Capitolo 2

Limiti e continuità

1 Breve premessa

Il concetto di limite è centrale in analisi matematica ed appare in modo naturale già nei problemi geometrici più elementari. Consideriamo ad esempio un cerchio di raggio unitario e supponiamo di volerne calcolare l'area, con un metodo simile a quello usato da Archimede nel III secolo a.C. Dato un numero naturale $n \geq 3$, inscriviamo allora nel cerchio un poligono regolare di n lati, ad esempio un triangolo equilatero per $n = 3$, un quadrato per $n = 4$ e così via. Agli n lati del poligono corrisponderanno n angoli al centro uguali tra di loro, la cui somma deve dare l'intero angolo giro, ossia 2π , in radianti. Quindi, ogni singolo angolo al centro che corrisponde ad un lato misura $\frac{2\pi}{n}$. Di conseguenza, ogni lato del poligono individua una coppia di triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa di lunghezza unitaria (il raggio del cerchio) ed i cateti di lunghezza $\sin(\frac{\pi}{n})$ e $\cos(\frac{\pi}{n})$ per le formule trigonometriche elementari. Ne segue che l'area s_n di ogni settore del poligono corrispondente ad un singolo lato misura

$$s_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

per cui l'area complessiva del poligono inscritto di n lati è

$$A_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

dove si è tenuto conto delle formule di duplicazione. Ora, all'aumentare del numero n dei lati del poligono, l'area dello stesso approssima per difetto l'area del cerchio, con un errore sempre più piccolo (risulta evidente che un procedimento analogo si può sviluppare con una successione di poligono circoscritti, nel qual caso l'area del poligono fornisce una stima per eccesso dell'area del cerchio, con un errore via via sempre più piccolo). Appare così in modo naturale la necessità di ottenere, se esiste, un valore limite per le grandezza A_n per valori di n arbitrariamente grandi. Nelle sezioni successive ci occuperemo di rendere precisa questa affermazione.

2 Funzioni continue

Diamo subito la definizione di funzione continua in un punto del suo dominio di definizione.

(2.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che f è continua in x , se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon.$$

Diciamo che f è continua, se f è continua in ogni $x \in E$.

In modo informale possiamo dire che una funzione f è continua in un punto x del suo insieme E di definizione se valori arbitrariamente vicini a $f(x)$ provengono da punti arbitrariamente vicini a x , dove la nozione di 'vicino' è resa precisa nel senso indicato sopra o, più in generale, come vedremo nelle sezioni successive, con la nozione di intorno.

Vediamo subito alcuni esempi di funzioni continue.

(2.2) Teorema Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto ad esempio $\delta = 1$, è evidente che si ha $|f(\xi) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$. ■

(2.3) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto $\delta = \varepsilon$, è evidente che si ha $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$. ■

(2.4) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo $\delta = \varepsilon$. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$ si ha

$$||\xi| - |x|| \leq |\xi - x| < \delta = \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^{-1}$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2} |x|, \frac{\varepsilon}{2} x^2 \right\}.$$

Se $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|\xi - x| < \delta$, risulta anzitutto

$$|x| - |\xi| \leq |x - \xi| < \delta \leq \frac{1}{2}|x|,$$

da cui $|\xi| > \frac{1}{2}|x|$. Ne segue

$$|\xi^{-1} - x^{-1}| = \frac{|x - \xi|}{|\xi||x|} < \frac{\delta}{\frac{1}{2}x^2} \leq \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

Come vediamo del seguente importante risultato, componendo funzioni continue si ottiene ancora una funzione continua, ossia le funzioni continue sono stabili per composizione.

(2.6) Teorema Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x \in f^{-1}(F)$. Supponiamo che f sia continua in x e che g sia continua in $f(x)$. Allora $g \circ f$ è continua in x .

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma > 0$ tale che

$$\forall \eta \in F : |\eta - f(x)| < \sigma \implies |g(\eta) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

Sia quindi $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \sigma.$$

Ne segue

$$\forall \xi \in f^{-1}(F) : |\xi - x| < \delta \implies |g(f(\xi)) - g(f(x))| < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

Introduzione ora alcune semplici operazioni algebriche tra funzioni.

(2.7) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Si definiscono le funzioni

$$f + g, f - g, fg : E \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f/g : \{x \in E : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

ponendo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Come vediamo del seguente risultato, le operazioni sopra definite (*somma, differenza, prodotto, quoziente*) risultano stabili rispetto alla continuità.

(2.8) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$. Supponiamo che f e g siano continue in x . Allora le funzioni $f + g$, $f - g$ e fg sono continue in x . Inoltre, se $g(x) \neq 0$, allora la funzione f/g è continua in x .*

Dimostrazione. Dimostriamo la continuità di $f + g$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta', \delta'' > 0$ con

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta' \implies |f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta'' \implies |g(\xi) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posto $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, per ogni $\xi \in E$ con $|\xi - x| < \delta$ risulta quindi

$$\begin{aligned} |(f(\xi) + g(\xi)) - (f(x) + g(x))| &= |(f(\xi) - f(x)) + (g(\xi) - g(x))| \leq \\ &\leq |f(\xi) - f(x)| + |g(\xi) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La continuità di $f - g$ può essere provata per esercizio, semplicemente imitando la dimostrazione precedente. Omettiamo la dimostrazione per fg . Proviamo ora l'ultima affermazione dell'enunciato. Se definiamo $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\psi(\xi) = \xi^{-1}$, risulta $1/g = \psi \circ g$. Dai Teoremi (2.5) e (2.6) si deduce che $1/g$ è continua in x . Poiché f/g è il prodotto di f per $(1/g)$, ne segue la continuità di f/g in x . ■

Vediamo ora che le funzioni polinomiali sono sempre continue.

(2.9) Teorema *Supponiamo che se esistano $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Allora f è continua.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto una funzione f del tipo $f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$ si ottiene la funzione costantemente uguale a 1, che è continua per il Teorema (2.2). D'altronde $x^{k+1} = x^k \cdot x$. Pertanto, se $\{x \mapsto x^k\}$ è continua, anche $\{x \mapsto x^{k+1}\}$ è continua per il Teorema (2.3) ed il teorema sulla continuità di un prodotto di funzioni. Per induzione

si ottiene la continuità di f per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se f è del tipo $f(x) = a_k x^k$ con $k \in \mathbb{N}$ ed $a_k \in \mathbb{R}$, f è continua, perché prodotto della funzione costantemente uguale ad a_k per la funzione $\{x \mapsto x^k\}$. Dimostriamo ora la tesi per induzione su n . Se $n = 0$, la funzione f è costantemente uguale ad a_0 , quindi continua. Supponiamo la tesi vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Risulta

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) + a_{n+1} x^{n+1}.$$

Dal teorema sulla continuità di una somma di funzioni si deduce che la tesi è vera anche per $n + 1$. ■

(2.10) Teorema *Sia f una funzione razionale, ossia il quoziente di due funzioni polinomiali. Allora per ogni $x \in \text{dom}(f)$ la funzione f è continua in x .*

Dimostrazione. Sia $f = P/Q$ con P e Q funzioni polinomiali. Evidentemente si ha $x \in \text{dom}(f)$ se e solo se $Q(x) \neq 0$. Allora la continuità di f in x discende dal teorema precedente e dal teorema sul quoziente di funzioni continue. ■

3 Topologia della retta reale

Nella presente sezione introduciamo alcuni elementi di *topologia della retta reale*. Con tali nozioni è anche possibile formulare in modo unitario la definizione di limite.

(3.1) Definizione *Siano $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che U è un intorno di x , se si verifica uno dei seguenti fatti:*

- (a) $x \in \mathbb{R}$ ed esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$;
- (b) $x = -\infty$ ed esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$;
- (c) $x = +\infty$ ed esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$.

(3.2) Esempio $] - 3, 2[$ è un intorno di 0, $] - 1, 0[$, $] - 1, 0]$, $]0, 1[$, $[0, 1[$ non sono intorni di 0.

Come vediamo nel seguente teorema, gli intorni di un punto sono stabili rispetto all'operazione di intersezione insiemistica. Inoltre, punti distinti ammettono sempre dei relativi intorni disgiunti (proprietà di separazione della topologia).

(3.3) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

- (a) se $U, V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ sono intorni di un medesimo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $U \cap V$ è un intorno di x ;
- (b) se $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x \neq y$, allora esistono un intorno U di x ed un intorno V di y tali che $U \cap V = \emptyset$;
- (c) se $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intorno di $x \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esiste un intorno V di x tale che $V \subseteq U$ e tale che V sia un intervallo.

Dimostrazione.

(a) Ci limitiamo a considerare in caso in cui $x \in \mathbb{R}$; in modo simile si può verificare l'affermazione per $x = +\infty$ o $x = -\infty$. Esistono dunque $r, s > 0$ tali che $]x - r, x + r[\subseteq U$ e $]x - s, x + s[\subseteq V$. Poniamo $t = \min\{r, s\}$. Risulta $t > 0$ e

$$]x - t, x + t[\subseteq]x - r, x + r[\subseteq U,$$

$$]x - t, x + t[\subseteq]x - s, x + s[\subseteq V,$$

per cui $]x - t, x + t[\subseteq U \cap V$. Pertanto $U \cap V$ è un intorno di x .

(b) A meno di scambiare x con y , possiamo supporre $x < y$. Anche questa volta proviamo l'affermazione solo per il caso $x \in \mathbb{R}$, omettendo la dimostrazione dei casi $x = +\infty$ e $x = -\infty$. Si ha $(y - x) > 0$. Poniamo $r = \frac{1}{2}(y - x)$, $U =]x - r, x + r[$ e $V =]y - r, y + r[$. Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di y . Se per assurdo $z \in U \cap V$, risulta $x - r < z < x + r$ ed $y - r < z < y + r$. Ne segue

$$|y - x| = |(y - z) + (z - x)| \leq |y - z| + |z - x| < 2r = |y - x|,$$

il che è assurdo. Pertanto $U \cap V = \emptyset$.

(c) Se U è un intorno di x e $x \in \mathbb{R}$, esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Allora $V =]x - r, x + r[$ è un intorno di x contenuto in U e V è un intervallo. Se U è un intorno di $-\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$. Allora $V = [-\infty, M[$ ha i requisiti richiesti. Se U è un intorno di $+\infty$, il ragionamento è simile. ■

(3.4) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è aderente ad E , se per ogni intorno U di x si ha $U \cap E \neq \emptyset$.

(3.5) Esempio 0 e 1 sono punti aderenti all'insieme $E =]0, 1[$.

(3.6) Teorema Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$. Allora $\inf E$ e $\sup E$ sono aderenti ad E . In particolare, $-\infty$ e $+\infty$ sono aderenti a $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poniamo $x = \sup E$. Se $x = -\infty$, si ha necessariamente $E = \{-\infty\}$. In tal caso è ovvio che x è aderente ad E . Se $x \in \mathbb{R}$, per ogni intorno U di x esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Poiché $x - r$ non è un maggiorante per E , esiste $\xi \in E$ tale che $\xi > x - r$. D'altronde è ovvio che $\xi < x + r$, per cui $\xi \in]x - r, x + r[\cap E \subseteq U \cap E$. Pertanto $U \cap E \neq \emptyset$. Infine, se $x = +\infty$, per ogni intorno U di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$. Dal momento che M non è un maggiorante per E , esiste $\xi \in E$ tale che $\xi > M$. Ne segue $\xi \in]M, +\infty] \cap E \subseteq U \cap E$, quindi $U \cap E \neq \emptyset$. La dimostrazione che anche $\inf E$ è aderente ad E può essere svolta per esercizio. ■

Poniamo

$$\bar{E} := \left\{ x \in \mathbb{R} : x \text{ è aderente ad } E \right\}.$$

Osserviamo che per il teorema precedente la notazione $\bar{\mathbb{R}}$ non è ambigua. L'insieme $\bar{E}$ si chiama *chiusura* di E . Evidentemente per ogni $E \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ si ha $E \subseteq \bar{E}$.

(3.7) Esempio $]0, 1[$ è la chiusura dell'insieme $E =]0, 1[$.

(3.8) Definizione Siano $E \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ e $x \in \bar{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è interno ad E , se E è un intorno di x .

Poniamo

$$\text{int}(E) := \left\{ x \in \bar{\mathbb{R}} : x \text{ è interno ad } E \right\}.$$

L'insieme $\text{int}(E)$ si chiama *parte interna* di E . Evidentemente per ogni $E \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ si ha $\text{int}(E) \subseteq E$.

(3.9) Esempio $]0, 1[$ è la parte interna dell'insieme $E =]0, 1[$.

(3.10) Definizione Siano $E \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è aperto se

$$\text{int}(E) = E.$$

Diciamo che E è chiuso se

$$\bar{E} = E.$$

(3.11) Esempio L'insieme $E =]0, 1[$ non è né aperto né chiuso, essendo $\text{int}(E) =]0, 1[\neq E$ e $\bar{E} = [0, 1] \neq E$.

(3.12) Proposizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Allora E è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se $\mathbb{R} \setminus E$ è aperto in $\mathbb{R}$.

(3.13) Proposizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme aperto. Allora E non ha né massimo né minimo assoluto.

(3.14) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è un punto di accumulazione per E , se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.

(3.15) Definizione Siano $E \subseteq F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è denso in F , se $F \subseteq \overline{E}$.

Si verifica facilmente che valgono i seguenti fatti. La semplice dimostrazione può essere svolta per esercizio.

(3.16) Esempio Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$. Allora

$$\overline{[a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{]a, b[} = [a, b].$$

(3.17) Esempio Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora

$$\text{int}([a, b]) = \text{int}([a, b]) = \text{int}(]a, b]) = \text{int}(]a, b]) =]a, b[.$$

(3.18) Esempio Ogni intervallo della forma $[a, b[$ o $]a, b]$ non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}$. Ogni singoletto $\{a\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

(3.19) Esempio L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}$.

(3.20) Esempio L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è chiuso in $\mathbb{R}$.

(3.21) Esempio Si verifica facilmente che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

e che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} \right[=]0, 1[.$$

Quindi, in generale, l'intersezione numerabile di insiemi aperti di $\mathbb{R}$ può essere un insieme chiuso di $\mathbb{R}$ e l'unione numerabile di insiemi chiusi di $\mathbb{R}$ può essere un insieme aperto di $\mathbb{R}$.

(3.22) Teorema L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Se $x \in \mathbb{R}$ ed U è un intorno di x , esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Per il Teorema (6.9) esiste $q \in]x - r, x + r[\cap \mathbb{Q}$, per cui $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Pertanto $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Se $x = +\infty$ ed U è un intorno di x , esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$. Per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > M$. In particolare $n \in]M, +\infty] \cap \mathbb{Q}$, per cui $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Pertanto anche $+\infty$ è aderente a $\mathbb{Q}$. In modo simile si prova che $-\infty$ è aderente a $\mathbb{Q}$. ■

4 Limite di una funzione

La nozione di intorno consente anzitutto di fornire un'utile riformulazione della nozione di continuità.

(4.1) Proposizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora f è continua in x se e solo se per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x . Sia V un intorno di $f(x)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subseteq V$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon,$$

ossia $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Allora $]x - \delta, x + \delta[$ è un intorno di x e $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq V$. Per provare il viceversa, consideriamo $\varepsilon > 0$. Si ha che $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ è un intorno di $f(x)$. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Sia $\delta > 0$ tale che $]x - \delta, x + \delta[\subseteq U$. Allora risulta $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$, ossia

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

La nozione di continuità è in effetti un caso particolare di una nozione più generale, che ora introduciamo nell'ambiente $\overline{\mathbb{R}}$. La nozione di intorno ci consente di fornire una presentazione unitaria.

(4.2) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ℓ è limite di f in x , se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.¹*

(4.3) Proposizione (Unicità del limite) *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che ℓ' e ℓ'' siano entrambi limiti di f in x . Allora $\ell' = \ell''$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\ell' \neq \ell''$. Per il Teorema (3.3) esistono un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che $V' \cap V'' = \emptyset$. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $f(U'' \cap E) \subseteq V''$. Per il Teorema (3.3) $U' \cap U''$ è un intorno di x . Essendo

¹Esiste in letteratura una diversa definizione di limite, più classica, secondo cui una funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ammette limite ℓ in x se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E \setminus \{x\}) \subseteq V$, nell'ipotesi che il punto x sia di accumulazione per E . Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uguale ad 1 in ogni $x \neq 0$ e che vale 0 in $x = 0$ non risulta avere limite secondo la definizione data, mentre ha limite rispetto alla definizione classica. Con la definizione di limite data (che venne originariamente divulgata da Ennio De Giorgi) il teorema di composizione si enuncia in maniera più pulita.

x aderente ad E , esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V' \cap V''$, quindi $V' \cap V'' \neq \emptyset$, il che è assurdo. ■

(4.4) Definizione Se f ammette limite ℓ in x , poniamo

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \ell$$

e diciamo che $f(\xi)$ tende a ℓ per ξ tendente a x (equivalentemente, $f(\xi) \rightarrow \ell$ per $\xi \rightarrow x$).

Se $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che f è convergente in x .

Se $\ell = +\infty$, diciamo che f è positivamente divergente in x .

Se $\ell = -\infty$, diciamo che f è negativamente divergente in x .

Come avevamo anticipato, la nozione di limite contiene come caso particolare quella di continuità.

(4.5) Proposizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora f è continua in x se e solo se

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (4.2) con la Proposizione (4.1). ■

Anche se la nozione di intorno consente una formulazione unitaria della nozione di limite, è utile possedere delle caratterizzazioni più dirette.

(4.6) Proposizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora l'affermazione

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$$

può essere così caratterizzata:

(a) caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon;$$

(b) caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies f(\xi) < M;$$

(c) caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies f(\xi) > M ;$$

(d) caso $x = -\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon ;$$

(e) caso $x = -\infty$ e $\ell = -\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies f(\xi) < M ;$$

(f) caso $x = -\infty$ e $\ell = +\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies f(\xi) > M ;$$

(g) caso $x = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon ;$$

(h) caso $x = +\infty$ e $\ell = -\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies f(\xi) < M ;$$

(i) caso $x = +\infty$ e $\ell = +\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies f(\xi) > M .$$

Dimostrazione. Lasciamo l'utile verifica per esercizio. ■

(4.7) Proposizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Allora sono fatti equivalenti:

$$(a) \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell;$$

$$(b) \lim_{\xi \rightarrow x} |f(\xi) - \ell| = 0.$$

Dimostrazione. La condizione

$$|f(\xi) - \ell| < \varepsilon$$

è chiaramente equivalente a

$$||f(\xi) - \ell| - 0| < \varepsilon.$$

La tesi discende allora dalla proposizione precedente. ■

Vediamo ora qualche esempio notevole di limite.

(4.8) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |\xi| = +\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} |\xi| = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ poniamo $N = -|M|$. Se $\xi < N$, si ha $\xi < 0$, quindi

$$|\xi| = -\xi > -N = |M| \geq M.$$

La seconda relazione di limite può essere dimostrata per esercizio. ■

(4.9) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\xi} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\xi} = 0;$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\xi} \right| = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo $N = -\varepsilon^{-1}$. Se $\xi < N$, si ha $\xi < 0$, quindi

$$-\varepsilon < \frac{1}{\xi} < \varepsilon,$$

per cui $|1/\xi| < \varepsilon$. Il limite a $+\infty$ può essere trattato per esercizio in maniera simile. Consideriamo ora il terzo limite. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ sia $\delta = \frac{1}{|M|+1}$. Se $|\xi| < \delta$ e $\xi \neq 0$, risulta

$$\left| \frac{1}{\xi} \right| > \frac{1}{\delta} = |M| + 1 > M,$$

da cui la tesi. ■

4.1 Alcuni teoremi sui limiti

Dimostriamo ora qualche risultato generale riguardante la nozione di limite.

(4.10) Teorema (di locale limitatezza) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E)$ sia limitato.

Dimostrazione. $]\ell - 1, \ell + 1[$ è un intorno di ℓ , quindi esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]\ell - 1, \ell + 1[$. Evidentemente $\sup f(U \cap E) \leq \ell + 1$ ed $\inf f(U \cap E) \geq \ell - 1$. ■

(4.11) Osservazione Nel teorema precedente è necessario che il limite ℓ sia finito. Se ad esempio $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$ su $E =]0, 1[$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = +\infty$$

e l'insieme $f(U \cap]0, 1[)$ non è limitato, per nessun intorno U di 0.

(4.12) Teorema (di permanenza del segno) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : f(\xi)\ell > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $\ell > 0$. L'insieme $]0, +\infty]$ è evidentemente un intorno di ℓ . Esiste quindi un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]0, +\infty]$, da cui la tesi. Il caso $\ell < 0$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(4.13) Osservazione Nel teorema precedente è necessario che il limite ℓ sia diverso da zero. Se ad esempio $f(\xi) = \xi$ su $E =]-1, 1[$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = 0$$

e, per un qualunque intorno U di 0, si ha

$$\forall \xi \in U \cap]0, 1[: f(\xi) > 0, \quad \forall \xi \in U \cap]-1, 0[: f(\xi) < 0,$$

ossia il segno di f non permane in nessun intorno di 0.

(4.14) Teorema (del confronto o dei due carabinieri) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi, f, \psi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tre funzioni, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\forall \xi \in E : \varphi(\xi) \leq f(\xi) \leq \psi(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} \psi(\xi) = \ell.$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Per il Teorema (3.3), per ogni intorno W di ℓ esiste un intervallo $V \subseteq W$ tale che V sia un intorno di ℓ . Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $\varphi(U' \cap E) \subseteq V$ e $\psi(U'' \cap E) \subseteq V$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x per il Teorema (3.3). Inoltre per ogni $\xi \in U \cap E$ si ha $\varphi(\xi) \in V$ e $\psi(\xi) \in V$, quindi $f(\xi) \in V$, perché V è un intervallo. Ne segue $f(U \cap E) \subseteq V \subseteq W$. ■

(4.15) Teorema (di composizione) Siano $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, siano $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $g : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni e siano $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, $y \in \overline{F}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = y, \quad \lim_{\eta \rightarrow y} g(\eta) = \ell.$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (g \circ f)(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.16) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell', \quad \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) = \ell''.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se la somma $\ell' + \ell''$ è definita, si ha che x è aderente a $\text{dom}(f + g)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (f + g)(\xi) = \ell' + \ell'';$$

(b) se il prodotto $\ell' \ell''$ è definito, si ha che x è aderente a $\text{dom}(fg)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (fg)(\xi) = \ell' \ell''.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.17) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha che x è aderente a $\text{dom}(1/f)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{\ell};$$

(b) se $\ell = -\infty$ o $\ell = +\infty$, si ha che x è aderente a $\text{dom}(1/f)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{1}{f(\xi)} = 0;$$

(c) se $\ell = 0$ e se x è aderente a $\text{dom}(1/f)$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \left| \frac{1}{f(\xi)} \right| = +\infty.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

4.2 Limiti su restrizioni

Vediamo ora come sia possibile definire il limite di una funzione quando questa viene ristretta ad un sottoinsieme dell'insieme su cui è definita.

(4.18) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $D \subseteq E$, $x \in \overline{D}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ℓ è limite di f in x sulla restrizione D e scriviamo

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in D}} f(\xi) = \ell,$$

se

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f|_D(\xi) = \ell,$$

ossia se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap D) \subseteq V$.

In alcuni casi particolari si adottano delle notazioni più specifiche. Per esempio, se

$$D = E \setminus \{x\}$$

si usa la notazione

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} f(\xi) = \ell.$$

Nel caso

$$D = E \cap [-\infty, x], \quad D = E \cap [x, +\infty],$$

si usano rispettivamente le notazioni

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) = \ell \quad (\text{limite da sinistra}), \quad \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) = \ell \quad (\text{limite da destra}).$$

Come afferma il prossimo risultato, se esiste il limite di una funzione allora esiste anche il limite su una qualunque restrizione del dominio.

(4.19) Teorema Siano $D \subseteq E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{D}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora si ha

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in D}} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (4.18) con la Definizione (4.2), tenendo presente che $f(U \cap D) \subseteq f(U \cap E)$. ■

Viceversa, il prossimo teorema afferma che se esistono e sono uguali i limiti della funzione lungo due restrizioni che ne partizionano il dominio, allora esiste il limite della funzione.

(4.20) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Siano D_1 e D_2 due sottoinsiemi di E tali che

$$E = D_1 \cup D_2$$

e tali che per ogni $j = 1, 2$ si abbia

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in D_j}} f(\xi) = \ell,$$

se x è aderente a D_j . Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Sia V un intorno di ℓ . Se x è aderente a D_1 , esiste un intorno U_1 di x tale che $f(U_1 \cap D_1) \subseteq V$. Se invece x non è aderente a D_1 , esiste un intorno U_1 di x tale che $U_1 \cap D_1 = \emptyset$, quindi a maggior ragione $f(U_1 \cap D_1) \subseteq V$. Analogamente si trova un intorno U_2 di x tale che $f(U_2 \cap D_2) \subseteq V$. Allora $U = U_1 \cap U_2$ è un intorno di x e si ha

$$\begin{aligned} f(U \cap E) &= f(U \cap (D_1 \cup D_2)) = f((U \cap D_1) \cup (U \cap D_2)) = \\ &= f(U \cap D_1) \cup f(U \cap D_2) \subseteq f(U_1 \cap D_1) \cup f(U_2 \cap D_2) \subseteq V, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Vediamo ora qualche esempio di limite di funzione su una restrizione.

(4.21) Esempio *Risulta*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\xi} = +\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\xi} = -\infty.$$

La verifica può essere svolta per esercizio, imitando la dimostrazione del Teorema (4.9).

(4.22) Esempio *Se consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$, non esiste il limite di f per $\xi \rightarrow a$. Infatti, si verifica facilmente che

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow a \\ \xi \in \mathbb{Q}}} f(\xi) = 1, \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow a \\ \xi \notin \mathbb{Q}}} f(\xi) = 0,$$

per cui la tesi segue dal teorema precedente.

4.3 Limiti e funzioni monotone

(4.23) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f è:

- crescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) ;$$

- strettamente crescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) ;$$

- decrescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) ;$$

- strettamente decrescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) .$$

- monotona, se f è crescente o decrescente;

- strettamente monotona, se f è strettamente crescente o strettamente decrescente.

(4.24) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e

$$x_1 = \inf E, \quad x_2 = \sup E .$$

Allora, se f è crescente, si ha

$$x_1 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_1} f(\xi) = \inf f(E) ,$$

$$x_2 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_2} f(\xi) = \sup f(E) .$$

Se f è decrescente, si ha

$$x_1 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_1} f(\xi) = \sup f(E) ,$$

$$x_2 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_2} f(\xi) = \inf f(E) .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

4.4 Massimo e minimo limite

(4.25) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è un maggiorante definitivo per f in x , se esiste un intorno U di x tale che M è un maggiorante per $f(U \cap E)$. Diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è un minorante definitivo per f in x , se esiste un intorno U di x tale che m è un minorante per $f(U \cap E)$.

Evidentemente risulta che $+\infty$ è sempre un maggiorante definitivo e che $-\infty$ è sempre un minorante definitivo.

(4.26) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Poniamo

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x \right\},$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \sup \left\{ m \in \overline{\mathbb{R}} : m \text{ è un minorante definitivo per } f \text{ in } x \right\}.$$

La prima quantità si chiama massimo limite di f in x e si denota anche con i simboli

$$\max \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi), \quad \overline{\lim}_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

La seconda quantità si chiama minimo limite di f in x e si denota anche con i simboli

$$\min \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi), \quad \underline{\lim}_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Il pregio delle nozioni di massimo e minimo limite è che tali numeri reali esistono sempre. Il seguente risultato stabilisce il collegamento tra le nozioni di massimo e minimo limite e la nozione di limite.

(4.27) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Allora si ha

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f ammette limite in x , nel qual caso

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.28) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} g(\xi),$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi \rightarrow x} g(\xi).$$

In particolare, se f e g ammettono limite in x , allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.29) Osservazione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Si verifica facilmente che

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} (-f(\xi)) = -\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi),$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} (-f(\xi)) = -\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Inoltre, se $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\text{dom}(f + g)}$, si verifica facilmente che

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} (f(\xi) + g(\xi)) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) + \limsup_{\xi \rightarrow x} g(\xi),$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} (f(\xi) + g(\xi)) \geq \liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) + \liminf_{\xi \rightarrow x} g(\xi),$$

non appena le espressioni a secondo membro siano definite.

(4.30) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una funzione e $x \in \overline{E}$. Si denota col simbolo $o(g, x)$ (o piccolo di g in x) l'insieme delle funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0.$$

Si denota col simbolo $O(g, x)$ (o grande di g in x) l'insieme delle funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} \left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right| < +\infty.$$

Quando è chiaro dal contesto chi sia il punto x , si scrive semplicemente $o(g)$ e $O(g)$. Spesso si usa scrivere, impropriamente, $f = o(g)$ e $f = O(g)$ invece di $f \in o(g)$ e $f \in O(g)$.

5 Punti di discontinuità

Vediamo ora tre diverse situazioni di discontinuità per una funzione f in un punto: eliminabile, di prima e di seconda specie.

(5.1) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è una discontinuità eliminabile per f se esiste

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} f(\xi) = \ell \neq f(x).$$

Esisterà in tal caso una estensione continua $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ di f , definita da

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in E \setminus \{x\}, \\ \ell & \text{se } \xi = x, \end{cases}$$

e si dice che g è il prolungamento per continuità della funzione f .

Vediamo un esempio di funzione con un punto di discontinuità eliminabile.

(5.2) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Allora f non è continua in $x = 1$, non esistendo il limite di f per $\xi \rightarrow 1$. Inoltre, esiste il limite di f per $\xi \rightarrow 1$ con $\xi \neq 1$ e

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 1 \\ \xi \neq 1}} f(\xi) = 2 \neq f(1),$$

per cui la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$. Il prolungamento per continuità g della funzione è dato da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

(5.3) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è una discontinuità di prima specie per f se esistono i limiti sinistro e destro di f in x e

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) \neq \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi).$$

Diremo inoltre che

$$S = \left| \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) - \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) \right|$$

è il salto di f in x .

Vediamo ora un caso di funzione con un punto di discontinuità di prima specie.

(5.4) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Allora f non è continua in $x = 0$. Infatti, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} f(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = 1,$$

per cui la funzione ha una discontinuità di prima specie di salto $S = 1$.

(5.5) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è una discontinuità di seconda specie per f se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi)$$

non esiste oppure è infinito.

Vediamo ora due esempi di funzioni con punti di discontinuità di seconda specie.

(5.6) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} f(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = +\infty,$$

per cui 0 è una discontinuità di seconda specie per f .

(5.7) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora, in ogni $a \in \mathbb{R}$, la funzione ammette una discontinuità di seconda specie non esistendo né il limite a destra né il limite a sinistra.

6 Successioni

(6.1) Definizione Si chiama *successione in $\overline{\mathbb{R}}$* ogni applicazione $x : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Si usa denotare con x_n il valore di x in n e si usa denotare col simbolo (x_n) o col simbolo $\{x_n\}$ la successione x .

(6.2) Osservazione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$, si ha che $+\infty$ è aderente a $\mathbb{N}$. È quindi chiaro il significato delle scritte

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

Poiché per le successioni è interessante solo il limite a $+\infty$, si usano spesso le notazioni abbreviate

$$\lim_n x_n = \ell, \quad \limsup_n x_n = \ell, \quad \liminf_n x_n = \ell.$$

Diremo che *successione numerica* è convergente, positivamente divergente, negativamente divergente, se tale è il suo andamento a $+\infty$.

(6.3) Proposizione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora si ha

$$\lim_n x_n = \ell$$

se e solo se per ogni intorno V di ℓ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n \in V.$$

Dimostrazione. Supponiamo che ℓ sia limite di (x_n) . Per ogni intorno V di ℓ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > M \implies x_n \in V.$$

È allora sufficiente scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > M$. Il viceversa è ovvio. ■

(6.4) Proposizione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora l'affermazione

$$\lim_n x_n = \ell$$

può essere così caratterizzata:

(a) caso $\ell \in \mathbb{R}$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies |x_n - \ell| < \varepsilon;$$

(b) caso $\ell = -\infty$: per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n < M ;$$

(c) caso $\ell = +\infty$: per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n > M .$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(6.5) Esempio Sia $a \in]1, +\infty[$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a^n = ((a-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-1)^k \geq n(a-1) ,$$

per cui

$$\lim_n a^n = +\infty .$$

Se $-1 < a < 1$ ed $a \neq 0$, ne segue

$$\lim_n \frac{1}{|a^n|} = \lim_n \left| \frac{1}{a} \right|^n = +\infty ,$$

perché $|1/a| > 1$. Risulta quindi

$$\lim_n a^n = 0 .$$

Naturalmente quest'ultima relazione di limite è valida anche per $a = 0$, per cui si ha

$$-1 < a < 1 \implies \lim_n a^n = 0 .$$

Siano ora

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\} , \quad D_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\} .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$n \text{ dispari} \implies a^n = -|a|^n , \quad n \text{ pari} \implies a^n = |a|^n .$$

Per $a = -1$ ne segue

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_1}} a^n = -1 , \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_2}} a^n = 1 .$$

Per $a < -1$ risulta invece

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_1}} a^n = -\infty , \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_2}} a^n = +\infty .$$

In entrambi i casi si deduce che a^n non ammette limite per $n \rightarrow +\infty$

6.1 Limiti e successioni

Molte nozioni introdotte nelle precedenti sezioni possono essere caratterizzate per mezzo delle successioni.

(6.6) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) x è aderente ad E ;
 (b) esiste una successione (ξ_n) a valori in E tale che

$$\lim_n \xi_n = x.$$

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Consideriamo il caso $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\xi_n \in \left] x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1} \right[\cap E.$$

Risulta così definita una successione (ξ_n) a valori in E . Poiché

$$x - \frac{1}{n+1} \leq \xi_n \leq x + \frac{1}{n+1},$$

si deduce dal Teorema del confronto che

$$\lim_n \xi_n = x.$$

Consideriamo ora il caso $x = +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\xi_n \in]n, +\infty] \cap E$. Risulta così definita una successione (ξ_n) a valori in E . Poiché $n \leq \xi_n$, si deduce dal Teorema del confronto che

$$\lim_n \xi_n = +\infty = x.$$

Il caso $x = -\infty$ può essere dimostrato per esercizio in modo simile al caso precedente.

(b) $\implies$ (a) Sia U un intorno di x e sia (ξ_n) una successione in E tendente a x . Sia poi $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi_n \in U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \bar{n}$. Per tali n risulta $\xi_n \in U \cap E$, per cui $U \cap E \neq \emptyset$. ■

(6.7) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$;

(b) per ogni successione (ξ_n) a valori in E con

$$\lim_n \xi_n = x,$$

si ha

$$\lim_n f(\xi_n) = \ell.$$

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Si tratta di una conseguenza del Teorema di composizione.

(b) $\implies$ (a) Supponiamo per assurdo che la (a) sia falsa. In altre parole supponiamo che esista un intorno V di ℓ tale che non si abbia $f(U \cap E) \subseteq V$ per nessun intorno U di x . Questo significa che non si ha $U \cap E \subseteq f^{-1}(V)$, ossia che risulta $U \cap (E \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x . Pertanto x è aderente ad $E \setminus f^{-1}(V)$. Per il teorema precedente esiste una successione (ξ_n) in $E \setminus f^{-1}(V)$ tendente a x . Poiché $f(\xi_n) \notin V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, non si può avere $f(\xi_n) \rightarrow \ell$, e questo è in contraddizione con la (b). ■

(6.8) Osservazione Siano $E \subseteq F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni continue. Si supponga che E sia denso in F e che $f(x) = g(x)$ per ogni x in E . Allora, si verifica facilmente che $f(x) = g(x)$ per ogni x in F .

6.2 Sottosuccessioni

(6.9) Definizione Siano (x_n) e (y_n) due successioni in $\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che (y_n) è una sottosuccessione di (x_n) , se esiste una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $y_n = x_{\nu(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(6.10) Proposizione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$, sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia (y_n) una sottosuccessione di (x_n) . Supponiamo che

$$\lim_n x_n = \ell.$$

Allora

$$\lim_n y_n = \ell.$$

Dimostrazione. Sia $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_n = x_{\nu(n)}$. Si verifica facilmente per induzione su n che $\nu(n) \geq n$, per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(n) = +\infty.$$

La tesi discende allora dal Teorema di composizione dei limiti. ■

La dimostrazione del seguente risultato, che ometteremo, non è affatto banale.

(6.11) Teorema Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono due sottosuccessioni $(x_{\nu(n)})$ e $(x_{\lambda(n)})$ di (x_n) tali che

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \limsup_n x_n ,$$

$$\lim_n x_{\lambda(n)} = \liminf_n x_n .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Il teorema precedente ha alcune conseguenze di fondamentale importanza.

(6.12) Corollario Supponiamo che (x_n) sia successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed una sottosuccessione $(x_{\nu(n)})$ tali che

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \ell .$$

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

Il seguente risultato è di notevole importanza in analisi matematica.

(6.13) Corollario (Teorema di Bolzano-Weierstrass) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Sia anzitutto (x_n) una successione limitata in $\mathbb{R}$. Per il Corollario (6.12) esiste $(x_{\nu(n)})$ con $\lim_n x_{\nu(n)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché

$$-\infty < \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq x_{\nu(n)} \leq \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty ,$$

risulta $-\infty < \ell < +\infty$. ■

(6.14) Definizione Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che (x_n) è di Cauchy, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq \bar{n} \implies |x_m - x_n| < \varepsilon .$$

(6.15) Teorema (Criterio di convergenza di Cauchy) Una successione (x_n) in $\mathbb{R}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione. Supponiamo che (x_n) sia convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies |x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora per ogni $m, n \geq \bar{n}$ risulta

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - \ell| + |\ell - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Supponiamo ora che (x_n) sia di Cauchy. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq \tilde{n} \implies |x_m - x_n| < 1.$$

Ne segue

$$\forall n \geq \tilde{n} : |x_n| \leq |x_n - x_{\tilde{n}}| + |x_{\tilde{n}}| < 1 + |x_{\tilde{n}}|,$$

per cui la successione (x_n) è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(x_{\nu(n)})$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq \bar{n} \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(k) \geq \bar{n}$ e $|x_{\nu(k)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora per ogni $n \geq \bar{n}$ risulta

$$|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{\nu(k)}| + |x_{\nu(k)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pertanto (x_n) è convergente a ℓ . ■

(6.16) Corollario (Criterio di Cauchy per le serie) Sia (x_n) una successione in $\mathbb{C}$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N} : \left| \sum_{h=n}^{n+k} x_h \right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$s_n = \sum_{h=0}^n x_h.$$

Se la serie è convergente, la successione (s_n) è di Cauchy per il criterio di Cauchy per le successioni. Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|s_m - s_n| < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \tilde{n}$. Posto $\bar{n} = \tilde{n} + 1$, per ogni $n \geq \bar{n}$ e $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left| \sum_{h=n}^{n+k} x_h \right| = |s_{n+k} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Il viceversa può essere provato in modo simile per esercizio. ■

7 Alcune funzioni elementari

Nel corso di questa sezione introdurremo tre importanti funzioni elementari, la funzione esponenziale $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e le funzioni trigonometriche $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

7.1 La funzione esponenziale

Allo scopo di introdurre la funzione esponenziale, vediamo anzitutto una importante disuguaglianza elementare tra numeri reali, detta anche aritmetico-geometrica.

(7.1) Lemma Per ogni $n \geq 2$ e per ogni $x_1, \dots, x_n$ strettamente positivi

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se tutti i numeri x_j sono uguali tra di loro.

Dimostrazione. Se $n = 2$ la dimostrazione è immediata, infatti

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

equivale alla disequazione $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, chiaramente vera per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2 . Inoltre il segno di uguaglianza vale solo se $x_1 = x_2$. La tesi è vera anche per $n = 4$, infatti, poichè per $n = 2$ la proprietà è già stata dimostrata, se $x_1, \dots, x_4$ sono quattro numeri reali positivi, si ha

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2, \quad x_3 x_4 \leq \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2,$$

da cui segue

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2.$$

D'altra parte, sempre la disuguaglianza per $n = 2$ applicata ai numeri reali

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{x_3 + x_4}{2}$$

fornisce

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^2,$$

dove il segno di uguaglianza vale soltanto se $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Si conclude che

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4},$$

dove l'uguale vale se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Reiterando il procedimento indicato sopra si può quindi dimostrare la disuguaglianza per ogni $n = 2, 4, 8, 16, \dots$, ossia per $n = 2^m$, con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Rimane quindi da provare l'asserto per i rimanenti numeri naturali. Procederemo dimostrando che se l'affermazione vale per un certo intero n , allora deve valere anche per l'intero precedente (si noti che *non* si deve confondere un tale procedimento *all'indietro* con il metodo di dimostrazione per induzione, *in avanti*). Supponiamo allora che la formula valga per $x_1, \dots, x_n$ e cerchiamo di dimostrare che

$$(7.2) \quad \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Ponendo

$$\sigma := \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1},$$

risulta allora per ipotesi

$$x_1 \cdots x_{n-1} \sigma \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + \sigma}{n} \right)^n.$$

D'altra parte, essendo $x_1 + \cdots + x_{n-1} = (n-1)\sigma$, la quantità dentro parentesi vale σ e si ottiene quindi immediatamente la disuguaglianza (7.2). ■

(7.3) Lemma Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la successione $(1 + \frac{x}{n})^n$ è convergente.

Dimostrazione. Fissato $x \neq 0$, basta osservare che per ogni $n > -x$ si ha

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Infatti, scegliendo nel Lemma (7.1)

$$x_1 = \cdots = x_n = 1 + \frac{x}{n}, \quad x_{n+1} = 1$$

essendo gli x_j positivi e non tutti uguali tra di loro,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1},$$

da cui la tesi. Quindi, essendo la successione $(1 + \frac{x}{n})^n$ strettamente crescente, deve esistere il suo limite per $n \rightarrow +\infty$. Una volta provata la monotonia verifichiamo anche che la successione è limitata. Evidentemente, è sufficiente verificare la limitatezza della successione $\eta_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Osserviamo che, si ha

$$\xi_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \eta_n.$$

D'altra parte ξ_n è strettamente decrescente, ossia

$$\xi_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \xi_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ossia

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$$

che è proprio la disuguaglianza di Bernoulli. Ne segue allora che

$$\eta_1 \leq \eta_n < \xi_n < \xi_1$$

da cui si ricava subito la limitatezza di η_n . ■

Il lemma precedente consente ora di dare la seguente definizione.

(7.4) Definizione *Definiamo la funzione esponenziale*

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) := \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Vediamo ora le proprietà fondamentali della funzione esponenziale.

(7.5) Teorema *Valgono i seguenti fatti*

- (a) $\exp$ è strettamente positiva;
- (b) si ha $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- (c) si ha $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- (d) si ha $\exp(x) \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (e) si ha $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$ per ogni $x < 1$;
- (f) si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$;
- (g) $\exp$ è strettamente crescente;
- (h) $\exp$ è continua.

Dimostrazione. Dato $x \in \mathbb{R}$, per ogni $n > -x$ si ha

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0,$$

da cui la (a). Risulta poi immediato constatare dalla definizione che risulta $\exp(0) = 1$. Allora $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$, per cui la (c) è provata. Osserviamo ora che, essendo la successione $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ strettamente crescente, per la disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$\exp(x) > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

per ogni $x > -1$; per $x < -1$, si ha $1 + x < 0 < \exp(x)$. Osserviamo che scambiando x in $-x$ si ha

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) > 1 - x,$$

per cui anche le affermazioni (d)-(e) sono dimostrate. L'affermazione (f) segue subito dalle disuguaglianze (d)-(e), usando il teorema del confronto. Per la (g), osserviamo che, essendo $\exp(x) > 1$ per ogni $x > 0$, se $x_1 < x_2$, si ha $\exp(x_2 - x_1) > 1$, ossia $\exp(x_2) > \exp(x_1)$. Veniamo ora all'affermazione (b). Proviamo anzitutto che se $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}$ con $\sigma_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_n \left(1 + \frac{\sigma_n}{n}\right)^n = 1.$$

Possiamo naturalmente supporre che $|\sigma_n| < 1$, almeno per n abbastanza grande. Pertanto, per le disuguaglianze (d)-(e), si ha

$$1 + \sigma_n \leq \left(1 + \frac{\sigma_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - \sigma_n}$$

per n sufficientemente grande, per cui la proprietà desiderata segue dal teorema del confronto (dei due carabinieri) per le successioni. Evidentemente l'asserto equivale a provare che

$$\lim_n \xi_n = 1, \quad \xi_n := \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)}\right)^n.$$

In effetti, se poniamo

$$\sigma_n := -\frac{\frac{xy}{n}}{\left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)},$$

risulta $\sigma_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$\xi_n = \left(1 + \frac{\sigma_n}{n}\right)^n,$$

per cui $\xi_n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$, da cui segue la (b). Veniamo infine all'affermazione (h), ossia la continuità di $\exp$ in un punto x . Per la proprietà (b) ciò equivale a dimostrare la continuità in 0, che segue nuovamente dalle (d)-(e) e dal teorema del confronto. ■

7.2 Le funzioni trigonometriche

Per la definizione delle funzioni trigonometriche fondamentali, quali seno e coseno, procediamo nel seguente modo. Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

che, geometricamente, corrisponde al *cerchio unitario* in $\mathbb{R}^2$. Immaginiamo anche di fissare un verso di percorrenza che, convenzionalmente, sarà quello che va dal punto di coordinate cartesiane $(1, 0)$ al punto $(0, 1)$, sull'asse delle ordinate (verso antiorario). Consideriamo ora l'applicazione continua

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$$

tale che $\sigma(0) = (1, 0)$ e, per un $x \neq 0$, $\sigma(x)$ è il punto di $\mathbb{S}$ che corrisponde ad un arco di lunghezza $|x|$ sul cerchio unitario, nel verso convenzionale per x positivo o nel verso opposto per x negativo. L'intera lunghezza del cerchio corrisponde al valore 2π e, infine, σ verifica $\sigma(x) = \sigma(x + 2\pi)$, per ogni x . Evidentemente, dato un qualunque $x \in \mathbb{R}$, si potrà scrivere

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x)), \quad \sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

dove le componenti $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di σ sono funzioni continue.

(7.6) Definizione *Definiamo le funzioni seno e coseno*

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) := \sigma_1(x), \quad \cos(x) := \sigma_2(x).$$

In altre parole, dato $x \in \mathbb{R}$, il seno di x (rispettivamente il coseno di x) corrisponde alla proiezione del punto $\sigma(x)$ di $\mathbb{S}$ sull'asse delle ordinate (rispettivamente delle ascisse). Naturalmente, visto che per costruzione il cerchio è di raggio unitario, per il teorema di Pitagora deve valere $\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x) = 1$, ossia la relazione fondamentale che lega seno e coseno

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Naturalmente, per costruzione, le funzioni $\sin$ e $\cos$ sono periodiche di periodo 2π , ossia

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(7.7) Definizione Definiamo la funzione tangente

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

7.3 Forma trigonometrica dei complessi

Viste le funzioni elementari introdotte nelle sezioni precedenti, possiamo ora introdurre la forma trigonometrica dei numeri complessi.

(7.8) Teorema Per ogni $z \in \mathbb{C}$ esistono $\rho \in [0, +\infty[$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ tali che

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Inoltre, se $z' = \rho'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')$ e $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$zz' = (\rho\rho') (\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')) ,$$

$$\bar{z} = \rho (\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)) ,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \rho^{-1} (\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)) ,$$

$$z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) .$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che, per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, esiste uno ed un solo $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale che $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$. Se $z = 1$ o $z = -1$, basta scegliere rispettivamente $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$. Se $\text{Im } z > 0$, risulta $-1 < \text{Re } z < 1$. Allora, esiste uno ed un solo $\vartheta \in]0, \pi[$ tale che $\cos \vartheta = \text{Re } z$. Tenuto conto che $\text{Im } z > 0$ e $\sin^2 \vartheta = (\text{Im } z)^2$, ne segue $\sin \vartheta = \text{Im } z$. Se $\text{Im } z < 0$, si dimostra in modo simile che esiste uno ed un solo $\vartheta \in]\pi, 2\pi[$ tale che $\text{Re } z = \cos \vartheta$ e $\text{Im } z = \sin \vartheta$. Veniamo ora al caso generale. Se $z = 0$, basta porre $\rho = 0$ e scegliere un qualunque $\vartheta \in \mathbb{R}$. Se $z \neq 0$, esiste per il caso precedente $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale che $\frac{z}{|z|} = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Posto $\rho = |z|$, risulta $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Le altre formule si possono dimostrare per esercizio. ■

(7.9) Osservazione Geometricamente, la forma trigonometrica e, come vedremo, la forma esponenziale corrispondono all'uso di un sistema di coordinate polari nel piano anzichè di un sistema di coordinate cartesiane.

Vediamo ora la formula che fornisce le radici n -esime di un numero complesso.

(7.10) Teorema Sia $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora l'equazione $z^n = w$ ammette esattamente n soluzioni $z \in \mathbb{C}$ date dalla formula

$$z_j = \sqrt[n]{r} (\cos \vartheta_j + i \sin \vartheta_j), \quad \vartheta_j = \frac{\varphi}{n} + \frac{2j\pi}{n}$$

con $0 \leq j \leq n - 1$.

Dimostrazione. Supponiamo di avere $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ con $r \in]0, +\infty[$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. Posto $z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, l'equazione $z^n = w$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ \cos(n\vartheta) = \cos \varphi, \\ \sin(n\vartheta) = \sin \varphi. \end{cases}$$

Deve quindi essere $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $n\vartheta = \varphi + 2j\pi$ con $j \in \mathbb{Z}$. Si ottengono tutte e sole le soluzioni z scegliendo $\rho = \sqrt[n]{r}$ e

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2j\pi}{n}$$

con $0 \leq j \leq n - 1$. ■

(7.11) Osservazione Esiste in realtà una terza rappresentazione dei numeri complessi, detta rappresentazione in forma esponenziale. Se $z \in \mathbb{C}$ ha la forma trigonometrica

$$z = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

allora è possibile scrivere z come $z = r e^{i\vartheta}$. Questa identificazione è possibile per la formula di Eulero, che qui richiamiamo senza dimostrazione

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta.$$

Nella forma complessa potenza n -esima e radici n -esime di z sono dati rispettivamente dalle formule $z^n = r^n e^{in\vartheta}$ e

$$z_j = \sqrt[n]{r} e^{i\vartheta_j}, \quad \vartheta_j = \frac{\vartheta + 2j\pi}{n},$$

per ogni $0 \leq j \leq n - 1$.

8 Proprietà delle funzioni continue

Vediamo ora un utile strumento per stabilire l'esistenza di una zero per una funzione continua su un intervallo.

(8.1) Teorema (di esistenza degli zeri) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che si abbia $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(a) > 0 > f(b)$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Sia, ad esempio, $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}, \quad \xi = \sup E.$$

Poiché $a \in E$ e b è un maggiorante per E , risulta $a \leq \xi \leq b$. Sia (x_n) una successione in E tendente a ξ . Per la continuità di f , da $f(x_n) \leq 0$ segue $f(\xi) \leq 0$. In particolare $\xi < b$. Poiché

$$\xi = \inf]\xi, b],$$

esiste una successione (y_n) in $]\xi, b]$ tendente a ξ . Da $y_n > \xi$ segue $y_n \notin E$, ossia $f(y_n) > 0$. Sempre per la continuità di f si deduce $f(\xi) \geq 0$, quindi $\xi > a$ e $f(\xi) = 0$. Il caso $f(a) > 0 > f(b)$ può essere trattato in maniera simile. ■

(8.2) Osservazione *Risulta necessaria l'ipotesi di continuità di f , come si vede da questo semplice esempio: consideriamo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \geq 0 \\ -1 & \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Allora si ha $f(-1) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, ma $f(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in [-1, 1]$.

(8.3) Osservazione *Il teorema di esistenza degli zeri fornisce solo una condizione sufficiente per l'esistenza di uno zero, come si vede da questo semplice esempio: consideriamo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\xi) = \xi^2$. Allora $f(0) = 0$, ma $f(-1) = f(1) > 0$.*

(8.4) Osservazione *Il teorema di esistenza degli zeri non garantisce l'unicità dello zero di f , come si vede da questo semplice esempio: consideriamo $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(\xi) = \xi^3 - \xi$$

Allora f è continua, si ha $f(-2) < 0$, $f(2) > 0$, ma $f(-1) = f(1) = 0$. Nelle ipotesi del teorema precedente, lo zero è unico sotto l'ipotesi aggiuntiva che la funzione sia strettamente

monotona nell'intervallo $[a, b]$. Supponiamo ad esempio che la funzione f sia strettamente crescente. Siano, per assurdo, $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ tali che $\xi_1 < \xi_2$ e $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Ma allora $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ per la stretta monotonia crescente: una contraddizione.

(8.5) Osservazione Il teorema di esistenza degli zeri è utile anche per determinare l'esistenza di zeri per funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$; ad esempio se $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

con $a_n \neq 0$ e n dispari, allora esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $P(\xi) = 0$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \mp \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \pm \infty,$$

per cui le ipotesi del teorema degli zeri sono soddisfatte su un opportuno intervallo $[-r, r]$, $r > 0$.

il teorema precedente ha anche una importante conseguenza.

(8.6) Corollario (teorema dei valori intermedi) Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni intervallo $I \subseteq E$ l'immagine $f(I)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Sia I un intervallo in E . Se $I = \emptyset$, la tesi è vera. Altrimenti poniamo

$$\alpha = \inf f(I), \quad \beta = \sup f(I).$$

Se $\alpha < y < \beta$, esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) < y < f(b)$. Sia, ad esempio, $a < b$. Poiché I è un intervallo, risulta $[a, b] \subseteq I$. Si può quindi considerare la funzione continua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - y$. Per il Teorema di esistenza degli zeri esiste $\xi \in]a, b[\subseteq I$ tale che $g(\xi) = 0$, ossia $f(\xi) = y$. Pertanto $y \in f(I)$. Alla stessa conclusione si perviene se $b < a$. Allora si ha $]\alpha, \beta[\subseteq f(I) \subseteq [\alpha, \beta]$, per cui $f(I)$ è necessariamente uno dei quattro intervalli di estremi α e β . ■

(8.7) Osservazione Per il teorema precedente risulta necessaria l'ipotesi di continuità di f . Considerando nuovamente la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dell'osservazione (8.2), sia ha

$$f([-1, 1]) = \{-1, 1\},$$

che non è un intervallo.

(8.8) Teorema (della funzione inversa) Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente (risp. decrescente). Allora f è iniettiva e $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente (risp. decrescente).

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(8.9) Definizione Siano E un insieme, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è

– un punto di massimo (assoluto) per f , se

$$\forall \xi \in E : f(\xi) \leq f(x);$$

– un punto di minimo (assoluto) per f , se

$$\forall \xi \in E : f(\xi) \geq f(x).$$

(8.10) Teorema (di Weierstrass) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette un punto di massimo ed un punto di minimo.

Dimostrazione. Poiché $\sup f$ è aderente a $f([a, b])$, esiste una successione (y_n) in $f([a, b])$ tendente a $\sup f$. Sarà $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in [a, b]$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(x_{\nu(n)})$ tendente a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Dal momento che $(f(x_{\nu(n)}))$ è una sottosuccessione di (y_n) , si ha

$$\lim_n f(x_{\nu(n)}) = \sup_{[a,b]} f.$$

Poiché $a \leq x_{\nu(n)} \leq b$, risulta $a \leq \bar{x} \leq b$. Per la continuità di f ne segue

$$f(\bar{x}) = \lim_n f(x_{\nu(n)}) = \sup_{[a,b]} f,$$

ossia $\bar{x}$ è un punto di massimo per f . Similmente si trova il punto di minimo. ■

(8.11) Osservazione Per il teorema di Weierstrass risulta necessaria l'ipotesi che la funzione sia continua. Consideriamo ad esempio la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{se } \xi > 0 \\ 1 & \text{se } \xi = 0 \\ -\xi & \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Allora f , discontinua in zero, non ammette minimo.

(8.12) Osservazione Per il teorema di Weierstrass risulta necessaria l'ipotesi che l'intervallo sia chiuso e limitato come si vede da questi semplici esempi: consideriamo $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\xi) = \xi$. Allora f non ammette minimo (analogamente $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\xi) = \xi$ non ammette massimo). Inoltre, se $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è definita da $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$ allora f non ammette minimo. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostra facilmente che:

(a) se

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) < \sup_{]a, b[} f, \quad \limsup_{x \rightarrow b} f(x) < \sup_{]a, b[} f,$$

allora f ammette un punto di massimo;

(b) se

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) > \inf_{]a, b[} f, \quad \liminf_{x \rightarrow b} f(x) > \inf_{]a, b[} f,$$

allora f ammette un punto di minimo.

8.1 Funzioni uniformemente continue

(8.13) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è uniformemente continua, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

In altre parole una funzione si dice uniformemente continua quando i valori di δ dipendono *esclusivamente* dai valori di ε e *non* dal punto fissato. Vediamo ora una utile condizione sufficiente per garantire l'uniforme continuità.

(8.14) Teorema (di Heine) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si abbia

$$\exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(x_{v(n)})$ convergente a $\xi \in \mathbb{R}$. Poiché

$$x_{v(n)} - \frac{1}{v(n)+1} \leq y_{v(n)} \leq x_{v(n)} + \frac{1}{v(n)+1},$$

dal Teorema del confronto si deduce che anche $(y_{v(n)})$ è convergente a ξ . Inoltre da $a \leq x_{v(n)} \leq b$ segue $a \leq \xi \leq b$. Per la continuità di f e del valore assoluto si ottiene

$$0 = |f(\xi) - f(\xi)| = \lim_n |f(x_{v(n)}) - f(y_{v(n)})| \geq \varepsilon,$$

il che è assurdo. ■

Vediamo ora una condizione necessaria per l'uniforme continuità di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(8.15) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora, esistono due costanti positive a, b tali che*

$$\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq a + b|x|.$$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ relativi alla definizione di uniforme continuità. Allora, essendo

$$\forall j \in \mathbb{N} : \left| (j+1)\frac{\delta}{2} - j\frac{\delta}{2} \right| < \delta,$$

risulta

$$\forall j \in \mathbb{N} : \left| f\left((j+1)\frac{\delta}{2}\right) - f\left(j\frac{\delta}{2}\right) \right| < \varepsilon.$$

Allora, dato $x \in \mathbb{R}^+$, se n_0 è la parte intera di $2x/\delta$, si ha $|x - \frac{n_0\delta}{2}| < \delta$ e $n_0 \leq 2x/\delta$, da cui

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(x) - f\left(\frac{n_0\delta}{2}\right) + \sum_{j=0}^{n_0-1} \left(f\left((j+1)\frac{\delta}{2}\right) - f\left(j\frac{\delta}{2}\right) \right) + f(0) \right| \\ &\leq \left| f(x) - f\left(\frac{n_0\delta}{2}\right) \right| + \sum_{j=0}^{n_0-1} \left| f\left((j+1)\frac{\delta}{2}\right) - f\left(j\frac{\delta}{2}\right) \right| + |f(0)| \\ &\leq \varepsilon + n_0\varepsilon + |f(0)| \leq (\varepsilon + |f(0)|) + \frac{2\varepsilon}{\delta}x. \end{aligned}$$

Naturalmente, se $x \in \mathbb{R}^-$ si ragiona in modo simile. ■

(8.16) Esempio *In base al teorema precedente, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è continua, ma non uniformemente continua. Si noti inoltre che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

definita da $f(x) = \sin(x^2)$ soddisfa la condizione di crescita del teorema precedente ma non è uniformemente continua.

Vediamo una condizione sufficiente per l'uniforme continuità di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(8.17) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che esistano $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_2.$$

Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Per assurdo sia $\varepsilon > 0$ e siano $(x_j) \subset \mathbb{R}$ e $(y_j) \subset \mathbb{R}$ due successioni tali che

$$|x_j - y_j| < \frac{1}{j}, \quad |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon.$$

Se la successione (x_j) è limitata, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, a meno di una sottosuccessione, risulta $x_j \rightarrow \xi$, e quindi anche $y_j \rightarrow \xi$. Allora, per la continuità di f risulta $0 = \lim_j |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon$, assurdo. Se invece $|x_j| \rightarrow \infty$, ad esempio $x_j \rightarrow +\infty$, allora si ha anche $y_j \rightarrow +\infty$, ma allora, per l'ipotesi sui limiti all'infinito di f , $0 = \lim_j |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon$, da cui si trae nuovamente una contraddizione. Se $x_j \rightarrow -\infty$, si ragiona in modo simile. ■

(8.18) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice lipschitziana, se esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in E : |f(x_1) - f(x_2)| \leq c |x_1 - x_2|.$$

Il seguente risultato è di facile dimostrazione.

(8.19) Teorema Valgono i seguenti fatti:

- (a) le funzioni costanti e le funzioni $\{x \mapsto x\}$ e $\{x \mapsto |x|\}$ sono lipschitziane;
- (b) ogni funzione lipschitziana è uniformemente continua;
- (c) una somma ed una composizione di funzioni lipschitziane è lipschitziana.

(8.20) Osservazione Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Allora f è uniformemente continua per il teorema di Heine, essendo continua su $[0, 1]$. D'altra parte il suo rapporto incrementale in 0 è dato da $\{h \mapsto \frac{1}{\sqrt{h}}\}$, per cui f non può essere lipschitziana in un intorno di 0, altrimenti avrebbe rapporto incrementale limitato.

9 Altre funzioni elementari

Introduciamo ora altre importanti funzioni elementari.

(9.1) Teorema Sia n un numero naturale dispari con $n \geq 3$. Allora la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Pertanto $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty.$$

Sia ora n un numero naturale pari con $n \geq 2$. Allora la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^n$ è strettamente crescente e $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. Pertanto $f^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è continua, strettamente crescente e

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty.$$

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso in cui n è un numero dispari, essendo il caso ad n pari simile. Se $a > 1$, si verifica facilmente per induzione che

$$\forall m \in \mathbb{N} : m \geq 1 \implies a^m > 1.$$

Allora da $0 < x < \xi$ segue $\xi/x > 1$, quindi $(\xi/x)^n > 1$, ossia $x^n < \xi^n$. Se $x < \xi < 0$, si ha $0 < -\xi < -x$, quindi $(-\xi)^n < (-x)^n$ da cui $x^n < \xi^n$. Se poi $x \leq 0 < \xi$ oppure $x < 0 \leq \xi$, è evidente che $x^n < \xi^n$. Pertanto f è strettamente crescente. Inoltre per ogni $x \geq 1$ si ha

$$x^n \geq n(x-1),$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(-x) = -\infty. \end{aligned}$$

Ne segue $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$, $\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$. Essendo polinomiale, la funzione f è continua. Poiché $f(\mathbb{R})$ è un intervallo, si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Per il Teorema della funzione inversa, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente. Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) &= \inf f^{-1}(\mathbb{R}) = \inf \mathbb{R} = -\infty, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) &= \sup f^{-1}(\mathbb{R}) = \sup \mathbb{R} = +\infty, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Le due funzioni inverse definite nei due teoremi precedenti vengono denotate col simbolo $\sqrt[n]{}$ (*radice n-esima*). Evidentemente si ha

$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{se } n \text{ è dispari, } n \geq 3, \quad \sqrt[n]{} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{se } n \text{ è pari, } n \geq 2.$$

(9.2) Teorema *La funzione $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente ed $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. Di conseguenza $\exp^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \exp^{-1}(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp^{-1}(y) = +\infty.$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nel Teorema (7.5) che la funzione $\exp$ è strettamente crescente e che $\exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, +\infty[$. D'altronde $\exp(\mathbb{R})$ è un intervallo, perché $\exp$ è continua, con $\inf \exp(\mathbb{R}) = 0$ e $\sup \exp(\mathbb{R}) = +\infty$, dal momento che questi sono i limiti di $\exp$ a $-\infty$ e $+\infty$. Pertanto $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. Per il Teorema della funzione inversa, $\exp^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{y \rightarrow 0} \exp^{-1}(y) = \inf \mathbb{R} = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp^{-1}(y) = \sup \mathbb{R} = +\infty,$$

da cui la tesi. ■

(9.3) Definizione *La funzione $\exp^{-1}$ si chiama logaritmo (naturale) e si denota col simbolo $\log$ (oppure $\ln$).*

(9.4) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

$$\log 1 = 0,$$

$$\forall x, y \in]0, +\infty[: \log(xy) = \log x + \log y,$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: \log(x^{-1}) = -\log x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\log x}{x - 1} = \left(\frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} \right)^{-1}.$$

Per composizione si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Le altre proprietà possono essere dimostrate per esercizio. ■

(9.5) Proposizione Sia $a \in]0, +\infty[$. Allora

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exp(n \log a) = a^n, \quad \exp(-\log a) = a^{-1}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima proprietà, ragioniamo per induzione su n . Per $n = 0$ il fatto è vero. Supponiamo che sia vero per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\exp((n + 1) \log a) = (\exp(n \log a))(\exp(\log a)) = a^n a = a^{n+1}.$$

Quanto alla seconda affermazione, risulta

$$\exp(-\log a) = (\exp(\log a))^{-1} = a^{-1},$$

da cui la tesi. ■

(9.6) Definizione Per ogni $a \in]0, +\infty[$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$a^x := \exp(x \log a).$$

La funzione $\{x \mapsto a^x\}$ si chiama esponenziale con base a . Poniamo anche $e := \exp 1$ che si dice numero di Nepero.

In virtù della proposizione precedente, la notazione introdotta è consistente con quella di potenza. In particolare risulta $e^x = \exp x$.

(9.7) Teorema Per ogni $a, b \in]0, +\infty[$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

$$b \neq 0 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$\log(a^x) = x \log a.$$

Inoltre risulta $e > 1$ ed anche $\log e = 1$.

Dimostrazione. Le verifiche possono essere svolte per esercizio. ■

Tenuto conto della definizione di $\sin$ e $\cos$ usando il teorema di inversione, si possono facilmente dimostrare i seguenti risultati.

(9.8) Teorema La funzione $\cos$ è strettamente decrescente su $[0, \pi]$ con

$$\cos([0, \pi]) = [-1, 1].$$

Di conseguenza $\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente decrescente.

(9.9) Definizione La funzione $\cos^{-1}$ si chiama arcocoseno e si denota col simbolo $\arccos$.

(9.10) Teorema La funzione $\sin$ è strettamente crescente su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ con

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1].$$

Di conseguenza $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente.

(9.11) Definizione La funzione $\sin^{-1}$ si chiama arcseno e si denota col simbolo $\arcsin$.

(9.12) Teorema La funzione $\tan$ è strettamente crescente su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ con

$$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}.$$

Di conseguenza $\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente con

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(y) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $\tan$ è strettamente crescente su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Per la continuità di $\tan$ l'insieme $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ è un intervallo che ammette $-\infty$ e $+\infty$ come punti aderenti. Pertanto $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. ■

(9.13) Definizione La funzione $\tan^{-1}$ si chiama arcotangente e si denota col simbolo $\arctan$.

(9.14) Osservazione Per costruzione si ha

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \pi] : \arccos(\cos x) &= x, & \forall x \in [-1, 1] : \cos(\arccos x) &= x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) &= x, & \forall x \in [-1, 1] : \sin(\arcsin x) &= x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \arctan(\tan x) &= x, & \forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) &= x. \end{aligned}$$

Si noti che se $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \pi]$, l'espressione $\arccos(\cos x)$ è ancora definita, ma il suo valore non è affatto x . La stessa considerazione vale per $\arcsin(\sin x)$ ed $\arctan(\tan x)$.

10 Serie numeriche

10.1 Prime proprietà

(10.1) Definizione Siano (x_n) una successione in $\mathbb{R}$ e $S \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che S è somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

e scriviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S,$$

se

$$\lim_n \left(\sum_{h=0}^n x_h \right) = S.$$

Nel caso si abbia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice

- convergente, se $S \in \mathbb{R}$,
- positivamente divergente, se $S = +\infty$,
- negativamente divergente, se $S = -\infty$.

Se la successione, detta anche successione delle somme parziali,

$$\left\{ n \mapsto \sum_{h=0}^n x_h \right\}$$

non ammette limite, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice indeterminata. Si dice che si studia il carattere di una data serie quando si vuole determinare se la serie è convergente, divergente oppure indeterminata.

In generale, è anche opportuno considerare serie del tipo

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

per $k \in \mathbb{N}$. Le definizioni sono semplici varianti di quelle date.

(10.2) Esempio Consideriamo la serie, detta anche serie di Mengoli,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Allora si verifica facilmente ragionando per induzione su n , che la successione s_n delle somme parziali è data da

$$s_n = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h(h+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Infatti

$$s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1(1+1)}.$$

Inoltre supponendo vera la formula della n -esima somma parziale, si ha

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

per cui la formula desiderata vale per ogni $n \geq 1$ per il principio di induzione. Ne segue allora che la somma S della serie di Mengoli è

$$S = \lim_n s_n = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

In generale la somma di una serie (da non confondere con il carattere della serie) è piuttosto difficile da calcolare esplicitamente con strumenti elementari, tranne in alcuni casi particolari come la serie di questo esempio.

(10.3) Teorema Siano (x_n) e (y_n) due successioni in $\mathbb{R}$, $S, T \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S, \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = T.$$

Allora:

(a) se la somma $S + T$ è definita, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right);$$

(b) se il prodotto λS è definito, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n;$$

(c) se $x_n \leq y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica. ■

Vediamo ora una condizione necessaria affinché una serie sia convergente.

(10.4) Teorema Sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie convergente. Allora si ha

$$\lim_n x_n = 0.$$

Dimostrazione. Se $S \in \mathbb{R}$ è la somma della serie, si ha per composizione

$$\lim_n \left(\sum_{h=0}^{n-1} x_h \right) = S.$$

Ne segue

$$\lim_n x_n = \lim_n \left(\sum_{h=0}^n x_h - \sum_{h=0}^{n-1} x_h \right) = S - S = 0,$$

da cui la tesi. ■

(10.5) Osservazione Il risultato precedente fornisce solo una condizione necessaria per la convergenza, come si evince dal seguente esempio: consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Allora si verifica facilmente ragionando per induzione su n , che la successione s_n delle somme parziali è data da $s_n = \sqrt{n+1} - 1$ per ogni $n \geq 1$, per cui la serie risulta positivamente divergente nonostante il suo termine generale tenda a zero per $n \rightarrow +\infty$.

(10.6) Teorema Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

una serie convergente. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la serie

$$\sum_{h=n}^{\infty} x_h$$

è convergente e si ha

$$\lim_n \left(\sum_{h=n}^{\infty} x_h \right) = 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \geq n$ si ha

$$\sum_{h=n}^k x_h = \sum_{h=0}^k x_h - \sum_{h=0}^{n-1} x_h .$$

Ne segue che $\sum_{h=n}^{\infty} x_h$ è convergente e che

$$\sum_{h=n}^{\infty} x_h = \sum_{h=0}^{\infty} x_h - \sum_{h=0}^{n-1} x_h .$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\lim_n \left(\sum_{h=n}^{\infty} x_h \right) = \sum_{h=0}^{\infty} x_h - \lim_n \left(\sum_{h=0}^{n-1} x_h \right) = 0 ,$$

da cui la tesi. ■

Vediamo ora una serie numerica notevole, detta serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$, per la quale è possibile stabilire il carattere e la somma esplicita al variare di x .

(10.7) Teorema *Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora*

(a) *per $-1 < x < 1$ si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ;$$

(b) *per $x \geq 1$ si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty ;$$

(c) *per $x \leq -1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è indeterminata.*

Dimostrazione. Se $x = 1$, si ha

$$\sum_{h=0}^n x^h = n + 1 ,$$

per cui la serie è positivamente divergente. Se $x \neq 1$, si dimostra facilmente ragionando per induzione su n che

$$\sum_{h=0}^n x^h = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} .$$

Pertanto la serie è convergente per $-1 < x < 1$ e positivamente divergente per $x > 1$. Per $x \leq -1$ si ha

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \geq 1 \quad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq 0 \quad \text{se } n \text{ è dispari,}$$

per cui la serie è indeterminata. ■

10.2 Serie a termini positivi

(10.8) Definizione Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice a termini positivi, se $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dice a termini strettamente positivi, se $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(10.9) Teorema Una serie a termini positivi può essere solo convergente o positivamente divergente.

Dimostrazione. La successione di numeri reali

$$\left\{ n \mapsto \sum_{h=0}^n x_h \right\}$$

è evidentemente crescente. La tesi discende allora dal Teorema (4.24). ■

(10.10) Osservazione Proviamo ora (in modo elementare) che la serie a termini positivi, detta serie armonica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è positivamente divergente. Ricordiamo che la successione

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

è crescente e convergente ad e ; in particolare, si ha

$$e \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

da cui

$$\frac{1}{n} \geq \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

che implica che

$$s_n \geq \log(n+1), \quad \text{per ogni } n \geq 1,$$

da cui $s_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, ossia la serie è positivamente divergente. Più in generale, come vedremo negli esempi (10.20) e (6.9) utilizzando strumenti di calcolo integrale, se $\lambda > 0$, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

è convergente se $\lambda > 1$ mentre è positivamente divergente se $\lambda \leq 1$. Questa serie viene solitamente detta serie armonica generalizzata e risulta particolarmente utile per lo studio del carattere delle serie a termini positivi tramite il criterio del confronto che vedremo ora.

(10.11) Teorema (del confronto) Siano $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie a termini positivi e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie a termini strettamente positivi convergente. Supponiamo che si abbia

$$\limsup_n \frac{x_n}{y_n} < +\infty.$$

Allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ un maggiorante definitivo per $\frac{x_n}{y_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_n}{y_n} \leq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora per ogni $n \geq \bar{n}$ risulta

$$\sum_{h=0}^n x_h = \sum_{h=0}^{\bar{n}-1} x_h + \sum_{h=\bar{n}}^n x_h \leq \sum_{h=0}^{\bar{n}-1} x_h + M \sum_{h=\bar{n}}^n y_h \leq \sum_{h=0}^{\bar{n}-1} x_h + M \sum_{h=0}^{\infty} y_h.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si deduce che $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente. ■

(10.12) Esempio Per il criterio del confronto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_n = \frac{n+1}{n^3}$$

è convergente, poichè la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad y_n = \frac{1}{n^2}$$

è convergente e

$$\limsup_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1.$$

(10.13) Osservazione Il criterio del confronto viene spesso utilizzato nella seguente forma: sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie a termini positivi e sia $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie a termini positivi convergente. Supponiamo inoltre che esistano una costante $c > 0$ ed $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che

$$x_n \leq c y_n \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

è convergente. Inoltre, molto spesso, si utilizza $y_n = \frac{1}{n^\lambda}$ per qualche $\lambda > 1$ come termine generale della serie convergente da confrontare con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

(10.14) Teorema (Criterio della radice) Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

una serie a termini positivi. Allora

(a) se $\limsup_n \sqrt[n]{x_n} < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente;

(b) se $\limsup_n \sqrt[n]{x_n} > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è positivamente divergente.

Dimostrazione.

(a) Sia $M \in]0, 1[$ un maggiorante definitivo per $\sqrt[n]{x_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{x_n} \leq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Ne segue $x_n \leq M^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, quindi

$$\limsup_n \frac{x_n}{M^n} \leq 1.$$

Combinando il criterio del confronto col Teorema (10.7), si ottiene la tesi.

(b) Evidentemente risulta

$$\limsup_n x_n \geq 1,$$

per cui la serie non può essere convergente. La tesi discende allora dal Teorema (10.9). ■

(10.15) Esempio Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}.$$

Poichè

$$\limsup_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \frac{e}{n} < 1,$$

la serie è convergente per il criterio della radice.

(10.16) Teorema (Criterio del rapporto) Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

una serie a termini strettamente positivi. Allora

(a) se

$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente;

(b) se

$$\liminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è positivamente divergente.

Dimostrazione.

(a) Sia $M \in]0, 1[$ un maggiorante definitivo per $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Si verifica facilmente per induzione su n che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n \leq x_{\bar{n}} M^{n-\bar{n}},$$

per cui

$$\limsup_n \frac{x_n}{M^n} < +\infty.$$

Combinando il criterio del confronto col Teorema (10.7), si ottiene la tesi.

(b) Sia $M \in]1, +\infty[$ un minorante definitivo per $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Si verifica facilmente per induzione su n che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n \geq x_{\bar{n}} M^{n-\bar{n}},$$

per cui

$$\lim_n x_n = +\infty.$$

Pertanto la serie non può essere convergente. ■

(10.17) Esempio Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_n = \frac{n^5}{2^n}.$$

Poichè

$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \frac{(n+1)^5}{2n^5} < 1,$$

la serie è convergente per il criterio del rapporto.

(10.18) Osservazione Sia per il criterio del rapporto che per il criterio della radice i casi limite il cui risulta

$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

o, rispettivamente,

$$\limsup_n \sqrt[n]{x_n} = 1$$

sono casi dubbi in cui nulla può dirsi circa il carattere della serie. Ad esempio, per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

si verifica facilmente che i limiti sopra sono uguali ad 1 per ogni valore di $\lambda > 0$. D'altra parte, come osservato in precedenza nell'osservazione (10.10), la serie è convergente per $\lambda > 1$ mentre è divergente per $\lambda < 1$.

Come abbiamo appena visto i criteri della radice e del rapporto sono applicabili solo a serie il cui termine generale abbia un decadimento a zero di tipo esponenziale. Il criterio seguente, che menzioniamo senza dimostrazione, si applica invece anche alle serie il cui termine generale è una funzione razionale.

(10.19) Teorema (Criterio di condensazione) Una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

a termini positivi, con (x_n) decrescente, è convergente se e solo se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$$

è convergente.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(10.20) Esempio Si verifica immediatamente con il criterio di condensazione che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\lambda} n}$$

sono convergenti se e solo se $\lambda > 1$.

10.3 Serie a termini di segno variabile

(10.21) Definizione Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice assolutamente convergente, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ è convergente.

(10.22) Teorema Ogni serie assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + x_n)$ è evidentemente a termini positivi. Poiché

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| + x_n \leq 2|x_n|,$$

risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + x_n) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dal momento che $x_n = (|x_n| + x_n) - |x_n|$, la tesi discende dal Teorema (10.3). ■

(10.23) Osservazione Combinando il teorema precedente con uno dei criteri di convergenza per le serie a termini positivi visti in precedenza, si ottengono criteri utili per lo studio del carattere delle serie a termini di segno variabile. Le condizioni di convergenza saranno quindi

$$\limsup_n \frac{|x_n|}{y_n} < +\infty$$

per il criterio del confronto,

$$\limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

per il criterio della radice e

$$\limsup_n \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$$

per il criterio del rapporto.

(10.24) Teorema (Criterio di Leibniz) Sia (x_n) una successione decrescente a termini positivi tale che

$$\lim_n x_n = 0 .$$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$$

è convergente. Inoltre, se S indica la somma della serie, si ha

$$|s_n - S| \leq x_{n+1}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ossia l'errore che si commette sostituendo l' n -esimo termine della somma parziale s_n della serie con la sua somma S è stimabile con l' $(n + 1)$ -esimo termine x_{n+1} della serie.

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{2k+2} (-1)^h x_h = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h - x_{2k+1} + x_{2k+2} \leq \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h .$$

Allora esiste $S \in [-\infty, +\infty[$ tale che

$$\lim_k \left(\sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h \right) = S .$$

Poiché

$$\sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h - x_{2k+1} ,$$

risulta anche

$$\lim_k \left(\sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h \right) = S ,$$

quindi

$$\lim_n \left(\sum_{h=0}^n (-1)^h x_h \right) = S .$$

D'altronde per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{2k+3} (-1)^h x_h = \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h + x_{2k+2} - x_{2k+3} \geq \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h ,$$

per cui non può essere $S = -\infty$. Per quanto riguarda l'ultima affermazione, osserviamo anzitutto che la successione delle somme parziali dispari (s_{2n+1}) decresce verso S , mentre la successione delle somme parziali pari (s_{2n}) cresce verso S , per cui risulta

$$0 \leq S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}, \quad 0 \leq s_{2n+1} - S \leq s_{2n+1} - s_{2n+2} = x_{2n+2},$$

da cui si ottiene la stima desiderata. ■

(10.25) Osservazione *Il criterio di convergenza assoluta fornisce soltanto una condizione sufficiente per la convergenza. Infatti, mentre la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

risulta convergente per il criterio di Leibniz, la serie dei moduli è la serie armonica, quindi positivamente divergente. Più in generale, per ogni $\lambda > 0$, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda}$$

è convergente per il criterio di Leibniz, essendo $\frac{1}{n^\lambda}$ una successione a termini positivi decrescente che tende a zero per $n \rightarrow \infty$, mentre come abbiamo visto la serie dei moduli converge solo se $\lambda > 1$.

11 Esercizi

(11.1) Esercizio Verificare mediante la definizione di limite i seguenti limiti di successioni:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2;$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\text{con } \alpha > 0);$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0 \quad (\text{con } \alpha > 0);$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0;$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+5}{2n^2+3} = \frac{3}{2};$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n-2}{n^2+5n-2} = 0.$

(11.2) Esercizio Siano dati due polinomi $P(n)$, $Q(n)$. Determinare, mediante opportuni passaggi algebrici, il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

(11.3) Esercizio Utilizzare i risultati precedenti e le proprietà riguardanti le operazioni con i limiti per calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 - \sqrt{n} + 1), & \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_{1/3} \frac{n^2+n}{2n^2+1}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{\frac{n+1}{2}}}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n^2-n}{3n^2-\sqrt{n}}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{\frac{n^2-1}{2}}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^2 n - \ln n^3}{\ln^2 n + \ln n^2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-1} + 2n^{-2}}{3n^{-2} + n^{-4}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right), & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n^3+5n-1}{3n^3+5n^2-27}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{n\pi+3}{2n+2} \right), & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right). \end{array}$$

(11.4) Esercizio Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica $\sim$ determinare i risultati dei seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\log n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - \log n + (-1)^n + \frac{1}{n}}{n^2 + 10 \sin n - \frac{1}{\log n}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{n - \log^3 n + 1}.$$

(11.5) Esercizio Dimostrare $\forall \alpha, \beta > 0, \forall A > 1$ parametri reali, che il limite delle seguenti successioni vale zero:

1. $a_n = \frac{n^\alpha}{A^n}$;
2. $b_n = \frac{A^n}{n!}$;
3. $c_n = \frac{n!}{n^n}$;
4. $d_n = \frac{\log^\beta n}{n^\alpha}$.

(11.6) Esercizio Utilizzare i limiti notevoli per risolvere i seguenti limiti:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$;
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

(11.7) Esercizio Discutere per ogni $\alpha > 0$, la convergenza delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{\left(e + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^2}}{e^{n^2}}, \quad b_n = \left((n+1)^{\frac{-1}{\log n}} + e^{-1}\right) n^\alpha.$$

(11.8) Esercizio (Successione di Fibonacci). Sia $a_1 = a_2 = 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si definisce induttivamente

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Trovare i primi elementi della successione così definita. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ponga

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

e si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(11.9) Esercizio Sia $x_0 \in (0, \pi)$ e si consideri la successione definita da

$$x_{k+1} = x_k + \sin x_k.$$

Provare che:

1. $x_k \in (0, \pi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;

2. $(x_k)_k$ è crescente.

Infine calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.10) Esercizio Data la successione (x_k) definita da

$$x_0 = a, \quad x_{k+1} = \max \left\{ \frac{1}{4}, x_k^2 \right\}$$

dire se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.11) Esercizio Si consideri l'equazione

$$x^k = \cos \frac{x}{k}.$$

1. Provare che esiste un'unica soluzione x_k .

2. Provare che (x_k) rimane limitata.

3. Calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.12) Esercizio Si consideri la successione definita da

$$x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k},$$

con $\lambda \geq 0$. Calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.13) Esercizio Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = x_k + x_{k-1}^2.$$

(11.14) Esercizio Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = \log(1 + x_k).$$

(11.15) Soluzione esercizio (11.1).

Limite 1: Devo mostrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0 \implies \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e determiniamo quale condizione deve soddisfare n in modo tale che sia soddisfatta la disuguaglianza:

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Svolgiamo i conti:

$$\left| \frac{2n+1-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Quindi basta scegliere $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil$.

Limite 4:

Devo mostrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ vale

$$\left| \frac{\sin^2(n)}{n} \right| < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Si ha:

$$\left| \frac{\sin^2(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Basta pertanto prendere $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

(11.16) Soluzione esercizio (11.5). Supponiamo in un primo momento che α sia un numero intero e supponiamo:

$$\sqrt[2\alpha]{A} = 1 + h.$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Bernoulli possiamo affermare che:

$$(\sqrt[2\alpha]{A})^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh.$$

Quindi dato che $A^n > (nh)^{2\alpha}$ ottengo:

$$\frac{n^\alpha}{A^n} < \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha} h^{2\alpha}} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Infine se $\alpha \in \mathbb{R}$, basta osservare che:

$$n^{[\alpha]} \leq n^\alpha \leq n^{[\alpha]+1},$$

quindi per il teorema dei due carabinieri si ha la tesi.

(11.17) Soluzione esercizio (11.8). I termini della successione a_n per $n \geq 3$ sono dati dalla somma dei due precedenti. Quindi i primi termini sono:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \dots$$

Inoltre, se $n \geq 2$, si ha dalla definizione

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq a_n,$$

dato che ciascun termine è positivo. Quindi la successione è monotona crescente e pertanto esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$. Si può facilmente dimostrare per induzione che $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 5$, il che permette di concludere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Il limite precedente si può dimostrare anche nel modo seguente. Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $a \geq 0$. Passando al limite in

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

si ottiene che $a = a + a$, cioè che $a = 2a$, da cui si deduce che $a = 0$, il che ovviamente è falso, dato che la successione è strettamente crescente e tutti i termini sono positivi. Consideriamo ora

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Si noti che $b_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dato che il numeratore è più grande del denominatore. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si ha:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}},$$

che implica che $b_n \leq 2$. Supponiamo per un momento che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

esista e sia uguale a b . Allora $b \in [1, 2]$ e passando al limite nell'uguaglianza

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}},$$

si deduce che b soddisfa

$$b^2 - b - 1 = 0.$$

Pertanto l'unica possibilità è che

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Resta pertanto da dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

esiste. Si ha la seguente uguaglianza per ogni $n \geq 3$:

$$b_{n+2} = 1 + \frac{1}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_n}} = 1 + \frac{b_n}{b_n + 1}.$$

Studiamo quando accade che $b_{n+2} \geq b_n$, cioè quando

$$1 + \frac{b_n}{b_n + 1} \geq b_n.$$

Si vede facilmente che questo è vero se

$$b_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

I primi termini della successione b_n sono dati da

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = \frac{3}{2}, \quad b_4 = \frac{5}{3}, \quad b_5 = \frac{8}{5}, \quad \dots$$

Si noti che i primi termini della successione b_n con n dispari sono più piccoli di $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Inoltre si dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $b_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ allora $b_{n+1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e viceversa. Pertanto la successione dei b_n con n dispari è monotona crescente e quindi tende a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Invece la successione dei b_n con n pari è monotona decrescente e quindi tende a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(11.18) Soluzione esercizio (11.10). Consideriamo vari casi.

1. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. In questo caso si vede facilmente che $x_n = \frac{1}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
2. $\frac{1}{2} < a < 1$, $-1 < a < -\frac{1}{2}$. Da un certo indice $\bar{k}$ in poi, tutti gli x_k sono uguali a $\frac{1}{4}$.
3. $a = 1$, $a = -1$. Risulta che $x_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
4. $a > 1$, $a < -1$. Provare che

$$x_n = (a^2)^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quindi si conclude che il limite della successione è uguale a $+\infty$.

(11.19) Esercizio Utilizzare la definizione per dimostrare i risultati dei seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;

2. $\lim_{x \rightarrow a} k = k;$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4;$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0;$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty.$

(11.20) Esercizio Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} & [5]; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & [2]; & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+1} \cdot \frac{2}{x^2-4x+3} & [3/5]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{[x]} & [1]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x} & [-4]; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x} & [0]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x+\sqrt{3}x} & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} & [-3/5]; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+\sin(e^x)}{2x} & [-\infty]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{(\sin(x))^2} & [1/2]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+e^x)}{\sin(x)} & [no]. \end{aligned}$$

(11.21) Esercizio Utilizzare i limiti notevoli per risolvere i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x-1)}{x^2-1} \cdot \frac{e^{x^2-1}-1}{x-1} & [2]; & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-\cos(x+1)}{x+1} \cdot \frac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1} & [3/2]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-2^x}{\sin(\sin(\sin \sqrt{x}))^2} & [\log(7/2)]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2^x-3^x)}{1-\cos(3x)} & [\frac{-2 \log(3/2)}{9}]; \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x-1}{x-\pi/2} & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|\log(\cos x)|} & [0]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(ex+e)-\cos x}{\sin x} & [1]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin x} & [2]; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} & [\cos(a)]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{(1+x^2)-1})}{x} & [0]. \end{aligned}$$

(11.22) Esercizio Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 1^+$, rispetto all'infinitesimo campione $(x-1)$, delle funzioni $f(x) = \log(2-x)$ e $g(x) = \log(x)(x^3-3x+2)$.

(11.23) Esercizio Sia data la funzione $g(x) = \lambda \sqrt{x^3+2x^2} + (1-\lambda) \tan(\sqrt{x}) \sqrt{\sin(x)}$. Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

(11.24) Esercizio Calcolare, se esistono i seguenti limiti o i limiti destro e sinistro:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x-1|-|x+1|} & [-1/2]; & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|} & [-1/4]; \\ \lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{1/3}-4}{x^{1/2}-8} & [16]; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x-2}}{\sqrt[3]{7+x-2}} & [3]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{|x|} & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-1/x} & [no]; \\ \lim_{x \rightarrow 4} [x] \cdot (x - [x]) & [no]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2} & [1/2]; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} & [no]; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x-1}{1-x-\log(x)} & [-1/2]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{1+x^4}} - |x|\sqrt{2} \right) & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(1/x)} & [no]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{1/x} & [no]; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{e^{a/x}-e^{b/x}} & [a/a-b]; \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\cos(x)-1}} & [+\infty]; & \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\tan x)^{\frac{1}{\pi-x}} & [+\infty]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x^3-x^2)} - x & [-1/3]; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \sin \frac{1}{x}\right)^x & [e^2]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} & [1/8]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(\cos x)}{x \sin x} & [1]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\tan^2(x/2)} & [6]; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x & [1]. \end{array}$$

(11.25) Esercizio Dimostrare che il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \cos(x^2)$$

non esiste, determinando due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \rightarrow +\infty$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n).$$

(11.26) Esercizio Determinare una funzione reale $f(x)$ con le seguenti caratteristiche:

1. dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
2. la retta $x = -1$ come suo unico asintoto verticale;
3. la retta $y = 0$ come suo unico asintoto orizzontale;
4. interseca l'asse delle ordinate in $(0; 1)$.

(11.27) Esercizio *Mostrare che con le usuali tecniche non è possibile determinare il seguente limite:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\log(1 + x^2)}$$

(11.28) Esercizio *Discutere al variare di a il risultato del seguente limite:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^a - \log x}{\sqrt{x} + x^{2a}}.$$

(11.29) Esercizio *Scrivere una funzione reale $f(x)$ che abbia le seguenti caratteristiche:*

1. Ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
2. interseca l'asse delle ordinate in $(0; -1)$;
3. è un infinitesimo per $x \rightarrow \infty$;
4. non interseca l'asse delle x ;
5. è un infinito per $x \rightarrow 1$;
6. è negativa per $x < 1$, positiva per $x > 1$.

(11.30) Esercizio *Dire se esistono soluzioni delle seguenti equazioni:*

1. $\ln x + x = 0$;
2. $e^x = x + 3$;
3. $\tan x = x^2 + 1$;
4. $x^6 + x - 3 = 0$ nell'intervallo $[0, 2]$.

(11.31) Esercizio *Studiare la continuità delle seguenti funzioni:*

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 3, \\ 2x, & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}};$$

$$3. f(x) = \frac{|\cos(x)|}{\cos(x)}.$$

(11.32) Esercizio Qual è l'unica risposta esatta?

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Allora:

1. f assume il valore -3 ;
2. f assume tutti i valori compresi tra -2 e 2 ;
3. f assume il valore 1 ;
4. f assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e 0 .

(11.33) Esercizio Calcolare

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) \cos(n), \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} 2(-1)^n \sin(n),$$

(11.34) Esercizio Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Su $[0, 1]$ f è uniformemente continua? è Lipschitziana? è derivabile? e su $(0, 1)$? e su $[1, \infty)$?

(11.35) Esercizio Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $x^2(1 - x^2)^2 = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. $[2, 4, 6, 3, 0]$ a seconda del valore di α .

(11.36) Soluzione esercizio (11.30). Applicare il teorema di esistenza degli zeri negli intervalli:

1. $[\frac{1}{3}, 2]$;
2. $[0, 3]$;
3. $[0, \frac{49\pi}{100}]$;
4. $[0, 2]$.

(11.37) Esercizio Determinare la somma delle seguenti serie o mostrare che la serie diverge:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1};$

4. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2n}};$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}};$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}};$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{n-3}};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}};$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi)^{n/2} \cos(n\pi).$

(11.38) Esercizio *Determinare la somma delle seguenti serie telescopiche:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+2)};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

(11.39) Esercizio *Una palla elastica lasciata cadere rimbalza in alto fino a un'altezza pari a $3/4$ dell'altezza iniziale. Se la palla è lasciata cadere da un'altezza di 2 metri e poi continua a rimbalzare indefinitamente, qual è la distanza totale percorsa dalla palla di fermarsi?*

(11.40) Esercizio *Determinare il carattere delle seguenti serie:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^2(2n)!};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^{1/n})}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^{n^2} \cos \frac{1}{n}$.

(11.41) Esercizio Determinare il carattere delle seguenti serie a termini alterni.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$. [Convergenza assoluta]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+n^2}$. [Convergenza assoluta]
3. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$. [Non converge]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + \ln n}$. [Convergenza assoluta]
5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1) \ln(n+1)}$. [Convergenza semplice]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n)}$. [Convergenza semplice]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(e^{-n})$. [Convergenza assoluta]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$. [Convergenza semplice]

(11.42) Esercizio Determinare l'intero più piccolo n tale che la somma parziale s_n della serie

$$s = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{j}{j^2 + 1}$$

approssimi s con un errore (in valore assoluto) minore o uguale a 10^{-3} .

(11.43) Esercizio Determinare il carattere delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) + (-1)^n + 1/n}{n^2 + \log n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n) \log(1 + (\sin(1/n))^{1/3})}{n^{2/3} (\log n)^2 + \sqrt{n}}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + \sqrt{\log n}}{n+5}\right)^n$;

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n - \log(\log n)}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + e^{1/n} - 2e^{1/2n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \log \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2} \right)$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{\sqrt{n} + \log n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/\sqrt{n}} - 1) \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

(11.44) Esercizio Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{a^2 - a + 3}{4a^2 - 1} \right)^n.$$

(11.45) Esercizio Determinare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n.$$

(11.46) Esercizio Sia $a_1 = 1/10$ e si consideri la successione definita per ricorsione come segue:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 + a_n}.$$

Provare che:

1. $a_n \in (0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $\{a_n\}$ è crescente;
3. il limite di a_n per $n \rightarrow +\infty$ vale 1.

Infine determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n).$$

(11.47) Esercizio *Determinare per quali a converge la seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + \sin n) \left(\frac{1}{n^a} - \sin \frac{1}{n^a} \right).$$

(11.48) Esercizio *Determinare per quali a converge la seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n^a}.$$

(11.49) Esercizio *Sia assegnata la seguente funzione:*

$$f(x) = x - \arctan x;$$

allora:

1. *mostrare che $f(x) \geq 0$ quando $x \geq 0$;*
2. *scrivere lo sviluppo asintotico di $f(x)$ in un intorno di $x = 0$ fino al terzo ordine.*

Infine determinare al variare di a il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right).$$

(11.50) Soluzione esercizio (11.42). *Dato che la serie s verifica il criterio di Leibniz, allora vale la stima dell'errore*

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1}.$$

Basta pertanto scegliere il più piccolo n tale che

$$\frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \leq 10^{-3}.$$