 9.0.2. *$d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$* è simmetrico *rispetto al prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$, cioè*

$$\langle d\mathbf{n}_p\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n}_p\mathbf{w}\rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS.$$

Dimostrazione. Per linearità è sufficiente verificare l'uguaglianza per i vettori di una base di T_pS. Cioè data una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di T_pS, basta verificare le quattro uguaglianze

$$\langle \mathbf{v}_1, d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_1 \rangle = \langle d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \tag{1}$$
$$\langle \mathbf{v}_1, d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_2 \rangle = \langle d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \tag{2}$$
$$\langle \mathbf{v}_2, d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_1 \rangle = \langle d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \tag{3}$$
$$\langle \mathbf{v}_2, d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_2 \rangle = \langle d\mathbf{n}_p \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle. \tag{4}$$

(1) e (4) seguono per la simmetria del prodotto $\langle , \rangle$. E (2) e (3) sono la stessa uguaglianza (sempre per simmetria). Quindi l'unica uguaglianza da verificare è (2).

Fissata una carta locale (U, ϕ) in p, abbiamo la base $\{\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\}$ di T_pS.
Allora,

$$\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \mathbf{n}(\phi(u,v)) \rangle = 0 \overset{\frac{\partial}{\partial v}}{\Longrightarrow} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u}, \mathbf{n}(\phi(u,v)) \rangle + \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, d\mathbf{n}_p \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle = 0$$
$$\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \mathbf{n}(\phi(u,v)) \rangle = 0 \overset{\frac{\partial}{\partial u}}{\Longrightarrow} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, \mathbf{n}(\phi(u,v)) \rangle + \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, d\mathbf{n}_p \frac{\partial \phi}{\partial u} \rangle = 0$$

Dato che $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^∞ abbiamo $\frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}$, perciò $\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, d\mathbf{n}_p \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle = \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, d\mathbf{n}_p \frac{\partial \phi}{\partial u} \rangle$. $\square$

9.1 La seconda forma fondamentale

Definizione. *La seconda forma fondamentale è l'applicazione*

$$\mathrm{II}_p\, \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p \mathbf{v} \rangle \quad \forall\ \mathbf{v} \in T_pS.$$

Sia (U, ϕ) una carta locale di S, coordinate locali (u, v).

$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$d\phi_{(u,v)} \mathbf{w} = w_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + w_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}$.

$\mathbf{n} \circ \phi : U \to S^2$.

La seconda forma fondamentale rispetto ad una carta locale (U, ϕ) è

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_{(u,v)}(\mathbf{w}) &= \langle d\phi_{(u,v)} \mathbf{w}, -d\mathbf{n}_{\phi(u,v)} d\phi \mathbf{w} \rangle \\ &= -\mathbf{w}^T d\phi^T_{(u,v)} d(\mathbf{n} \circ \phi)_{(u,v)} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

La matrice $-d\phi^T_{(u,v)} d(n \circ \phi)_{(u,v)}$ è simmetrica, indichiamo le sue entrate con $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

Ponendo $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, possiamo anche esprimere la seconda forma fondamentale come una forma quadratica,

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(w_1, w_2) = L w_1^2 + 2M w_1 w_2 + N w_2^2.$$

Per definizione, quindi,

$$L = -\langle \partial_u \phi, \partial_u n \rangle$$
$$M = -\langle \partial_u \phi, \partial_v n \rangle$$
$$N = -\langle \partial_v \phi, \partial_v n \rangle.$$

9.2 La curvatura normale

Sia $\sigma(s)$ una curva parametrizzata risp. alla lunghezza d'arco, e sia $\mathbf{n} : S \to S^2$ una mappa di Gauss. Ricordiamo che $\ddot{\sigma}(s) = \kappa(s) N(s)$ dove $\kappa(s)$ è la curvatura e $N(s)$ il versore normale alla curva σ. Il versore normale $N(s)$

alla curva è ortogonale al versore tangente $\dot\sigma(s) = T(s)$, ossia $\ddot\sigma(s)$ è contenuto nel piano ortogonale a $\dot\sigma(s)$. Una base ortonormale di questo piano è $\mathbf{n}(\sigma(s))$ e $\mathbf{n}(\sigma(s)) \times T(s)$. Poniamo $\mathbf{n}_g(s) := \mathbf{n}(\sigma(s)) \times T(s)$. Quindi $\ddot\sigma(s)$ è una combinazione lineare di $\mathbf{n}(\sigma(s))$ e $\mathbf{n}_g(s)$, ossia

$$\kappa(s)N(s) = \ddot\sigma(s) = \kappa_g(s)\mathbf{n}_g(s) + \kappa_n(s)\mathbf{n}(\sigma(s))$$

con $\kappa(s) = \sqrt{\kappa_g(s)^2 + \kappa_n(s)^2}$.

Definizione. *La* curvatura normale *di σ in $p = \sigma(s)$ è la quantità*

$$\kappa_n(s) = \langle \ddot\sigma(s), \mathbf{n}(\sigma(s))\rangle.$$

Lemma 9.2.1. *La curvatura normale di S in $p \in S$, nella direzione $\mathbf{v} \in T_pS$, per un vettore unitario $\|\mathbf{v}\| = 1$ è*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \mathrm{II}_p(\mathbf{v})$$

Più in generale, se $\mathbf{v}$ non è unitario,

$$\kappa_n(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}) = \frac{\mathrm{II}_p(\mathbf{v})}{I_p(\mathbf{v})}.$$

Una conseguenza è :

Teorema 9.2.2 (Teorema di Meusnier)**.** *La curvatura normale in p è uguale per tutte le curve passanti per p aventi lo stesso versore tangente in p.*

Esempio. Cilindro di raggio r, carta locale $\phi(\theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, normale uscente $\mathbf{n}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

$$d\phi_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d(n\circ\phi)_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\phi^T_{(\theta,z)} d\phi_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d\phi^T_{(\theta,z)} d(n\circ\phi)_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prima e seconda forme fondamentali:

$$\begin{aligned} I_{(\theta,z)}(w_1, w_2) &= r^2 w_1^2 + w_2^2 \\ \mathrm{II}_{(\theta,z)}(w_1, w_2) &= -r w_1^2. \end{aligned}$$

9.3 Altre formule per L, M, N

Dato che $\langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_u\phi\rangle = 0 = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_v\phi\rangle$, se prendiamo le derivate risp. a u e v otteniamo

$$\begin{gathered} \langle d\mathbf{n}\partial_u\phi, \partial_u\phi\rangle + \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{uu}\phi\rangle = 0 \\ \langle d\mathbf{n}\partial_v\phi, \partial_u\phi\rangle + \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vu}\phi\rangle = 0 \\ \langle d\mathbf{n}\partial_v\phi, \partial_v\phi\rangle + \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vv}\phi\rangle = 0 \end{gathered}$$

Dato che $\partial_u\phi = d\phi e_1, \partial_v\phi = d\phi e_2$, abbiamo

$$\begin{gathered} -\langle d\mathbf{n} d\phi e_1, d\phi e_1\rangle = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{uu}\phi\rangle \\ -\langle d\mathbf{n} d\phi e_2, d\phi e_1\rangle = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vu}\phi\rangle \\ -\langle d\mathbf{n} d\phi e_2, d\phi e_2\rangle = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vv}\phi\rangle. \end{gathered}$$

Quindi

$$\begin{aligned} L &= \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{uu}\phi\rangle, \\ M &= \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vu}\phi\rangle, \\ N &= \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vv}\phi\rangle \end{aligned}$$

Esempio. Graph of a function: $f : U \to \mathbb{R}$, and $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$. For the Gauss map we can use $\mathbf{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\|}$. Given that $\partial_u\phi = (1,0,f_u), \partial_v\phi = (0,1,f_v)$, we have $\partial_u\phi \times \partial_\phi = (-f_u, -f_v, 1)$, we see that $\mathbf{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}\begin{bmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{bmatrix}$. Let's compute the second fundamental form:

$$
\begin{aligned}
L(u,v) = \langle \mathbf{n}(u,v), \partial_{uu}\phi\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u,-f_v,1),(0,0,f_{uu}(u,v))\rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} \\
M(u,v) = \langle \mathbf{n}(u,v), \partial_{uv}\phi\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u,-f_v,1),(0,0,f_{uv}(u,v))\rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} \\
N(u,v) = \langle \mathbf{n}(u,v), \partial_{vv}\phi\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u,-f_v,1),(0,0,f_{vv}(u,v))\rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}
\end{aligned}
$$

Esempio. The graph of a paraboloid, $f(x,y) = x^2+y^2$. Let the Gauss map be $\mathbf{n}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(-2x,-2y,1)$. The second fundamental form is

$$\mathrm{II}_{(x,y)}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

with

$$L = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

Esempio. The graph of a hyperboloid, $f(x,y) = x^2-y^2$. Let the Gauss map be $\mathbf{n}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(-2x,2y,1)$. The second fundamental form is

$$\mathrm{II}_{(x,y)}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

with

$$L = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

9.4 Curvatura principale

- Siano (U,ϕ) una carta locale di S, $(u,v) \in U$, $p = \phi(u,v) \in S$.
- Una base per T_pS è $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$.
- Il differenziale $d\phi_{(u,v)}$ è l'isomorfismo lineare tra $\mathbb{R}^2$ e T_pS che manda la base standard $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ di $\mathbb{R}^2$ alla base $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$ di T_pS.
- L'applicazione lineare $-d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$ corrisponde ad una applicazione lineare (=matrice) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{tikzcd}
T_pS \arrow[r, "-d\mathbf{n}_p"] & T_pS \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\cong"', "d\phi"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\cong"', "d\phi"]
\end{tikzcd}
$$

L'applicazione A deve soddisfare $d\phi \circ A = -d\mathbf{n}_p \circ d\phi$.

$$
\begin{aligned}
d\phi A &= d\mathbf{n} d\phi \\
\Longrightarrow d\phi^T d\phi A &= d\phi^T d\mathbf{n} d\phi \quad \text{moltiplicando per } d\phi^T \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Poichè la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è invertibile, vediamo che

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad \text{ossia, per la formula dell'inversa di una matrice 2x2,} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Abbiamo mostrato che $-d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$ è simmetrica rispetto al prodotto scalare. Le mappe lineari simmetriche sono speciali: il teorema spettrale di algebra lineare dice che se V è uno spazio vettoriale di dimensione k munito di un prodotto interno $\langle , \rangle$, e $M : V \to V$ è un'applicazione lineare che è anche *simmetrica* rispetto al prodotto interno (cioè $\langle \mathbf{v}, M\mathbf{w} \rangle = \langle M\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$), allora esiste *una base ortornormale* di V consistente di *autovettori* di M.

- Quindi, esiste una base ortonormale di T_pS consistente di autovettori di $-d\mathbf{n}_p$. Indichiamo gli autovettori di $-d\mathbf{n}_p$ con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Indichiamo gli autovalori con λ_1, λ_2.

- Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$ i vettori determinati da $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$. Allora $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ sono autovettori di A, aventi gli stessi autovalori λ_1, λ_2.

Quindi,

- gli autovalori di $-d\mathbf{n}_p$ sono esattamente gli autovalori di A

- si calcolano gli autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $-d\mathbf{n}_p$ calcolando gli autovettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ di A e ponendo $\mathbf{v}_i = d\phi\mathbf{w}_i$

Definizione. *Gli autovalori $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ sono detti le* curvature principali *di S in p. Gli autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono detti le direzioni principali di S in p.*

Gli autovalori sono detti le curvature principali per via della seguente interpretazione degli autovalori. Per il teorema spettrale esiste una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di T_pS dove $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di $-d\mathbf{n}_p$. Qualsiasi vettore unitario $\mathbf{v} \in T_pS$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ può essere espresso come

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, \quad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Abbiamo già visto che la seconda forma fondamentale $\mathrm{II}_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v} \rangle$ per un vettore unitario $\mathbf{v}$ è uguale alla curvatura della sezione normale di S in p nella direzione $\mathbf{v}$. Dato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di $-d\mathbf{n}_p$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v} \rangle &= \langle a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, (-d\mathbf{n}_p)(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) \rangle \\ &= \langle a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2) \rangle \\ &= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 \end{aligned}$$

Senza perdità di generalità supponiamo che $\lambda_1 \leq \lambda_2$, percui

$$\begin{aligned} \lambda_1 \leq \quad & \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 \quad \leq \lambda_2 \\ \implies \langle \mathbf{v}_1, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_1 \rangle \leq \quad & \langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v} \rangle \quad \leq \langle \mathbf{v}_2, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_2 \rangle \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_pS$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, ossia

$$\lambda_1 = \min_{\|v\|=1} \langle v, -dn_p v \rangle = \text{minima curvatura normale in } p$$

$$\lambda_2 = \min_{\|v\|=1} \langle v, -dn_p v \rangle = \text{massima curvatura normale in } p$$

NOTA BENE: La matrice A che abbiamo definita sopra rappresenta l'applicazione lineare $-d\mathbf{n}_p$ rispetto alla base $\{\phi_u, \phi_v\}$ di T_pS. Nel libro di testo la matrice A rappresenta l'applicazione $d\mathbf{n}_p$. Quindi la nostra matrice A corrisponde a $-A$ nel libro di testo.

9.5 Curvatura Gaussiana e curvatura media

Definizione. *$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientata, $N : S \to S^2$ mappa di Gauss.*

1. *La* curvatura Gaussiana *di S è la funzione $K : S \to \mathbb{R}$ data da*

$$K(\mathbf{p}) := \lambda_1(p)\lambda_2(p) = \det A \quad \forall\ \mathbf{p} \in S.$$

2. *La* curvatura media *è la funzione $H : S \to \mathbb{R}$ data da*

$$H(\mathbf{p}) = \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2} = \frac{\operatorname{tr} A}{2} \quad \forall\ \mathbf{p} \in S.$$

NOTA BENE: Nel libro di testo la curvatura gaussiana è definita come $\det A$ e la curvatura media come $H = \frac{-\operatorname{tr} A}{2}$. Si ricorda che la A del libro di testo corrisponde a $-A$ nella nostra convenzione. Dato che $\det A = \det(-A)$ per una matrice 2×2, e $\operatorname{tr}(-A) = -\operatorname{tr} A$, le nostre definizioni di curvatura gaussiana e curvatura media sono infatti uguali a quelle del libro.

9.6 Rapporto tra aree infinitesimali

Sia $R \subset S$ una piccola regione rettangolare in S contenente il punto p. Il valore assoluto della curvatura gaussiana di S in p può essere interpretata come un rapporto tra aree infinitesimali:

$$|K(p)| = \lim_{\text{Area}(R) \to 0} \frac{\text{Area}(\mathbf{n}(R))}{\text{Area}(R)}$$

Questo è perchè nel limite infinitesimale tutto si approssima linearmente, quindi il limite del rapporto è uguale al rapporto tra l'area di un rettangolo nel piano tangente T_pS, e l'area dell'immagine del rettangolo tramite l'applicazione lineare $d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_{\mathbf{n}(p)}S^2$. Se consideriamo un piccolo rettangolo in T_pS i cui lati sono paralleli agli autovettori di $d\mathbf{n}_p$ (ricordiamoci che gli autovettori sono ortogonali), l'area del rettangolo è il prodotto delle lunghezze dei lati. Indichiamo le due lunghezze dei lati con δ_1 e δ_2, percui l'area è $\delta_1\delta_2$. L'immagine di questo rettangolo tramite $d\mathbf{n}_p$ rimarrà un rettangolo avente lati paralleli agli autovettori, ma le lunghezze dei lati saranno $\delta_1|\lambda_1|$ e $\delta_2|\lambda_2|$ dove λ_i sono gli autovalori. Quindi l'area dell'immagine del rettangolo tramite $d\mathbf{n}_p$ è $|\lambda_1||\lambda_2|\delta_1\delta_2 = |K|\delta_1\delta_2$. Il rapporto tra le due aree è quindi $|K|\delta_1\delta_2/\delta_1\delta_2 = |K|$.

10 *Teorema Egregium* di Gauss

La curvatura gaussiana K è stata definita come il prodotto delle curvature principali. Le curvature principali dipendono dalla seconda forma fondamentale e dalla prima forma fondamentale. Un teorema sorprendente è il *Teorema Egregium* di Gauss che dimostra che la curvatura gaussiana *non* dipende dalla seconda forma fondamentale – dipende solo dalla prima forma fondamentale.

Teorema 10.0.1 (Theorema Egregium di Gauss)**.** *La curvatura gaussiana di una superficie regolare dipende* soltanto dalla prima forma fondamentale. *In particolare,*

- *se $F : S_1 \to S_2$ è una isometria locale, allora la curvatura gaussiana in $p \in S_1$ è uguale alla curvatura gaussiana in $F(p) \in S_2$;*
- *se due superfici hanno diverse curvature gaussiane, non possono essere localmente isometriche.*

Esempio. Una fetta di pizza è piana, e il piano ha curvatura gaussiana 0. Quando pieghiamo una fetta di pizza, diventa rigida nella direzione ortogonale alla piegatura (quindi più facile da mangiare). Quando pieghiamo una fetta di pizza stiamo applicando un'isometria. che cambia la curvatura in una direzione (da zero), perciø la direzione ortogonale alla piegatura è l'altra direzione principale ed è costretta ad avere curvatura zero per non cambiare la curvatura gaussiana 0. Quindi la sezione normale ortogonale alla direzione della piegatura deve essere una retta (l'unica curva avente curvatura 0 è una retta).

Esempio. Una mappa del mondo è una proiezione della superficie della Terra nel piano. La curvatura Gaussiana di una sfera è strettamente positiva, mentre la curvatura gaussiana del piano è 0. Per il teorema egregium nessuna applicazione dalla sfera al piano o vice-versa può essere un'isometria locale. Quindi ogni mappa piana del mondo distorce lunghezze ed aree. Ad esempio la proiezione di Mercator distorce le aree lontane dall'equatore, e fa sembrare che l'isola di Greenland sia più grande del continente di Australia.

Dimostrazione. Sia $\phi : U \to S$ una carta locale di S, e sia $\mathbf{n} : S \to S^2$ una mappa di Gauss. Allora, ad ogni $p = \varphi(u,v) \in S$, si ha che $\varphi_u, \varphi_v, \mathbf{n}_p$ sono tre vettori linearmente indipendenti, quindi formano una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo i vettori $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv} \in \mathbb{R}^3$. Possiamo esprimerli come combinazioni lineari dei vettori della base:

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + \alpha\mathbf{n} \\ \varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + \beta\mathbf{n} \\ \varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + \gamma\mathbf{n}. \end{aligned}$$

I coefficienti Γ^k_{ij} sono detti i *simboli di Christoffel* della parametrizzazione (U, φ).
Adesso cerchiamo espressioni per tutti i coefficienti, in termini delle funzioni E, F, G della prima forma fondamentale e L, M, N della seconda forma fondamentale. Poichè $\mathbf{n} \perp T_pS$, vediamo che

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle \varphi_{uu}, \mathbf{n}\rangle}_{=L} &= \langle \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = L_1 \implies L = \alpha \\ \underbrace{\langle \varphi_{uv}, \mathbf{n}\rangle}_{=M} &= \langle \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + L_2\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = L_2 \implies M = \beta \\ \underbrace{\langle \varphi_{vv}, \mathbf{n}\rangle}_{=N} &= \langle \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_3\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = L_3 \implies N = \gamma \end{aligned}$$

Per trovare espressioni per i simboli di Christoffel, consideriamo il prodotto scalare delle stesse equazioni con φ_u e φ_v. Vediamo cosa succede per l'equazione di φ_{uu}:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle = \langle \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1\mathbf{n}\rangle = \Gamma^1_{11}\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle + \Gamma^2_{11}\langle \varphi_v, \varphi_u\rangle = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v\rangle = \langle \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1\mathbf{n}\rangle = \Gamma^1_{11}\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle + \Gamma^2_{11}\langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G \end{aligned}$$

Analogamente, per φ_{uv} abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u\rangle = \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v\rangle = \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G \end{aligned}$$

e per φ_{vv} risulta che

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{vv}, \varphi_u\rangle = \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F \\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v\rangle = \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G. \end{aligned}$$

I prodotti $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle, \langle \varphi_{uu}, \varphi_v\rangle$ ecc. si esprimono in termini delle *derivate* di E, F, G:

$$\begin{aligned} E_u = \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_u, \phi_u\rangle = 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle &\implies \langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle = \frac{1}{2}E_u, \\ E_v = \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_u\rangle &\implies \langle \varphi_{uv}, \varphi_u\rangle = \frac{1}{2}E_v, \\ G_u = \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_v\rangle &\implies \langle \varphi_{uv}, \varphi_v\rangle = \frac{1}{2}G_u \\ G_v = \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = 2\langle \varphi_{vv}, \varphi_v\rangle &\implies \langle \varphi_{vv}, \varphi_v\rangle = \frac{1}{2}G_v \\ F_u = \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v\rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv}\rangle &\implies \langle \varphi_{uu}, \varphi_v\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \\ F_v = \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle = \langle \varphi_{vu}, \varphi_v\rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv}\rangle &\implies \langle \varphi_u, \varphi_{vv}\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u. \end{aligned}$$

Quindi le 6 equazioni che coinvolgono i simboli di Christoffel sono

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_u = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_v &= \Gamma^1_{12}E+\Gamma^2_{12}F\\ \frac{1}{2}G_u &= \Gamma^1_{12}F+\Gamma^2_{12}G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_v-\frac{1}{2}G_u &= \Gamma^1_{22}E+\Gamma^2_{22}F\\ \frac{1}{2}G_v &= \Gamma^1_{22}F+\Gamma^2_{22}G.\end{aligned}$$

Ogni paio di equazioni è un sistema di equazioni lineari:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_u \\ 2F_u-E_v\end{bmatrix}=\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11}\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_v \\ G_u\end{bmatrix}=\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12}\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2F_v-G_u \\ G_v\end{bmatrix}=\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22}\end{bmatrix}$$

Poichè la matrice $\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}$ è positiva definita, è invertibile, quindi moltiplicando le equazioni per $\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}$ troviamo che *i simboli di Christoffel sono funzioni di E, F, G e le loro derivate.* Cioè dato che l'inversa di $\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}$ è la matrice $\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11}\end{bmatrix} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_u \\ 2F_u-E_v\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12}\end{bmatrix} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_v \\ G_u\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22}\end{bmatrix} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2F_v-G_u \\ G_v\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Adesso, consideriamo l'identità $\varphi_{uuv}=\varphi_{uvu}$ (che segue dall'uguaglianza delle derivate parziali miste). Tornando alle equazioni iniziali, vediamo che

$$\begin{aligned}\varphi_{uuv} &= (\Gamma^1_{11})_v\varphi_u+\Gamma^1_{11}\varphi_{uv}+(\Gamma^2_{11})_v\varphi_v+\Gamma^2_{11}\varphi_{vv}+L_v\mathbf{n}+L\mathbf{n}_v\\ \varphi_{uvu} &= (\Gamma^1_{12})_u\varphi_u+\Gamma^1_{12}\varphi_{uu}+(\Gamma^2_{12})_u\varphi_v+\Gamma^2_{12}\varphi_{vu}+M_u\mathbf{n}+M\mathbf{n}_u\end{aligned}$$

Ricordiamo che la matrice $A=\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M\\ M & N\end{pmatrix}$ rappresenta la mappa lineare $-d\mathbf{n}_p : T_pS\to T_pS$ rispetto alla base $\{\varphi_u,\varphi_v\}$. Cioè se poniamo $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, la prima colonna rappresenta l'identità $-\mathbf{n}_u=a_{11}\varphi_u+a_{21}\varphi_v$, e la seconda colonna $-\mathbf{n}_v=a_{12}\varphi_u+a_{22}\varphi_v$.

Poichè i coefficienti di φ_v devono essere pari, si ha:

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21}+(\Gamma^2_{11})_v+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{21}-La_{22}=\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11}+(\Gamma^2_{21})_u+\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{21}-Ma_{21}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}Ma_{21}-La_{22} &= \text{(funzione dei simboli di Christoffel e le loro derivate)}\\ &= \text{(funzione di } E,F,G \text{ e le loro prime e seconde derivate)}\end{aligned}$$

Ora sostituendo $a_{21}=\frac{-FL+EM}{EG-F^2}$ e $a_{22}=\frac{-FM+EN}{EG-F^2}$ (dalla formula per A), abbiamo

$$Ma_{21}-La_{22}=M\frac{-FL+EM}{EG-F^2}-L\frac{-FM+EN}{EG-F^2}=\frac{EM^2-ELN}{EG-F^2}=-E\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-EK,$$

perciò

$$-EK = (\text{funzione di } E, F, G \text{ e le loro derivate e seconde derivate}),$$

e siccome $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \neq 0$, possiamo dividere per $-E$ percui

$$\begin{aligned} K &= (\text{funzione di } E, F, G \text{ e le loro derivate e seconde derivate})/E \\ &= (\text{funzione di } E, F, G \text{ e le loro derivate e seconde derivate}). \end{aligned}$$

□

11 Geodetiche

In uno spazio euclideo, dati due punti P e Q nello spazio, la retta collegando P e Q è la curva che ha la lunghezza minima di tutte le curve che collegano P e Q.

In una superficie, invece, le curve che minimizzano distanza si chiamano *geodetiche* della superficie.

Definizione. *Una* geodetica *di S è una curva $\alpha : I \to S$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che*

$$\ddot{\alpha}(s) \perp T_{\alpha(s)}S \quad \forall s \in I.$$

Condizioni equivalenti: Una curva α parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è una geodetica $\iff$ il versore normale $N(s)$ alla curva α in s è un multiplo del normale $\mathbf{n}(\alpha(s))$ al piano tangente in $\alpha(s)$ $\iff$ $|\kappa_n(\dot{\alpha}(s))| = \kappa(s) \iff \kappa_g(s) = 0$.

Abbiamo solo citato (non mostrato!) il fatto che una curva geodetica (definita come nella definizione data sopra) minimizza localmente la distanza tra due punti, giustificando la definizione.

Proposizione 11.0.2. *Rispetto ad una carta locale (U, ϕ) di S, una curva $\alpha(s) = \phi(u(s), v(s))$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è una geodetica se e solo se $u(s)$ e $v(s)$ soddisfano il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2\ \Gamma^1_{11} + 2u'v'\ \Gamma^1_{12} + (v')^2\ \Gamma^1_{22} &= 0 \\ v'' + (u')^2\ \Gamma^2_{11} + 2u'v'\ \Gamma^2_{12} + (v')^2\ \Gamma^2_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ove le funzioni Γ^k_{ij} sono i simboli di Christoffel (funzioni dei parametri u e v).

Dimostrazione. Ponendo $\alpha(s) = \phi(u(s), v(s))$ abbiamo

$$\dot{\alpha}(s) = D\phi \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = u'\phi_u + v'\phi_v$$

Quindi facendo la derivata ancora si ha

$$\ddot{\alpha}(s) = u''\phi_u + u'(\phi_{uu}u' + \phi_{uv}v') + v''\phi_v + v'(\phi_{vu}u' + \phi_{vv}v')$$

Per definizione i simboli di Christoffel vengono dalle seconde derivate di ϕ espresse come combinazioni lineari di $\{\phi_u, \phi_v, \mathbf{n}(\phi(u, v))\}$,

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\phi_u + \Gamma^2_{11}\phi_v + L\mathbf{n}(\phi(u, v)) \\ \phi_{vu} = \phi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\phi_u + \Gamma^2_{12}\phi_v + M\mathbf{n}(\phi(u, v)) \\ \phi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\phi_u + \Gamma^2_{22}\phi_v + N\mathbf{n}(\phi(u, v)) \end{aligned}$$

Quindi rispetto alla base $\{\phi_u, \phi_v, \mathbf{n}(\phi(u, v)\}$ di $T_{\phi(u,v)}S$, abbiamo

$$\ddot{\alpha}(s) = \left[u'' + (u')^2\ \Gamma^1_{11} + 2u'v'\ \Gamma^1_{12} + (v')^2\ \Gamma^1_{22}\right]\phi_u + \left[v'' + (u')^2\ \Gamma^2_{11} + 2u'v'\ \Gamma^2_{12} + (v')^2\ \Gamma^2_{22}\right]\phi_v + [\text{qualcosa}]\,\mathbf{n}(\phi(u, v))$$

La curva α è una geodetica $\iff$ $\ddot{\alpha}(s)$ è ortogonale al piano tangente $T_{\phi(u,v)}S$ $\iff$ i coefficienti di ϕ_u e ϕ_v sono nulli $\iff$ le due equazioni differenziali (5) sono soddisfatte. □

Conseguenze della Proposizione 11.0.2:

1. La teoria delle equazioni differenziali ordinarie $\implies$: dati un punto $p \in S$ e un vettore $\mathbf{v} \in T_pS$, esiste, ed è unica, una geodetica $\alpha(s)$ passante per p avente versore tangente $\mathbf{v}$.

2. L'immagine di una geodetica tramite un'isometria locale è una geodetica. Questo perchè le isometrie locali non cambiano la prima forma fondamentale, e le equazioni differenziali (5) dipendono solo dai simboli di Christoffel, che dipendono solo dalla prima forma fondamentale, quindi non cambiano con le isometrie locali.

12 Teorema di Gauss-Bonnet

Sia S una superficie regolare.

Definizione. *Una parametrizzazione locale* (U, ϕ) *di* S *si dice* una parametrizzazione ortogonale *se* $\forall (u, v) \in U$, *si ha* $\phi_u \perp \phi_v$ *in* $T_{\phi(u,v)}S$.

Teorema 12.0.3 (Gauss-Bonnet, versione locale)**.** *Sia* $R \subset S$ *una regione triangolare con bordo fatto di tre geodetiche*

$$\begin{aligned} \alpha_1 : [s_1, s_2] &\to S, \\ \alpha_2 : [s_2, s_3] &\to S, \\ \alpha_3 : [s_3, s_4] &\to S. \end{aligned}$$

Siano $\theta_1, \theta_2, \theta_2$ *gli angoli esterni del triangolo. Allora*

$$\iint_R K \; dA = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

Se θ_i *è l'angolo esterno del triangolo ad un vertice, allora l'angolo interno a quel vertice è* $\phi_i = \pi - \theta_i$, *percui si ha* $\iint_R K \; dA = 2\pi - ((\pi - \phi_1) + (\pi - \phi_2) + (\pi - \phi_3)) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \pi$.

Sia S una superficie orientata e compatta.

Definizione. *Una* triangolazione *di* S *è una suddivisione di* S *in regioni triangolari (il bordo di ogni regione triangolare comprende 3 archi che si intersecano in tre vertici).*

Associati ad una triangolazione di S sono i tre interi $n_0 =$ numero di vertici della triangolazione, $n_1 =$ numero di archi della triangolazione, e $n_2 =$ numero di triangoli della triangolazione.

Definizione. $\chi(S) := n_0 - n_1 + n_2$ *si chiama la caratteristica di euler di* S.

Il numero $\chi(S)$ non dipende dalla triangolazione (una superficie può avere un numero infinito di possibili triangolazioni!). Cioè la quantità $n_0 - n_1 + n_2$ è uguale per tutte le triangolazione di S.

Teorema 12.0.4 (Gauss-Bonnet, versione globale)**.** *Sia* S *una superficie regolare, compatta e orientata. Allora*

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

Dimostrazione. L'idea è di scegliere una triangolazione di S tale che ogni regione triangolare soddisfi le condizioni del Teorema di Gauss-Bonnet – versione locale. Allora per ogni triangolo si ha l'uguaglianza

$$\iint_R K \; dA = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) - \pi,$$

e i triangoli ricoprono S, perciò otteniamo

$$\iint_S K \; dA = \text{la somma di tutti gli angoli interni di tutti i triangoli} - n_2\pi.$$

Poichè la somma degli angoli ad ogni vertice è 2π, si ha quindi che

$$\begin{aligned} \text{la somma di tutti gli angoli interni di tutti i triangoli} &= \text{la somma degli angoli ad ogni vertice} \\ &= n_0 2\pi, \end{aligned}$$

e quindi $\iint_S K \; dA = n_0 2\pi - n_2\pi$. Dato che ogni arco della triangolazione appartiene ad esattamente due triangoli della triangolazione, si ha $3n_2 = 2n_1$ perciò

$$\iint_S K \; dA = n_0 2\pi - n_2\pi = n_0 2\pi(-3n_2\pi + 3n_2\pi) - n_2\pi = n_0 2\pi - 2n_1\pi + 2n_2\pi = 2\pi\chi(S).$$

□

13 Esercizi

Esercizio 1. *Sia $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare piana semplice e chiusa con velocità unitaria. Siano $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa$ i dati di Frenet di γ. Sia $R > 0$ un numero reale fissato tale che $R < \frac{1}{\kappa(s)}$ per ogni $s \in [0,T]$. Sia $f : [0,T] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da*

$$f(s,\theta) = \gamma(s) + R(\cos\theta \mathbf{N}(s) + \sin\theta \mathbf{B}(s))$$

e sia S la superficie parametrizzata da f.

1. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n}$ per S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana K di S.*
5. *Calcolare le curvature principali di S.*
6. *Sia $S_+ \subset S$ il sottoinsieme di S dove la curvatura gaussiana $K > 0$. Calcolare $\iint_{S_+} K dS$.*

Esercizio 2. *Poniamo*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 < z < 1\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2, z > 0\},$$

e $h : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ un'applicazione differenziabile strettamente crescente. Sia $\Phi : S \to C$ l'applicazione definita da

$$\Phi(x,y,z) = h(z)\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, 1\right)$$

1. *Far vedere che Φ è un'applicazione differenziabile.*
2. *È possibile determinare la funzione h in modo che l'applicazione Φ trasformi i meridiani di S in curve di lunghezza finita su C?*
3. *È possibile determinare la funzione h in modo che Φ sia una isometria locale?*

Esercizio 3. *Sia $g : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione di classe C^∞. Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ una regione compatta. Dimostrare che l'area del grafico di g sopra la regione R è data da*

$$\iint_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

Esercizio 4. *Sia $S = \{(x,y,xy) | x,y \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Dimostrare che S è una superficie regolare.*
2. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana di S.*
5. *Trovare le curve su S che hanno la curvatura normale nulla in ciascun punto.*

Esercizio 5. *Sia α una curva regolare nel piano xz. Sia S la superficie di revoluzione generata ruotando α intorno all'asse z. Supponiamo che $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. (Quindi $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$). La matrice che rappresenta rotazione attorno all'asse z per l'angolo θ è*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

percui S ha una parametrizzazione

$$\varphi(s,\theta) = R_\theta\alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)x(s) \\ \sin(\theta)x(s) \\ z(s) \end{bmatrix}$$

Fissato θ, la curva $\{R_\theta\alpha(s)|s \in [a,b]\}$ che è l'immagine di α tramite la rotazione R_θ si dice un meridiano *di S. Fissato $s \in [a,b]$, la circonferenza $\{R_\theta\alpha(s)|\theta \in [0,2\pi]\}$ si dice* un parallelo *di S.*

1. *Trovare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n} : S \to S^2$.*
3. *Trovare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Mostrare che una direzione principale è tangente al parallelo passante per p, e l'altra direzione principale in p è tangente al meridiano passante per p.*
5. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = \varphi(s,\theta)$ è $K = \frac{\ddot{x}(s)}{x(s)}$.*

Esercizio 6. *Sia S il grafico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$. Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = (x,y,f(x,y))$ è*

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

dove $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ecc.

Il numeratore è il determinante della matrice hessiana *di f, che è la matrice $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.*

Esercizio 7. *Siano $S_1 = \{(u\cos v, u\sin v, \ln u)|u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(u\cos v, u\sin v, v)|u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ due superfici parametrizzate.*

1. *Mostrare che la mappa $\Phi : S_1 \to S_2$ data da $\Phi(u\cos v, u\sin v, \ln u) = (u\cos v, u\sin v, v)$ è localmente un diffeomorfismo.*
2. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S_2 in $\varphi_2(u,v)$ è uguale alla curvatura Gaussiana di S_1 in $\varphi_1(u,v)$.*
3. *Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0,2\pi] \to S_1$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.*
4. *Calcolare la lunghezza della curva $\Phi \circ \gamma : [0,2\pi] \to S_2$ data da $\Phi \circ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.*
5. *Dimostrare che Φ non è un'isometria. (Suggerimento: Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0,2\pi] \to S_1$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, poi calcolare la lunghezza della curva $\Phi \circ \gamma : [0,2\pi] \to S_2$ data da $\Phi \circ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Se non sono pari, Φ non può essere un'isometria!) Quindi, la conversa del teorema egregium non vale.*

Esercizio 8. *Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia C_t il cerchio di centro $\gamma(u)$ e raggio 1 sul piano per $\gamma(u)$ parallelo al piano (y,z). Poniamo

$$S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} C_t$$

1. *Trovare una parametrizzazione di S e discuterne la regolarità.*
2. *Trovare un polinomio $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $S = F^{-1}(0)$.*
3. *È vero o falso che S è una superficie liscia?*
4. *Calcolare la curvatura normale di C_0 considerata come curva su S.*

Esercizio 9. *Sia $U = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Si consideri la parametrizzazione $f : U \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u).$$

1. *Trovare una isometria di S con una regione del piano euclideo.*
2. *Calcolare curvature e direzioni principali di f.*

Esercizio 10. *Sia S una superficie regolare, e $\varphi(u, v)$ una parametrizzazione locale. Si supponga che $F = 0$. Si trovino le formule per i simboli di Christoffel (come funzioni di E, G e le loro derivate), e si dimostri che*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\partial_v \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \partial_u \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

A Derivate, differenziali

- Sia $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ una funzione di classe C^∞. Tale funzione significa una collezione $F_1, \dots, F_l$ di funzioni di classe C^∞ $F_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Cioè $F(x_1, \dots, x_k) = (F_1(x_1, \dots, x_k), \dots, F_l(x_1, \dots, x_k))$.
- Il differenziale (o matrice jacobiana) di F al punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ è la matrice

$$dF_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \dots & & & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

  Cioè le colonne di $dF_{\mathbf{x}}$ sono le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}$.
- Date funzioni $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ e $G : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, la loro composizione è $G \circ F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Segue per la regola di catena che $d(G \circ F)_{(x,y)} = dG_{F(x,y)}\ dF_{(x,y)}$.

Esempio. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y) = (xy, x^2, y^2)$, e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $G(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, 2yz)$, allora $G \circ F(x, y) = ((xy)^2 + (x^2)^2 - y^2, 2x^2y^2) = (x^2y^2 + x^4 - y^2, 2x^2y^2)$

$$\begin{aligned}
dF_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\
dG_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix} \\
d(G \circ F)_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4x^3 & 2x^2y - 2y \\ 4xy^2 & 4x^2y \end{pmatrix} \\
dG_{F(x,y)} dF_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} 2xy & 2x^2 & -1 \\ 0 & 2y^2 & 2x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4x^3 & 2x^2y - 2y \\ 4xy^2 & 4x^2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

B Autovalori, determinante, traccia

- Sia $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice. Gli *autovalori* della matrice sono gli zeri del *polinomio caratteristico*, cioè le soluzioni di

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

- Dato che $\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$, per la formula per le radici di un'equazione quadratica, abbiamo

$$\lambda_\pm = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

- Ponendo $\operatorname{tr} A = a + d, \det A = ad - bc$, possiamo anche scrivere

$$\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

- Quindi, la somma degli autovalori è

$$\lambda_+ + \lambda_- = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} + \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} = \operatorname{tr} A$$

e il prodotto degli autovalori è

$$\lambda_+ \lambda_- = \left(\frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} \right) \left(\frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} \right) = \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - ((\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A)}{4} = \det A.$$