Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 8 luglio 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ dello spazio vettoriale V, questo è linearmente dipendente se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Si dimostri poi, dopo aver dato la definizione di base di uno spazio vettoriale finitamente generato, che ogni insieme linearmente indipendente è sottoinsieme di una base.

T2) Date le definizioni di autovalore e autovettore di una matrice, calcolare i possibili autovalori di una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} = -3\mathbf{I}$.

Si trovi un esempio di una matrice con queste proprietà e che abbia due autovalori distinti.

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2\alpha-2 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ 1 & 2 & -1 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2 & \alpha^2+4\alpha & \alpha^2+3 \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 1 & \alpha^3+2\alpha & \alpha^3 \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione P^TLU. Per ogni valore di α determinare una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-4 & \beta & 2-\beta & 0 \\ 3-3\beta & 0 & \beta & 0 \\ 5\beta-9 & 2\beta-4 & 6-3\beta & 2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

E4) Si consideri la conica di equazione $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 12\sqrt{2}\,x + 60\sqrt{2}\,y + \alpha = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 72$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Università degli studi di Verona
Corso di laurea in Matematica Applicata
Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 15 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

T1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che, dato un insieme di vettori linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per ogni k, con $1 \leq k \leq n$,

$$\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $\mathbf{D}$ la matrice di una conica non degenere. Si dia la definizione di polarità rispetto a questa conica e si dimostri che essa è una biiezione fra l'insieme dei punti del piano proiettivo e l'insieme delle rette del piano proiettivo.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\beta^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4\beta & 0 & 4\beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si calcolino una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

Si dica per quali valori di β la matrice $\mathbf{B}_\beta$ è unitariamente diagonalizzabile.

E4) Si consideri la conica di equazione $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - \alpha y = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = -1$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Università degli studi di Verona

Corso di laurea in Matematica Applicata

Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 15 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

Seconda prova parziale

T1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che, dato un insieme di vettori linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per ogni k, con $1 \le k \le n$,

$$\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $\mathbf{D}$ la matrice di una conica non degenere. Si dia la definizione di polarità rispetto a questa conica e si dimostri che essa è una biiezione fra l'insieme dei punti del piano proiettivo e l'insieme delle rette del piano proiettivo.

E1) Si consideri la conica di equazione $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - \alpha y = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = -1$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

E2) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se ne scriva la decomposizione spettrale, cioè la si scriva come $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$ dove λ_i sono scalari e $\mathbf{P}_i$ sono matrici di proiezione. È possibile trovare una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$? Se sì, calcolarla.

Università degli studi di Verona
Corso di laurea in Matematica Applicata
Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 22 giugno 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

T1) Si dimostri che una matrice è normale se e solo se è unitariamente diagonalizzabile (si dia per noto il teorema di Schur che va solo enunciato).

T2) Si dimostri che, data una matrice simmetrica reale $\mathbf{D}$, il luogo dei punti $\hat{\mathbf{x}}$ del piano proiettivo tali che $\mathbf{x}^T D\mathbf{x} = 0$ contiene una retta se e solo se $\mathbf{D}$ non è invertibile.

E1) Sia α un parametro reale; si consideri la matrice

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & \alpha^2+2 & \alpha^2-1 \\ 2 & -1 & 2\alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 2\alpha-1 & 1+\alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice ammette una decomposizione LU e la si scriva.
(b) Per i valori esclusi in precedenza, si determini una decomposizione P^TLU.
(c) Si dica per quali valori di α la matrice $\mathbf{C}_\alpha$ ammette inversa destra o inversa sinistra.
(d) Si interpreti $\mathbf{C}_\alpha$ come matrice aumentata $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ di un sistema lineare. Si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzioni (e con quanti parametri liberi).

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si consideri la matrice complessa ($\beta \in \mathbf{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta-1 & -1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile? Per uno di tali valori, determinare una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

E4) Si consideri la conica di equazione $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 2x + 2\alpha y - 1 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 2$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Università degli studi di Verona
Corso di laurea in Matematica Applicata
Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 22 giugno 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

Seconda prova parziale

T1) Si dimostri che una matrice è normale se e solo se è unitariamente diagonalizzabile (si dia per noto il teorema di Schur che va solo enunciato).

T2) Si dimostri che, data una matrice simmetrica reale $\mathbf{D}$, il luogo dei punti $\hat{\mathbf{x}}$ del piano proiettivo tali che $\mathbf{x}^T D\mathbf{x} = 0$ contiene una retta se e solo se $\mathbf{D}$ non è invertibile.

E1) Si consideri la conica di equazione $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 2x + 2\alpha y - 1 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 2$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

E2) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

se ne scriva la decomposizione spettrale, cioè la si scriva come $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$ dove λ_i sono scalari e $\mathbf{P}_i$ sono matrici di proiezione. È possibile trovare una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$? Se sì, calcolarla.

Università degli studi di Verona
Corso di laurea in Matematica Applicata
Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 24 gennaio 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

T1) Si dimostri che una matrice è normale se e solo se è unitariamente diagonalizzabile (si dia per noto il teorema di Schur che va solo enunciato).

T2) Si dimostri che, data una matrice simmetrica reale $\mathbf{D}$, il luogo dei punti $\hat{\mathbf{x}}$ del piano proiettivo tali che $\mathbf{x}^T D\mathbf{x} = 0$ contiene una retta se e solo se $\mathbf{D}$ non è invertibile.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2\alpha & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \alpha & 2 & 3 \\ -1 & 2 & \alpha & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3,$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 1 \\ \beta & 0 & -3\beta \\ 0 & -1\beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 0$, si calcolino una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$ e una matrice $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{S}$ sia diagonale.

Si dica per quali valori di β la matrice $\mathbf{B}_\beta$ è unitariamente diagonalizzabile.

E4) Si consideri la conica di equazione $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x - 2\alpha y = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 1$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Università degli studi di Verona
Corso di laurea in Matematica Applicata
Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 24 gennaio 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

Seconda prova parziale

T1) Si dimostri che una matrice è normale se e solo se è unitariamente diagonalizzabile (si dia per noto il teorema di Schur che va solo enunciato).

T2) Si dimostri che, data una matrice simmetrica reale $\mathbf{D}$, il luogo dei punti $\hat{\mathbf{x}}$ del piano proiettivo tali che $\mathbf{x}^T D\mathbf{x} = 0$ contiene una retta se e solo se $\mathbf{D}$ non è invertibile.

E1) Si consideri la conica di equazione $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x - 2\alpha y = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 1$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

E2) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

se ne scriva la decomposizione spettrale, cioè la si scriva come $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$ dove λ_i sono scalari e $\mathbf{P}_i$ sono matrici di proiezione. È possibile trovare una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$? Se sì, calcolarla.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 29 settembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ dello spazio vettoriale V, questo è linearmente indipendente se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri.

Si dimostri poi, dopo aver dato la definizione di base di uno spazio vettoriale finitamente generato, che ogni insieme di generatori contiene una base.

T2) Date le definizioni di autovalore e autovettore di una matrice, calcolare i possibili autovalori di una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} = -6\mathbf{I}$.

Si trovi un esempio di una matrice non diagonele con queste proprietà e che abbia due autovalori distinti.

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2\alpha-2 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ 1 & 2 & -1 & -\alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 1 & \alpha^3+2\alpha & \alpha^3 \\ \alpha & 2\alpha & 2 & \alpha^2+4\alpha & \alpha^2+3 \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Per ogni valore di α determinare una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$.

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-3 & \beta+1 & 1-\beta & 0 \\ -3\beta & 0 & \beta+1 & 0 \\ 5\beta-4 & 2\beta-2 & 3-3\beta & 2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

E4) Si consideri la conica di equazione $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 12\sqrt{2}\,x + 60\sqrt{2}\,y + \alpha = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 72$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 8 luglio 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato una insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dello spazio V con prodotto scalare $(\cdot \mid \cdot)$, esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di V tale che, per $1 \le k \le n$, si abbia

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Si dia la definizione di molteplicità algebrica $m(\lambda)$ e geometrica $d(\lambda)$ dell'autovalore λ di una matrice A; si dimostri che $1 \le d(\lambda) \le m(\lambda)$.

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 3 & 0 & -1 & 3 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Per ogni valore di α determinare una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 4-\beta & 2 & 0 & 4-2\beta \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ -2+\beta & -1 & 0 & -2+2\beta \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

E4) Si consideri la conica di equazione $12x^2 + 12xy + 3y^2 + 6x + 2\alpha y - 1 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 2$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Università degli studi di Verona
Corso di laurea in Matematica Applicata
Prova scritta di Algebra lineare con elementi di geometria — 22 giugno 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	E3
	T2	E2	E4

Seconda prova parziale

T1) Si dimostri che una matrice è normale se e solo se è unitariamente diagonalizzabile (si dia per noto il teorema di Schur che va solo enunciato).

T2) Si dimostri che, data una matrice simmetrica reale $\mathbf{D}$, il luogo dei punti $\hat{\mathbf{x}}$ del piano proiettivo tali che $\mathbf{x}^T D\mathbf{x} = 0$ contiene una retta se e solo se $\mathbf{D}$ non è invertibile.

E1) Si consideri la conica di equazione $12x^2 + 12xy + 3y^2 + 6x + 2\alpha y - 1 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 2$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

E2) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

se ne scriva la decomposizione spettrale, cioè la si scriva come $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$ dove λ_i sono scalari e $\mathbf{P}_i$ sono matrici di proiezione. È possibile trovare una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$? Se sì, calcolarla.