

Formule Utili – Analisi Matematica per Informatici

a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

24 dicembre 2006

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

Indice

1	Geometria Analitica	1
1.1	Il piano cartesiano	1
1.2	La retta	1
1.3	La circonferenza	2
1.4	La parabola	2
1.5	L'ellisse	3
1.6	L'iperbole	4
1.7	L'iperbole equilatera	5
2	Goniometria	6
2.1	Relazioni fondamentali	6
2.2	Periodicità	6
2.3	Formule di conversione	6
2.4	Archi associati	7
2.5	Formule di addizione e sottrazione	7
2.6	Formule di duplicazione e triplicazione	8
2.7	Formule di bisezione	8
2.8	Formule parametriche	8
2.9	Formule di prostaferesi e di Werner	8
2.10	Archi noti	9

1 Geometria Analitica

1.1 Il piano cartesiano

Punto medio di un segmento	$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	$(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ coordinate estremi
Distanza tra due punti	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ coordinate punti

1.2 La retta

Definizione: nessuna perché è un *ente primitivo*.

Forma implicita	$ax + by + c = 0$	tutte le rette
	$x = -\frac{c}{a} = k$	retta verticale ($b = 0$)
	$y = -\frac{c}{b} = h$	retta orizzontale ($a = 0$)
Forma esplicita	$y = mx + q$	non comprende rette verticali perché
	$m = -\frac{b}{a}, q = -\frac{c}{a}$	sono espressioni valide solo se $a \neq 0$
Date due rette	$ax + by + c = 0$	e $a'x + b'y + c = 0$ si ha:
	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	rette incidenti (una intersezione)
	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	rette parallele (nessuna intersezione)
	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	rette coincidenti (infinite intersezioni)
Date due rette	$m = m_1x + q_1$	e $y = m_2x + q_2$ si ha:
	$m_1 = m_2$	rette parallele
	$m_1m_2 = -1 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$	rette perpendicolari
Retta per un punto	$y - y_0 = m(x - x_0)$	$(x_0; y_0)$ coordinate del punto
Retta per due punti	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ coordinate dei punti
Distanza punto retta	$d = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	Nota: retta in forma implicita

1.3 La circonferenza

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali la distanza da un punto fisso detto *centro* è costante e congruente ad un segmento detto *raggio*.

Equazione noti centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Equazione canonica	$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ $C\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$ $r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$

1.4 La parabola

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.

La figura così ottenuta ha un *asse di simmetria*. Il punto di intersezione tra l'asse di simmetria e la figura stessa è detto *vertice*.

Asse parallelo all'asse delle ordinate	$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0 \Leftrightarrow \smile, a < 0 \Leftrightarrow \frown$
Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si ha	$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	Vertice
	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$	Fuoco
	$x = -\frac{b}{2a}$	Asse di simmetria
	$y = -\frac{1 + \Delta}{4a}$	Direttrice
Asse parallelo all'asse delle ascisse	$x = ay^2 + by + c$	$a > 0 \Leftrightarrow (, a < 0 \Leftrightarrow)$
	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$	Vertice
	$F\left(\frac{1 - \Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$	Fuoco
	$y = -\frac{b}{2a}$	Asse di simmetria
	$x = -\frac{1 + \Delta}{4a}$	Direttrice

1.5 L'ellisse

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.

La figura così ottenuta ha due *assi di simmetria* (o più semplicemente assi), il maggiore dei quali è detto asse maggiore (su di esso si trovano i fuochi) e l'altro asse minore. Il punto di intersezione degli assi è detto *centro*, i punti di intersezione tra gli assi e la figura stessa sono detti *vertici*.

Riferita a rette parallele agli assi	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	Centro $O'(x_0; y_0)$
	$mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$	$\begin{cases} mn > 0 \\ \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r > 0 \\ O' \left(-\frac{p}{2m}; -\frac{q}{2n} \right) \end{cases}$
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b \quad \Leftrightarrow$	Fuochi sull'asse x , a semiasse maggiore b semiasse minore
	$F(\pm\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0), V(0; \pm b)$	Coordinate dei vertici
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a < b \quad \Leftrightarrow$	Fuochi sull'asse y , a semiasse minore b semiasse maggiore
	$F(0; \pm\sqrt{b^2 - a^2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0), V(0; \pm b)$	Coordinate dei vertici

1.6 L'iperbole

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.

La figura così ottenuta ha due *assi di simmetria*. L'asse che interseca la figura stessa è detto *asse trasverso* (su di esso si trovano i fuochi) e l'altro *asse non trasverso*. Il punto di intersezione degli assi è detto *centro*, i punti di intersezione tra l'asse trasverso e la figura stessa sono detti *vertici*. Esistono due rette, detti *asintoti*, tali che la distanza tra ciascuna di esse e i punti dell'ellisse tende a zero al tendere all'infinito di x o y .

Riferita a rette parallele agli assi	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O'(x_0; y_0) \\ \text{Asse trasverso orizzontale} \end{array} \right.$
	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O'(x_0; y_0) \\ \text{Asse trasverso verticale} \end{array} \right.$
	$mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} mn < 0 \\ O' \left(-\frac{p}{2m}; -\frac{q}{2n} \right) \end{array} \right.$
	$\frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r > 0$	Asse trasverso orizzontale
	$\frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r < 0$	Asse trasverso verticale
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{array}{l} a \text{ semiasse trasverso} \\ b \text{ semiasse non trasverso} \end{array}$
	$F(\pm\sqrt{a^2+b^2}; 0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm \frac{b}{a}x$	Equazioni degli asintoti
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{array}{l} a \text{ semiasse non trasverso} \\ b \text{ semiasse trasverso} \end{array}$
	$F(0; \pm\sqrt{a^2+b^2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(0; \pm b)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm \frac{b}{a}x$	Equazioni degli asintoti

1.7 L'iperbole equilatera

Definizione: iperbole con semiassi congruenti, ossia $a = b$.

Riferita agli assi	$x^2 - y^2 = a^2$	Fuochi sull'asse x
	$F(\pm a\sqrt{2}; 0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm x$	Equazioni degli asintoti
Riferita agli assi	$x^2 - y^2 = -a^2$	Fuochi sull'asse y
	$F(0; \pm a\sqrt{2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(0; \pm a)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm x$	Equazioni degli asintoti
Riferita ai propri asintoti	$xy = k \quad k > 0, \quad \Leftrightarrow$	occupa il I e III quadrante
	$F_1(\sqrt{2k}; \sqrt{2k}), F_2(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$	Coordinate dei fuochi
	$V_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}), V_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$	Coordinate dei vertici
	$x = 0, \quad y = 0$	Equazioni degli asintoti
Riferita ai propri asintoti	$xy = k \quad k < 0, \quad \Leftrightarrow$	occupa il II e IV quadrante
	$F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k}), F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$	Coordinate dei fuochi
	$V_1(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}), V_2(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k})$	Coordinate dei vertici
	$x = 0, \quad y = 0$	Equazioni degli asintoti
Funzione omografica	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$	$c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$
	$\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$	Coordinate del centro
	$x = -\frac{d}{c}, \quad y = \frac{a}{c}$	Equazioni degli asintoti

2 Goniometria

Nota: in quanto segue, con il simbolo $\sin^2 x$ si intende $(\sin x)^2$. È chiaro che questa scrittura non è corretta perché $\sin^2 x = \sin(\sin x)$ ma, essendo entrata nell'uso corrente ed essendo più veloce da scrivere, la adottiamo anche qui.

2.1 Relazioni fondamentali

Descrizione	relazione matematica	restrizioni
Relazione fondamentale:	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Definizione di tangente:	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di cotangente:	$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di secante:	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di cosecante:	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2 Periodicità

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$	$\cot(x + k\pi) = \cot x$	$k \in \mathbb{Z}$
$\sec(x + 2k\pi) = \sec x$	$\csc(x + 2k\pi) = \csc x$	$k \in \mathbb{Z}$

2.3 Formule di conversione

	noto $\sin x$	noto $\cos x$	nota $\tan x$
$\sin x =$	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$
$\tan x =$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$

Una volta noti $\sin x$, $\cos x$ o $\tan x$, il passaggio alle altre funzioni trigonometriche è banale essendo $\cot x = 1/\tan x$, $\sec x = 1/\cos x$ e $\csc x = 1/\sin x$.

2.4 Archi associati

$f(x)$	$\sin f(x)$	$\cos f(x)$	$\tan f(x)$	$\cot f(x)$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$

Nota: questi archi associati sono deducibili immediatamente dal cerchio goniometrico, quindi è inutile memorizzarli.

2.5 Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}$$

2.6 Formule di duplicazione e triplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan(3x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

2.7 Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

2.8 Formule parametriche

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \neq \pi(1 + 2k) \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

2.9 Formule di prostaferesi e di Werner

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

2.10 Archi noti

$x[\text{rad}]$	$x[\text{deg}]$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	0	1	0	$\not\exists$
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	22°30'	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	67°30'	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5}{12}\pi$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	$\not\exists$	0

Nota: sono qui riportati solo gli archi del primo quadrante in quanto gli altri sono riconducibili a tale quadrante tramite gli archi associati (vedi §2.4).