Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di Algebra

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di Algebra

Soluzioni Foglio 4
27 novembre 2008

13. Si consideri l'anello quoziente $F = K[x]/(f)$ per $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $f = x^2 + 1 \in K[x]$.

    (a) $F \cong K^2$ con base $\overline{1}, \overline{x}$, quindi

    $$F = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{x},\ \overline{2},\ \overline{2}\overline{x},\ \overline{1}+\overline{x},\ \overline{1}+\overline{2}\overline{x},\ \overline{2}+\overline{x},\ \overline{2}+\overline{2}\overline{x}\}$$

    (b) $(\overline{1}+\overline{x})\cdot(\overline{2}+\overline{x}) = \overline{1}$ e $(\overline{1}+\overline{x})^2 = \overline{2}\overline{x}$.

    (c) Per determinare l'elemento inverso di $(\overline{1}+\overline{2}\overline{x})$ dobbiamo trovare $g \in K[x]$ tale che

    $$1 - (1+2x)g \in (f)$$

    ovvero $g, h \in K[x]$ tali che

    $$1 = (1+2x)g + f\,h.$$

    A tal fine possiamo applicare l'Algoritmo Euclideo. Vedremo che

    $$1 = (1+2x)(2x+2) - f,$$

    quindi $\overline{2}+\overline{2}\overline{x}$ è l'elemento inverso di $(\overline{1}+\overline{2}\overline{x})$.

14. (a) $2x^5 + 9x^4 + 6x^2 + 3$ è irriducibile per il Criterio di Eisenstein con $p = 3$.

 (b) $x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x + 21$ è irriducibile per riduzione modulo 2, poiché il polinomio $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ non ha né zeri, né divisori di grado 2 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ (basta controllare che $x^2 + x + 1$ non divide f).

 (c) $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ dove n è un numero pari con $n \geq 4$ è riducibile perché ha lo zero -1.

 (d) $f = x^3 + 2x - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ perché non ha zeri, in quanto uno zero α di f appartenente a $\mathbb{Z}$ dovrebbe essere un divisore di -1 (poiché $x - \alpha$ dovrebbe dividere f in $\mathbb{Z}[x]$), ma né 1 né -1 sono zeri di f. Per 8.6 segue che f è anche irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

 (e) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 7$ è irriducibile perché sostituendo x con $x - 1$ otteniamo il polinomio $x^4 + 4x + 2$ che è irriducibile per il Criterio di Eisenstein.

 (f) $x^5 + 8x + 16$ è irriducibile perché la riduzione modulo 3 ci da $f = x^5 + 2x + 1$ che è irriducibile in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ poiché non ha zeri in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, né divisori di grado 2: infatti passando in rassegna i polinomi monici di grado 2 in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$, ed escludendo quelli che hanno zeri, vediamo che rimangono da controllare x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2, ed eseguendo divisione col resto vediamo che nessuno di loro divide f.

15. Sia $a = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$, e sia $f = x^4 - 2x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x]$.

 (a) Si verifica $f(a) = 0$.

 (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(a)$ è un'estensione propria di campi. Infatti

$$-1 = (a - \sqrt{2})^2 = a^2 - 2\sqrt{2}a + 2$$

 mostra che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(a)$, e d'altra parte $a \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ perché altrimenti $i \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

 (c) Per il Lemma del Grado segue da (b) che $[\,\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}\,] \geq 4$, quindi il polinomio minimo h di a su $\mathbb{Q}$ ha grado ≥ 4. Ma poiché h divide f per (a), concludiamo $h = f$ (e anche $[\,\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}\,] = 4$).

 (d) Per quanto abbiamo visto in (c) vale $[\,\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\,] = 2$. Quindi il polinomio minimo g di a su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ deve avere grado 2. Calcolando a^2 vediamo come sopra che $g = x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$.

16. Dati $n \geq 2$ numeri primi distinti $p_1, \ldots, p_n$, sappiamo per 8.10(3) che il polinomio $f = x^n - p_1 \ldots p_n$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}$, quindi non possiede zeri in $\mathbb{Q}$ e pertanto $\sqrt[n]{p_1, \ldots, p_n}$ è irrazionale.