3. IL CONCETTO DI FUNZIONE.

E' esperienza comune osservare come le grandezze di un certo tipo assumano vari valori ciascuno determinato univocamente in corrispondenza dei valori assunti da grandezze di altro tipo. Si usa dire che una grandezza varia, in modo univocamente precisato, al variare di un'altra. Cosi' la temperatura assume vari valori ciascuno in corrispondenza di un valore assunto dal tempo e ciascun valore della temperatura è univocamente determinato dal momento fissato nel tempo. Analogamente, la pressione dell'aria varia al variare dell'altezza sul mare, la pressione di un gas racchiuso entro un recipiente varia con la sua temperatura, il prezzo di un bene di consumo al variare della domanda e dell'offerta.

Da un punto di vista matematico non interessa il motivo per cui una quantita' di un certo tipo assume vari valori in funzione dei valori assunti da una di altro tipo, o di altre, ma piuttosto si vuole registrare con precisione l'andamento degli accoppiamenti dei vari valori assunti. Cosi' se in un certo posto alle ore 0 del primo gennaio 2001 c'erano 15 gradi centigradi e alle ore 2 ce n'erano 14, e alle 4 ce n'erano 13, e alle 6 ancora 13, e alle 8 15, e alle 10 non e' stata rilevata la temperatura, e alle 12 c'erano 19 gradi, dal punto di vista delle grandezze coinvolte non interessa sapere come mai ad una certa ora c'era quella temperatura, se pioveva o se soffiava il vento, ma si vuole sapere qual'e' la temperatura accoppiata ad una certa ora, si vogliono cioe' conoscere le coppie ordinate che indichino, in corrispondenza alle varie ore, qual'era la temperatura in quel momento. L'insieme di coppie ordinate $\{(0,15), (2,14), (4,13), (6,13), (8,15), (12,19)\}$ riporta esaurientemente tutte le informazioni che abbiamo sul solo andamento della temperatura in quel posto in funzione dello scorrere del tempo.

Diciamo <u>variabile</u> un nome per una quantità di un certo tipo; questo nome non indica un ente, ma può essere interpretato in modi diversi, in genere all'interno di un certo ambito. Questo modo di indicare enti è usato spesso nel linguaggio naturale quando, ad esempio, si usano le parole qualcuno, quello, un amico, ecc.: queste parole non vanno interpretate sempre nello stesso modo (come ad esempio la parola Italia), ma assumono un significato diverso da contesto a contesto. Si useranno opportuni simboli per indicare le variabili.

Chiamiamo <u>variabile dipendente</u> il nome della quantita' di un certo tipo che consideriamo assumere vari valori ciascuno univocamente determinato in corrispondenza di almeno uno tra i vari valori che può assumere una quantità di un altro tipo, e <u>variabile indipendente</u> il nome della quantita'dell'altro tipo. Cosi' nel nostro primo esempio temperatura e' la variabile dipendente e tempo è la variabile indipendente. La scelta di quale sia la quantita' indipendente e quale quella dipendente si basa in larga misura sul punto di vista in cui ci si vuol porre.

Forse e' opportuna una precisazione sull'uso del verbo variare. Ovviamente non si intende che un certo valore possa variare: una certa ora e' quella, una certa temperatura e' quella, una certa lunghezza e' quella, un certo numero e' quello. Quello che si vuol dire e' che si considerano dei valori (ad esempio momenti, temperature, lunghezze, numeri) e si passa dalla considerazione di un valore alla considerazione di un altro nello stesso ambito. Per far cio' si è appunto introdotto un nome per individuo di cui non si fissa, pero', l'interpretazione, ma che puo' essere interpretato ora in un elemento in un ambito ora in un altro elemento nello stesso ambito. Un tale nome per individuo è stato chiamato variabile. Cosi', lo si ribadisce, una variabile e' un nome per individuo dalla interpretazione non prefissata, ma cambiante di volta in volta pur riferendosi ad un qualsiasi elemento di un certo ambito.

Nelle coppie ordinate, che rappresentano le nostre conoscenze sul solo andamento del fenomeno in considerazione, metteremo sempre come primo elemento un valore della quantita' indipendente e come secondo elemento il corrispondente valore della quantita' dipendente, se ci sono.

Si noti che fissato un valore della quantita' indipendente e' al piu' uno il valore della quantita' dipendente corrispondente, perché si è detto che questo deve essere univocamente determinato dal valore a cui corrisponde. Questa richiesta sul concetto di funzione dopende dal fatto che con esso si vogliono rappresentare situazioni come quelle illustrate e in una certa situazione le cose stanno in un certo modo e non altrimenti. Puo' capitare, come nel primo esempio, che a diversi valori della quantita' indipendente corrisponda lo stesso valore della quantita' dipendente (in varie situazioni le cose stanno nello stesso modo).

Cosi' per descrivere i fenomeni del tipo esemplificato, e' opportuno disporre di insiemi di coppie ordinate con l'ulteriore proprieta', appena osservata, che dato il primo elemento di una coppia ordinata è al più uno il secondo elemento della coppia ordinata tale che questa appartenga all'insieme. Si cogliera' questo modo di descrivere attraverso il concetto di funzione.

Chiamiamo funzione un insieme di coppie ordinate che goda della seguente proprieta': se due coppie ordinate dell'insieme hanno lo stesso primo elemento allora hanno anche lo stesso secondo elemento, cioe' coincidono, sono la stessa. La stessa proprieta', che e' detta univocita', puo' essere enunciata altrimenti cosi': non possono appartenere alla stessa funzione due coppie ordinate che abbiano lo stesso primo elemento e diversi secondi elementi. In forma sintetica, una funzione F e' un insieme di coppie ordinate tale che se $(a,b)\in F$ e $(a,c)\in F$ allora b=c, o anche se $(a,b)\in F$ e $(x,y)\in F$ e $b\neq y$ allora anche $a\neq x$.

Notiamo subito che una funzione e' una relazione che gode della proprieta' della univocita'.

Cosi' l'insieme {(0,15),(2,14),(4,13),(6,13),(8,15),(12,19)} visto prima e' una funzione.

Mediante una funzione intendiamo rappresentare le nostre informazioni sul legame esistente tra il variare di una quantita' in funzione del variare di un'altra quantita', indipendentemente dal motivo per cui sono legate.

Data una funzione F, se la coppia ordinata $(a,b)\in F$ allora diremo anche che b corrisponde ad a attraverso la funzione F, ed anche scriveremo che $F(a)=b$, che si legge F di a uguale a b. b e' anche detto l'immagine di a attraverso F. Si dice anche che b si ottiene applicando la funzione F ad a, oppure che b e' il valore in cui va interpretata la variabile (piu' brevemente, il valore della variabile) dipendente corrispondente al valore a in cui e' interpretata la variabile (piu' brevemente, il valore dato alla variabile) indipendente, o anche, ancor piu' brevemente, che b e' il valore della funzione in a. Si usa anche la notazione F: $a \mapsto b$ che si legge F manda a in b.

Cosi', con riferimento all'esempio iniziale, se indichiamo con F la funzione, possiamo dire che 14 (la temperatura di 14 gradi) corrisponde a 2 (alle ore 2) nella funzione F, e scriveremo anche F(2)=14 poiche' la coppia ordinata $(2,14)\in F$. Possiamo anche dire che 14 e' l'immagine di 2 attraverso la funzione F, o che 14 si ottiene applicando la funzione F a 2, o che 14 e' il valore della variabile dipendente corrispondenete al valore 2 della variabile indipendente, o che 14 e' il valore della funzione in 2, o che la funzione F manda 2 in 14.

Per indicare una funzione F useremo la sua notazione naturale come insieme di coppie ordinate che soddisfano una certa proprieta' P, cioe' $F=\{(a,b): (a,b) \text{ soddisfa } P\}$.

Quando la propriata' P indica quali sono le coppie ordinate (a,b) che appartengono alla funzione prescrivendo come ottenere b dall'a a cui corrisponde attraverso opportuni calcoli, sfrutteremo questa presentazione per una notazione del tipo seguente: $F(a)=$ seguito dai calcoli che si devono fare per ottenere il valore di b corrispondente ad a, e concludiamo scrivendo eventuali limitazioni sui valori che possono assumere o a o b. Ad esempio, se la variabile indipendente e' un numero reale compreso tra 1 e 2 e se il valore b della variabile dipendente si ottiene dal valore a della variabile indipendente a cui b corrisponde moltiplicando questo valore a per 5 e poi aggiungendo 9, per indicare l'insieme delle coppie ordinate appartenenti alla funzione F ora descritta possiamo scrivere cosi': $F=\{(a,b): b=5a+9 \text{ e } 1<a<2\}$, ma, usando la notazione ora introdotta potremmo anche indicare la funzione F descritta cosi: $F(a)=5a+9$ e $1<a<2$. Con questa notazione e' semplice indicare l'immagine di un certo numero: basta sostuire il numero alla indicazione della variabile indipendente. Cosi' nel nostro esempio per trovare, ad esempio, l'immagine di 3/2 basta sostituire 3/2 ad a e calcolare $5\times(3/2)+9$ che e' uguale a 33/2. Per indicare la sostituzione eseguita di 3/2 al posto di a nella funzione F, conveniamo di usare anche la notazione F(3/2). Cosi', nel nostro caso, F(3/2) indichera' proprio $5\times(3/2)+9$.

Un'altra notazione e' simile a quella appena vista mettendo al posto di $F(a)=$ il simbolo della variabile dipendente e poi =. Riprendendo l'esempio precedente, quella stessa funzione potra' essere indicata cosi': $b=5a+9$ e $1<a<2$, dove b e' variabile dipendente.

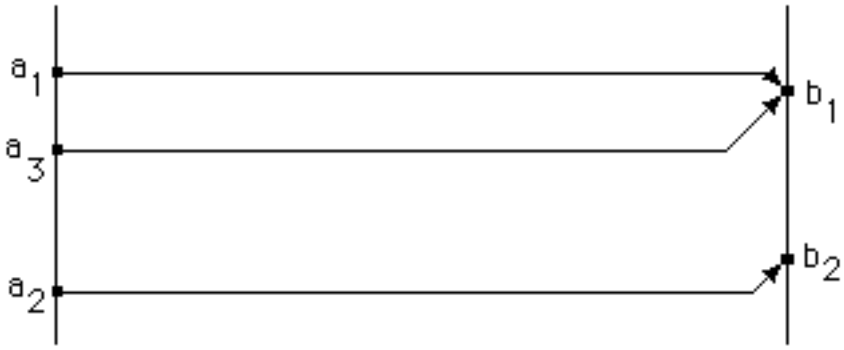
Una ulteriore notazione per una tale funzione e' la seguente: si scrive il simbolo della variabile indipendente, ad esempio a, seguito dal segno $\mapsto$ e poi dai calcoli che si devono fare per ottenere il valore della variabile dipendente a partire da a, e si conclude scrivendo le eventuali limitazioni sui valori che possono assumere le variabili. Ripetendo ancora una volta l'esempio gia' visto, con questa notazione scriveremo cosi':

$a \mapsto 5a+9$ e $1<a<2$.

Ecco un altro esempio.
Supponiamo che ci sia una strada lunga 2 chilometri che parte a livello 0 e poi sale con pendenza costante. Supponiamo anche che il dislivello tra due punti della strada lontani tra loro una unita' di lunghezza sia 1/5 di di tale unita'. Chiaramente l'altezza di un punto lungo la strada dipende dalla distanza dall'inizio della strada. Il nome (ad esempio y) da dare all'altezza di un punto lungo la strada puo' essere preso come la variabile (nome di un elemento dell'insieme delle possibili altezze, nome la cui interpretazione va precisata di volta in volta) dipendente, mentre il nome (ad esempio x) da dare alla distanza lungo la strada dal suo inizio puo' essere presa come la variabile indipendente. Dopo aver percorso un tratto x di strada, l'altezza della strada in quel punto sara' x/5, e pertanto il legame tra la variabile indipendente x e la variabile dipendente y e' espresso dalla funzione
$F=\{(x,y): y=x/5 \text{ e } 0\leq x\leq 2\}$.
Questa funzione si puo' anche indicare cosi': $F(x)=x/5$ e $0\leq x\leq 2$, oppure cosi': $y=x/5$ e $0\leq x\leq 2$, oppure ancora in questo modo: $x \mapsto x/5$ e $0\leq x\leq 2$.
Un ulteriore esempio di funzione puo' essere il seguente: consideriamo l'insieme di tutte le coppie ordinate che hanno come primo elemento uno studente in una certa aula e come secondo elemento la sedia di quell'aula su cui e' seduto lo studente. Questo insieme di coppie ordinate rispetta la condizione per poter essere considerato una funzione perche' ogni studente sta seduto su un'unica sedia. Per variabile indipendente possiamo prendere un nome che indica di volta in volta quale studente della classe si sta considerando, mentre un nome che indica di volta in volta quale sedia della classe e' occupata da quello studente puo' essere considerata la variabile dipendente.

Poiche' una funzione e' una relazione, anche in questo caso un insieme che contiene i primi elementi delle coppie ordinate di una funzione e' detto <u>primo insieme</u> della funzione, mentre un insieme che contiene i secondi elementi delle coppie ordinate che appartengono ad una funzione e' detto <u>secondo insieme</u> della funzione. Nell'esempio precedente, l'insieme degli studenti di quell'aula puo' essere considerato come primo insieme della funzione F, e l'insieme delle sedie di quell'aula puo' essere considerato come secondo insieme della funzione F. Si noti che in ogni caso una funzione e' un sottinsieme del prodotto cartesiano del suo primo insieme per il suo secondo insieme.
Notiamo che il primo insieme e il secondo insieme di una funzione non sono individuati dalla funzione stessa e possono essere scelti ad arbitrio purche' il primo insieme abbia tra i suoi elementi i primi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla funzione, e il secondo insieme abbia tra i suoi elementi i secondi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla funzione. Essi aggiungono altre informazioni oltre quelle fornite dalla funzione indicando l'ambito in cui si vuole considerare la funzione.
Come per le relazioni, per indicare la scelta del primo insieme e del secondo insieme, oltre alla scelta della funzione, si considera la terna ordinata il cui primo elemento e' il primo insieme, il secondo elemento e' il secondo insieme, e il terzo elemento e' la funzione. Se A e' il primo insieme scelto e B il secondo insieme scelto e F indica la funzione, allora la terna ordinata che raccoglie queste informazioni e' (A,B,F), e si usa dire che F e' una <u>funzione da</u> A <u>in</u> B, e si scrive anche $F:A\to B$. Si noti la differenza tra il concetto di *funzione* (un insieme di coppie ordinate) e il concetto di *funzione da un insieme ad un altro* (una terna ordinata il cui primo elemento e' un insieme, il secondo elemento e' un insieme, e il terzo elemento e' una funzione).
Le nozioni di primo e secondo insieme sono legate alle nozioni di variabile indipendente e di variabile dipendente: in genere si scelgono il primo ed il secondo insieme in modo che i valori che si possono attribuire alla (cioe' i valori in cui si puo' interpretare la) variabile indipendente siano elementi del primo insieme, mentre i valori che si possono attribuire alla variabile dipendente siano elementi del secondo insieme.

Se il primo insieme di una funzione puo' essere rappresentato mediante un insieme di punti, non necessariamente tutti, di un segmento, e, analogamente, il secondo insieme puo' essere rappresentato con un insieme di punti di un altro segmento, allora per rappresentare la funzione possiamo usare un disegno in cui si indicano alcune delle coppie ordinate appartenenti alla funzione mediante delle freccie che collegano il primo elemento della coppia al secondo. Se l'insieme di coppie ordinate e' una funzione non ci possono essere due freccie diverse che partono dallo stesso punto; ma possono esserci freccie diverse che arrivano nello stesso punto. Cosi il seguente disegno



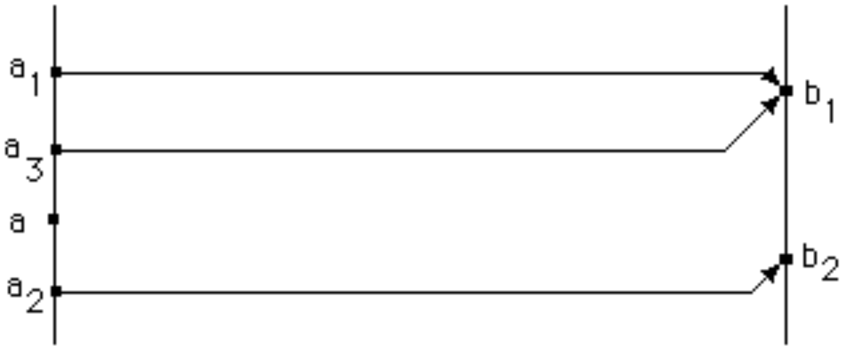
indica che le coppie ordinate (a_1,b_1), (a_2,b_2) e (a_3,b_1) sono alcune delle coppie ordinate, non necessariamente tutte, che appartengono alla funzione che si vuole rappresentare. Si noti che, se le coppie indicate appartengono alla funzione, allora sicuramente la coppia ordinata (a_2,b_1) non puo' appartenere alla funzione e pertanto la freccia che va da a_2 a b_1 non dovra' essere disegnata nella rappresentazione.

Come per le relazioni, dicesi <u>dominio</u> di una funzione l'insieme costituito da tutti gli elementi che hanno corrispondente nella funzione: cioe' il dominio della funzione F, che si indica con dom(F), e' {x: esiste y tale che (x,y)$\in$F}. Con altra notazione si puo' dire la stessa cosa cosi': dom(F) = {x: esiste y tale che F(x)=y}. Comunque venga scelto un primo insieme per la funzione, il dominio e' un sottinsieme del primo insieme della funzione. Il concetto di dominio si puo' esprimere anche dicendo che il dominio e' il sottinsieme degli elementi del primo insieme della funzione che hanno immagine.

Nell'esempio precedente il dominio e' l'insieme degli studenti di quella classe che sono seduti, mentre quelli che stanno in piedi non appartengono al dominio.

Se l'insieme D e' il dominio di una funzione F e l'insieme B e' un secondo insieme di F, allora si dice che F manda D in B e si scrive F:D$\rightarrow$B.

Se la funzione e' rappresentabile graficamente come e' stato fatto precedentemente, allora per in-



dicare che un elemento del primo insieme non appartiene al dominio potremmo evidenziare quell'elemento senza far partire da esso alcuna freccia, come e' indicato nella figura in cui si suppone che l'elemento a del primo insieme non appartenga al dominio.

Come per le relazioni, se F e' una funzione da A in B e il dominio D della funzione F e' uguale all'insieme A, allora diciamo che la funzione F e' <u>totale in</u> A, o, piu' semplicemente, che la funzione F e' totale se e' chiaro dal contesto qual'e' l'insieme A. Notiamo che la totalita' stabilisce un legame tra la funzione ed un suo primo insieme e non si riferisce esclusivamente alla funzione.

Nell'esempi precedente della funzione che agli studenti associa le sedie su cui sono seduti, se l'insieme A e' l'insieme degli studenti in un'aula, e tutti gli studenti di quell'aula sono seduti allora il dominio coincide con l'insieme A e la funzione e' totale in quell'insieme A.

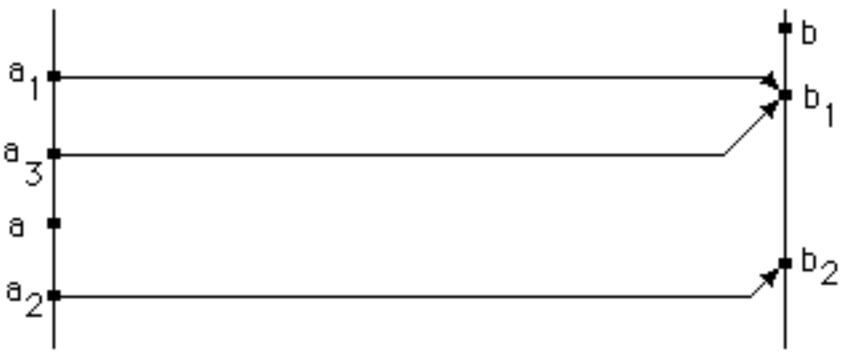
Abbiamo chiamato immagine di un elemento a del dominio di una funzione F da A in B l'elemento b di B che corrisponde ad a, cioe' b=F(a). Ora, con un abuso di linguaggio, estendiamo un po' questo concetto di immagine. Se C e' un sottinsieme di A, chiameremo immagine di C, che indicheremo con la scrittura F(C), l'insieme delle immagini degli elementi di C, cioe' l'immagine di C, F(C), e' $\{y$: esiste x tale che $(x,y)\in F$ e $x\in C\}$. Si noti che, se b corrisponde ad a nella funzione, allora l'immagine di a e' b, mentre l'immagine di $\{a\}$ e' $\{b\}$.

Data una funzione F chiameremo controimmagine di un insieme S attraverso la funzione F il sottinsieme del dominio di F costituito da tutti gli elementi la cui immagine appartiene a S: cioe' la controimmagine di S attraverso F e' $\{x$: esiste b tale che $(x,b)\in F$ e $b\in S\}$. Indicheremo la controimmagine di S attraverso F con la notazione $F^{-1}(S)$.

Se l'insieme S ha un solo elemento b, con un abuso di linguaggio, usiamo chiamare controimmagine di b quella che piu' propriamente dovrebbe essere chiamata la controimmagine di $\{b\}$, indicandola come $F^{-1}(b)$ invece che come $F^{-1}(\{b\})$. Se poi anche la controimmagine di un elemento b di B e' costituita da un solo elemento, si usa chiamare controimmagine di b quell'elemento e non l'insieme a cui quel solo elemento appartiene, con un altro evidente abuso di linguaggio.

Come per le relazioni, dicesi codominio di una funzione l'insieme costituito da tutti gli elementi che corrispondono a qualcosa nella funzione, ovvero che sono immagine di qualche elemento nella funzione, ovvero la cui controimmagine non e' vuota, cioe' il codominio della funzione F, che si indica con cod(F), e' l'insieme $\{y$: esiste x tale che $(x,y)\in F\}$. Si noti che il codominio e' l'immagine del dominio, e che il dominio e' la controimmagine del codominio. Nell'esempio precedente degli studenti e delle sedie, il codominio e'costituito dall'insieme delle sedie occupate da studenti, mentre le sedie libere non appartengono al codominio. Comunque venga scelto un secondo insieme per la funzione, il codominio e' un sottinsieme del secondo inseime della funzione.

Se la funzione e' rappresentabile graficamente come e' stato fatto precedentemente, allora per indicare che un elemento del secondo insieme non appartiene al codominio potremmo evidenziare quell'elemen-to senza farvi arrivare alcuna freccia, come è indicato nella figura in cui si suppone



che l'elemento b del secondo insieme non appartenga al codominio.

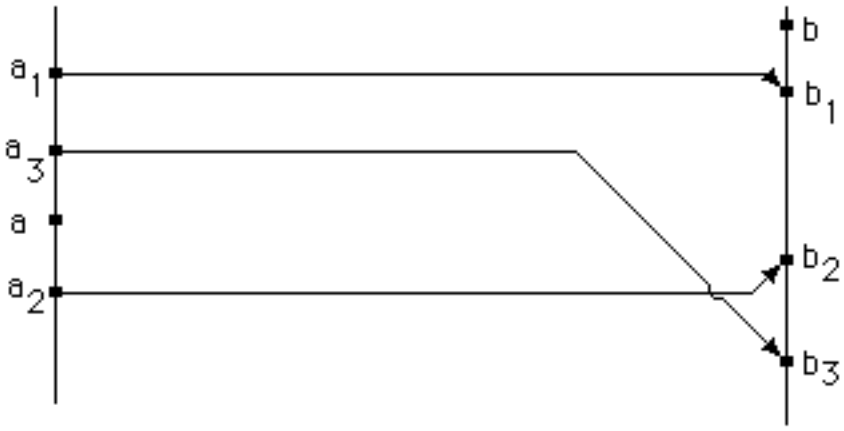
Se F e' una funzione da A in B e il codominio C della funzione F e' uguale all'insime B, allora diciamo che la funzione F e' suriettiva su B, o, piu' semplicemente, che la funzione F e' suriettiva se e' chiaro dal contesto qual'e' l'insieme B. Notiamo che la suriettivita' stabilisce un legame tra la funzione ed un suo secondo insieme e non si riferisce esclusivamente alla funzione.

Continuando ad usare l'esempio precedente, se l'insieme B delle sedie di un'aula e' il secondo insieme della funzione, e in quell'aula tutte le sedie sono occupate da studenti, allora il codominio coincide con l'insieme B e la funzione e' suriettiva su B.

Abbiamo visto fin dall'inizio che, mentre e' al piu' uno il valore della variabile dipente corrispondente ad un fissato valore della variabile indipendente, piu' valori della variabile indipendente possono avere per immagine lo stesso valore della variabile dipendente. Se invece in una funzione F accade che per ogni valore della variabile dipendente sia al piu' uno il valore della variabile indipendente a cui corrisponde allora diciamo che questa funzione e' 1-1 (o iniettiva). Detto altrimenti, una funzione e' 1-1 se la controimmagine di ogni elemento del codominio ha un solo elemento. Se F e' una funzione, dire che e' iniettiva si puo' esprimere anche dicendo che se sia (x,y) che (x',y) appartengono ad F allora x=x', cioe' se F(x)=F(x') allora x=x'. Si noti che la nozione di iniettivita' riguarda gia' il concetto di funzione e non richiede di considerare funzioni da un insieme ad un altro.

Cosi' continuando con il solito esempio, siccome le sedie dell'aula che consideravamo non possono ospitare piu' di uno studente, e' al piu' uno lo studente seduto su una sedia e la funzione che associa agli studenti la sedia su cui sono seduti sara' 1-1.

Se la funzione e' rappresentabile graficamente come e' stato fatto precedentemente ed essa e' 1-1, allora nella sua rappresentazione non potranno esserci freccie che partendo da elementi distinti arrivino sullo stesso elemento. Questa figura puo' rappresentare una funzione 1-1.



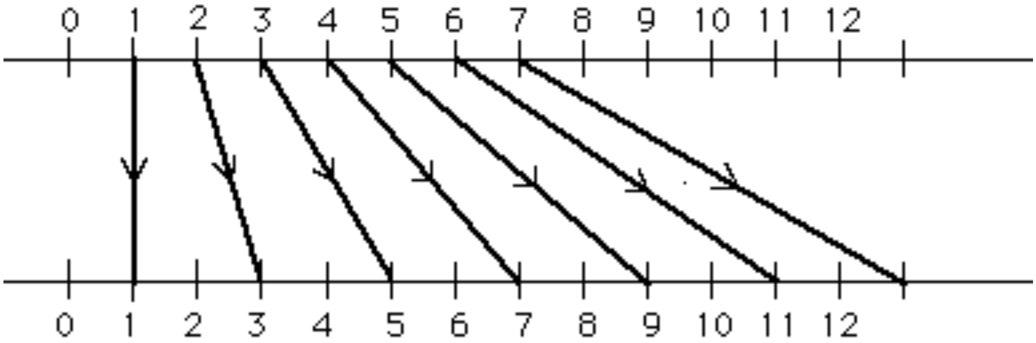
Se una funzione totale da A in B e' sia 1-1 che suriettiva viene detta biu-nivoca 0 biiettiva oppure una corrispondenza biunivoca o biiettiva tra A e B, oppure una biunivocita' o biiettivita' tra A e B. Ovviamente la nozione di biiettivita', coinvolgendo totalita' e suriettivita' si applica solo alle funzioni da un primo insieme ad un secondo insieme.

Con le nozioni introdotte si hanno strumenti adeguati per affrontare alcuni aspetti del problema della numerosita' di un insieme. Per ora non si vuole determinare il numero degli elementi di un insieme, ma semplicemente poter riconoscere l'uguale numerosita' di due insiemi. Per far cio' non e' necessario contare gli elementi di entrambi gli insiemi, ma basta notare che ad ogni elemento di un insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e cosi' facendo si esaurisce il secondo insieme. Di fatto questo e' un metodo spesso usato anche in pratica per contare gli elementi di un insieme senza contarli di fatto ma riferendoli agli elementi di un altro insieme per il quale, eventualmente, il conto era gia' stato fatto. Ad esempio, se si vuol conoscere quante persone ci sono in una sala affollata, a volte e' conveniente contare quante persone sono rimaste in piedi, o quante sedie sono rimaste vuote, e, rispettivamente, aggiungere o sottrarre tale numero dal numero delle sedia nella sala: di fatto si sfrutta la corrispondenza tra il numero di sedie occupate e il numero di persone che le occupano (senza contare questo) affermando implicitamente che i due numeri coincidono. Di piu', se anche non si conoscesse il numero delle sedie nella sala, si potrebbe ugualmente concludere con una indicazione del numero delle persone presenti relativamente al numero delle sedie (sono tante quante le sedie, sono di piu' delle sedie, sono meno delle sedie). Questo esempio illustra in pratica cosa intendiamo quando si afferma che due insiemi hanno ugual numero di elementi. Se tra due insiemi A e B esiste una biunivocita' allora ad ogni elemento di A corrisponde uno ed uno solo elemento di B, e ogni elemento di B e' il corrispondente di uno solo elemento di A. Percio' possiamo dire che gli elementi di un insieme sono tanti quanti gli elementi dell'altro insieme: diremo che i due insiemi sono equinumerosi.

Vediamo su degli esempi di riconoscere le nozioni introdotte.

Sia F la funzione dai numeri reali nei numeri reali (da R in R) che ad un numero reale associa il suo quadrato piu' 1. Cioe' $F=\{(x,y): x\in R, y\in R \text{ e } y=x^2+1\}$, oppure, con altra scrittura, $F(x)=x^2+1$ con $x\in R$. E' corretto chiamare questo insieme di coppie ordinate una funzione perche' per ogni valore della variabile indipendente e' al piu' uno il valore corrispondente della variabile dipendente. Il dominio di F e' l'insieme dei numeri reali perche' per ogni numero reale r esiste un numero reale s tale che $(r,s)\in F$: basta prendere $s=r^2+1$. Poiche' il dominio coincide con il primo insieme la funzione e' totale (in R). Il codominio di F e' l'insieme dei numeri reali maggiori od uguali ad 1 perche' esattamente per gli elementi s di questo insieme esiste un numero reale r tale che $(r,s)\in F$, cioe' tale che $s=r^2+1$. Poiche' il codominio non coincide con il secondo insieme della funzione, F non e' suriettiva. Questa funzione non e' neppure 1-1 perche' non e' vero che per ogni valore y della variabile dipendente c'e' al piu' un valore della variabile indipendente a cui y corrisponde: infatti sia al valore 1 che al valore -1 della variabile indipendente corrisponde il valore 2 della variabile dipendente. Ovviamente questa funzione non e' biunivica perche' non e' sia 1-1 che suriettiva.

Come altro esempio, si consideri la funzione G dall'insieme dei numeri naturali N in se' stesso che ad un numero naturale n associa il numero naturale 2n-1. Cioe' si consideri la funzione $G=\{(n,m): n\in N, m\in N \text{ e } m=2n-1\}$, che si puo' indicare anche cosi' $G(n)=2n-1$ con $n\in N$ e con $2n-1\in N$. E' ancora corretto chiamare l'insieme di coppie ordinate G una funzione perche' fissato un valore per la variabile indipendente e' al piu' uno il corrispondente valore della variabile dipendente. Ma questa funzione non e' totale perche' il valore 0 appartiene al primo insieme ma non al dominio della G perche' non c'e' alcun numero naturale m tale che $(0,m)\in G$ in quanto nessun numero naturale m e' tale che $m=2\times 0-1$. E' facile vedere che il dominio di G e' $N-\{0\}$, e che il codominio di G e' $\{m: m=2n-1 \text{ con } n\in(N-\{0\})\}=\{m: m\in N \text{ e m e' un numero dispari}\}$. Poiche' il codominio non coincide con il secondo insieme, la funzione non e' suriettiva. G e' invece 1-1 perche' fissato un valore m della variabile dipendente (cioe' un valore del secondo insieme) e' al piu' uno il numero naturale n che gli corrisponde, cioe' il numero naturale n tale che $2n-1=m$. Ancora questa funzione non e' biunivoca perche' non e' ne' totale ne' suriettiva. Usando le convenzioni gia' introdotte, potremmo rappresentare questa funzione cosi':



Come ultimo di questi esempi consideriamo la funzione da un insieme A in se' stesso che ad ogni elemento di A associa lo stesso elemento. Questa funzione viene chiamata <u>funzione identica su</u> A ed indicata con id_A. $id_A=\{(a,a): a\in A\}$. Ancora e' corretto affermare che e' una funzione. Si vede facilmente che questa funzione e' totale (in A), suriettiva su A, 1-1 e quindi e' anche una biunivocita' da A su A. Chiaramente A e' equinumeroso ad A. Notiamo che di funzioni identiche ce ne sono tante diverse tra loro: una per ogni insieme A. Infatti, se A e B sono due insiemi diversi, ci sara' un elemento di un insieme che non apparterra' all'altro, chiamiamo e questo elemento e supponiamo che appartenga ad A ma non a B (questa ipotesi non e' restrittiva). Allora $(e,e)\in id_A$ ma $(e,e)\notin id_B$, e dunque le due funzioni id_A e id_B sono diverse perche' non sono lo stesso insieme di coppie ordinate.

Nell'osservare situazioni che variano, capita a volte di considerare situazioni in cui le dipendenze siano piu' complesse. Ad esempio, la pressione di un gas chiuso in un certo recipiente varia al variare della temperatura, e questa varia nel tempo. Evidentemente anche la pressione varia al variare del tempo. Riusciamo a descrivere come varia la pressione al variare del tempo disponendo solo delle informazioni relative al variare della pressione in funzione della temperatura e al variare della temperatura in funzione del tempo? Cioe' possiamo descrivere la funzione che lega la pressione al tempo conoscendo solo le funzioni che legano la pressione alla temperatura e la temperatura al tempo? Si, queste informazioni sono sufficienti, e la funzione cercata e' quella che ci accingiamo a descrivare, e che viene chiamata funzione composta, o funzione di funzione, ottenuta dalle altre due funzioni note, dette funzioni componenti.

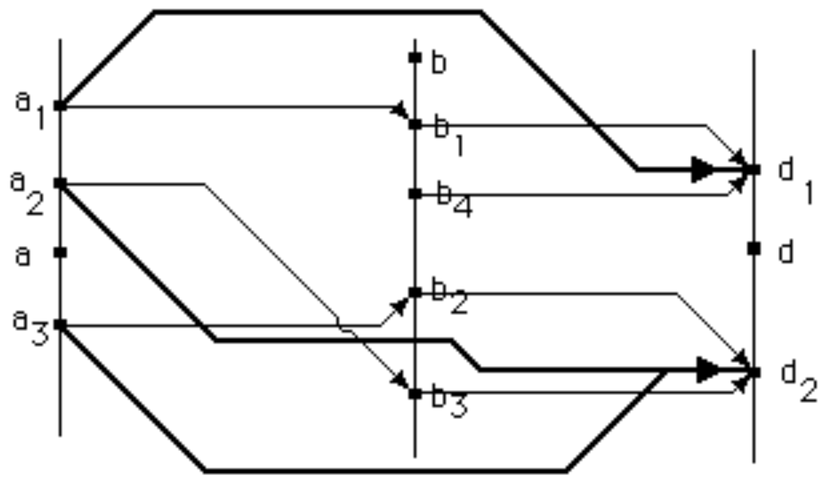
Siano f e g due funzioni, allora la funzione composta F dalle funzioni f e g ordinatamente e' l'insieme delle coppie ordinate (a,d) per cui esiste un elemento b tale che $(a,b)\in f$ e $(b,d)\in g$. Essa viene indicata con g(f) (si legge g di f) oppure con gf. In formule, $F=g(f)=gf=\{(x,y)$: esiste z tale che $(x,z)\in f$ e $(z,y)\in g\}$. Detto in un altro modo, la funzione composta g(f) delle funzioni f e g ordinatamente e' la funzione che si ottiene facendo corrispondere ad un valore x della variabile indipendente della funzione f il valore y della variabile dipendente della funzione g determinato nel modo seguente: a x si associa il corrispondente valore z=f(x), se x appartiene al dominio di f, e poi si applica la funzione g al risultato z ottenuto, se questo appartiene al dominio di g, cioe' si calcola y=g(f(x))=g(z), e questo y e' il valore che corrisponde a x nella funzione composta. Usando la notazione y=F(x) per indicare la funzione F, ed analogamente z=f(x) per indicare la funzione f e y=g(z) per indicare la funzione g, per indicare che F e' la funzione composta delle funzioni f e g possiamo anche scrivere: F(x)=g(f(x)).

Questa funzione e' proprio quella che risolve il problema sopra proposto perche' fa dipendere il valore y della variabile dipendente della funzione g dal valore x della variabile indipendente della funzione f esattamente quando c'e un valore z della variabile indipendente della funzione g a cui corrisponde y, e z e' il valore della variabile dipendente della funzione f corrispondente ad x. Rifacendoci all'esempio della pressione del gas nel recipiente, una certa pressione p corrispondera' all'istante t (sara' quella esistente all'istante t) se si ha la pressione p quando la temperatura e' T e all'istante t la temperatura e' proprio T.

E' evidente che, affinche' la funzione composta non sia vuota, bisogna che ci siano elementi del codominio della prima funzione che appartengono al dominio della seconda funzione; cioe' se F=g(f) allora F non e' vuota se e solo se il codominio di f e il dominio di g non sono disgiunti.

Si noti che per la composizione di funzioni non e' necessario ricorrere alla nozione di funzione da un primo insieme ad un secondo ma e' sufficiente la nozione di funzione.

Se le funzioni f da A in B e g da C in D possono essere rappresentate graficamente come abbiamo gia' fatto e se supponiamo che il secondo insieme B della funzione f coincida con il primo insieme C della funzione g, come si puo' fare senza perdere in generalita', allora possiamo rappresentare graficamente la funzione composta mediante delle freccie che vanno dal primo insieme della f al secondo insieme della g. Cio' e' raffigurato nella seguente figura, di facile lettura, in cui le freccie che vanno da elementi di A ad elementi di B congiungono coppie ordinate di elementi appartenenti a f, mentre le freccie che vanno da elementi di B a elementi di D congiungono coppie ordinate di elementi che appartengono a g, ed infine le freccie che vanno da elementi di A a elementi di D congiungono coppie ordinate di elementi che appartengono a g(f).



E' evidente che le coppie ordinate (a_1,d_1), (a_2,d_2) e (a_3,d_2) appartengono alla funzione g(f).

Cosi' se f e' la funzione da N in N (N indica l'insieme dei numeri naturali) che al numero naturale n associa il nunero naturale 2n-1, e g e' la funzione da R in R (R indica l'insieme dei numeri reali) che al numero reale x associa il numero reale x^2+1, la funzione composta g(f) e' la funzione da N in R che al numero naturale n associa il numero reale r se c'e' un numero m contemporaneamente naturale e reale (basta dire naturale perche' $N\subset R$) tale che m=2n-1 e $r=m^2+1$.

Detto altrimenti $g(f)=\{(x,y):x\in N, y\in R$ ed esiste $m\in N$ tale che m=f(x) e $y=g(m)\}$.

Ovvero $g(f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)=(2x-1)^2+1=(f(x))^2+1$, dove $x\in N$, $2x-1\in N$ e $f(x)\in N$. Si noti che 0 non appartiene al dominio di g(f) perche' non appartiene al dominio di f, e che il codominio di f e' incluso nel dominio di g. Osserviamo che quando x=1 allora $g(f)(x)=g(f)(1)=g(2\times(1)-1)=g(1)= (1)^2+1 =1+1=2$. Notiamo anche che $-1\notin dom(g(f))$ poiche' non appartiene al dom (f).

E' importante osservare che la funzione f(g) e' tutt'altra cosa rispetto alla funzione g(f).

Infatti, considerando le due funzioni f e g dell'esempio precedente, osserviamo che f(g)={(x,y): $x\in R$, $y\in N$ ed esiste un numero naturale z tale che z=g(x) e y=f(z)}. Cioe' $f(g)(x)=f(g(x))= f(x^2+1)=2(x^2+1)-1$, dove x^2+1 deve essere un numero naturale. In particolare se vogliamo calcolare f(g)(1) troviamo che$1\in dom(g)$ e $g(1)=1^2+1=2$ che appartiene a N, cioe' al dominio di f. Si puo' allora applicare la f e si ottiene $f(g)(1)= 2((1)^2+1)-1=3$ che e' ben diverso da 2 che era g(f)(1). Possiamo anche calcolare f(g)(-1) e troviamo che anche -1 e' nel dominio di g e $g(-1) = (-1)^2+1=2$, un elemento di N a cui si puo' dunque applicare la funzione f, sicche' $f(g)(-1) = 2\times((-1)^2+1)-1=3$ che e' ben diverso da g(f)(-1) che non esisteva ($-1\in dom(f(g))$ mentre $-1\notin dom(g(f))$ come avevamo visto).

Si noti che la composizione g(f) di due funzioni iniettive f e g e' una funzione iniettiva. Infatti, fissato un qualsiasi elemento e nel codominio della funzione composta g(f), la sua controimmagine e' {a: esiste c tale che $(a,c)\in f$ e $(c,e)\in g$}; poiche' g e' iniettiva c'e' un solo c tale che $(c,e)\in g$, ed inoltre, per la iniettivita' di f, c'e' un solo a tale che $(a,c)\in f$; cosi' la controimmagine di un qualsiasi elemento e nel codominio della funzione composta e' costituita da un unico elemento e la funzione composta e' iniettiva.

Studiamo ora cosa si puo' dire del dominio e del codominio di una funzione composta g(f), noti il dominio e il codominio di ciascuna delle componenti f e g. Per definizione, il dominio di g(f) e': dom(g(f)) = {x: esiste y tale che $(x,y)\in g(f)$} = {x: esistono y e z tali che $(x,z)\in f$ e $(z,y)\in g$} = {x: esiste z tale che $z\in cod(f)\cap dom(g)$ e $x\in f^{-1}(z)$} = $f^{-1}(cod(f)\cap dom(g))$. Analogamente cod(g(f)) = $g(cod(f)\cap dom(g))$.

Si osservi anche che, date una funzione f da A in B e una funzione g da A' in B', si puo' considerare la funzione composta g(f) come una funzione da A in B'. Puo' darsi che f e g siano totali, ma non e' detto che la funzione composta g(f) sia totale, lo e' se $cod(f)\subseteq dom(g)$. Infatti allora ogni elemento a di A ha un corrispondente $f(a)$ in cod(f) (per la totalita' di f), e $f(a)$ ha corrispondente in B' (per la totalita' di g) proprio perche' $cod(f)\subseteq dom(g)$. Dalla stessa argomentazione si vede subito che, affinche' la funione g(f) da A a B' sia totale e' sufficiente che f e g siano totali e che $cod(f)\subseteq A'$. Ancora puo' darsi che f e g siano suriettive, ma non e' detto che la funzione composta g(f) sia suriettiva, lo e' se $cod(f)\supseteq dom(g)$. Infatti allora ogni elemento b di B' ha controimmagine attraverso g, $g(b)$ (per la suriettivita' di g), e $g(b)$ ha controimmagine in A attraverso f (per la suriettivita' di f) proprio perche' $cod(f)\supseteq dom(g)$. Dalla stessa argomentazione si vede subito che, affinche' la funione g(f) da A a B' sia suriettiva e' sufficiente che g sia suriettiva e che $cod(f)\supseteq A'$. Se poi f e g sono biettive non e' dettoche la funzione g(f) sia biettiva da A a B', lo e' solo se cod(f)=dom(g): questo risultato segue dalla definizione di biettivita' e dalle osservazioni precedenti.

In certi fenomeni puo' capitare che uno sia interessato non solo alla variazione di una quantita' in funzione di un'altra, ma anche alla variazione dell'altra quantita' in funzione della prima. Ad esempio se si considera un gas chiuso in un recipiente, e' vero che la pressione varia al variare della temperatura, ma possiamo anche pensare che sia la temperatura che varia al variare della pressione; cioe' quella che prima era la variabile dipendente ora e' diventata la variabile indipendente, mentre quella che era la variabile indipendente e' diventata la nuova variabile dipendente. Il fenomeno di cui vogliamo registrare l'andamento e' lo stesso per cui i valori che si corrispondono (di pressione e temperatura nel nostro esempio) sono gli stessi, ma considerati in ordine inverso perche' abbiamo invertito tra loro la variabile indipendente con quella dipendente. Per poter dire che anche questo legame inverso e' una funzione dobbiamo prima accertarci che ad ogni valore della nuova variabile indipendente corrisponda al piu' un valore della nuova variabile dipendente: perche' cio' avvenga bisogna che ogni valore della vecchia variabile dipendente corrisponda ad al piu' un valore della vecchia variabile indipendente, cioe' che la funzione considerata inizialmente sia 1-1.

Dunque, se e' data una funzione 1-1, chiamiamola F, possiamo considerare un'altra funzione, detta la funzione <u>inversa</u> della funzione F e che si indica con F^{-1}, che al valore a della sua variabile indipendente (che e' il valore a della variabile dipendente della funzione F) associa il valore b della sua variabile dipendente se b e' il valore della variabile indipendente la cui immagine nella funzione F e' a: cioe' $F^{-1}=\{(a,b): (b,a)\in F\}$. Ribadiamo che cio' ha senso solo se la funzione F e' 1-1, altrimenti l'insieme $\{(a,b): (b,a)\in F\}$ e' una relazione, ma non e' una funzione poiche' non soddisfa la proprieta' caratteristica delle funzioni della unicita' dell'elemento corrispondente ad un valore della variabile indipendente.

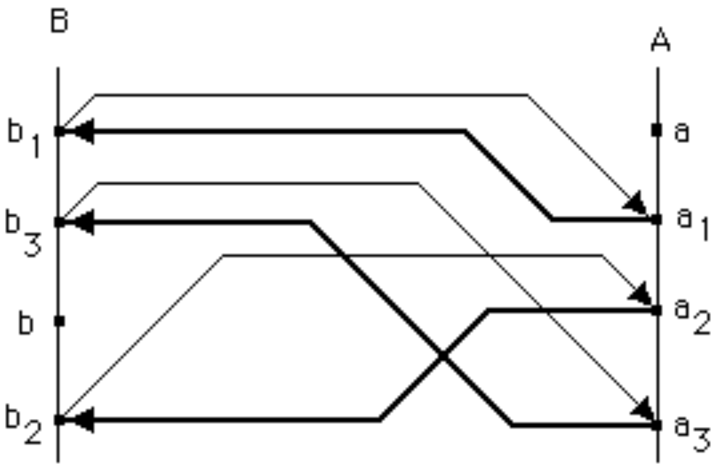
Usando le varie notazioni equivalenti per le funzioni, possiamo presentare il concetto di funzione inversa anche nelle seguenti forme: $F^{-1}= \{(a,b): a=F(b)\}$; $b=F^{-1}(a)$ se e solo se $a=F(b)$.

Si osservi che per la nozione di funzione inversa non e' necessario ricorrere alla nozione di funzione da un primo insieme ad un secondo ma e' sufficiente la nozione di funzione.

Si noti che se F e' una funzione 1-1 da B in A allora F^{-1} e' una funzione da A in B. Si noti anche che una funzione inversa e' sempre 1-1: infatti un valore b della sua variabile dipendente corrisponde ad al piu' un valore a della sua variabile indipendente perche' a b corrisponde al piu' il valore a in F in quanto F e' una funzione. Se poi F e' una biiettivita' da A a B allora la funzione inversa F^{-1} e' una biiettivita' da B ad A, per cui si puo' parlare di coppie di insiemi tra loro biiettivi senza specificarne uno prima e l'altro dopo, dal momento che, se c'e' una biiettivita' dall'uno nell'altro, c'e' anche una biiettivita' dal secondo nel primo.

Si osservi che la funzione inversa di una funzione inversa e' la funzione di partenza poiche' $(F^{-1})^{-1}=\{(a,b): (b,a)\in F^{-1}\}= \{(a,b): (a,b)\in F\}=F$.

Se la funzione F, 1-1 da B in A, ammette una rappresentazione grafica come abbiamo gia' fatto, allora la sua funzione inversa puo' essere rappresentata nello stesso disegno mediante freccie che colleghino gli stessi elementi collegati nella funzione F, ma con direzione delle freccie opposta, come nel seguente disegno in cui le coppie ordinate (a_1,b_1), (a_2,b_2) e (a_3,b_3) appartengono alla funzione inversa, mentre le coppie ordinate (b_1,a_1), (b_2,a_2), (b_3,a_3) appartengono alla funzione F.



Se poi si compongono una funzione con la sua inversa otteniamo la funzione identica sul dominio della prima funzione: infatti $F^{-1}(F)=\{(x,y)$: esiste z tale che $(x,z)\in F$ e $(z,y)\in F^{-1}\} = \{(x,y)$: x appartiene al dominio di F e $y=x\}$ perche' c'e' un valore z tale che $(x,z)\in F$ e $(z,y)\in F^{-1}$ se e solo se x appartiene al dominio di F e $(x,z)=(y,z)$ (F e' 1-1 e $(y,z)\in F$ se e solo se $(z,y)\in F^{-1}$), cioe' $x=y$; ma $\{(x,y)$: x appartiene al dominio di F e $y=x\}=\{(x,x)$: x appartiene al dominio di F$\}$ che e' la funzione identica sul dominio di F.

Analogamente $F(F^{-1})=\{(x,y)$: esiste z tale che $(x,z)\in F^{-1}$ e $(z,y)\in F\} = \{(x,y)$: x appartiene al dominio di F^{-1} e $x=y\} = \{(x,x)$: x appartiene al dominio di $F^{-1}\} = id_{dom(F^{-1})}$.

Negli esempi di funzione visti, abbiamo incontrato la funzione $\{(x,y): y=x/5 \text{ e } 0\leq x\leq 2\}$, chiamiamola ora G. Consideriamo anche la funzione $F=\{(x,y): y=x/5 \text{ e } x\in |R\}$, dove |R al solito indica l'insieme dei numeri reali. Se confrontiamo le due funzioni ci accorgiamo che, pur avendo qualcosa in comune, non sono la stessa funzione, sono diverse. Infatti ci sono delle coppie ordinate, ad esempio (5,1), che appartengono ad F ma non a G. Pero' tutte le coppie ordinate che appartengono a G appartengono anche ad F. Piu' in generale, se tutte le coppie ordinate di una funzione G appartengono anche ad un'altra funzione F si dice che la funzione F <u>estende</u> la funzione G o anche che la funzione G e' una <u>restrizione</u> della funzione F. Spesso una restrizione di una funzione F da A in B si ottiene limitando il dominio della funzione, cioe' considerando solo le coppie ordinate appartenenti alla funzione che abbiano il primo elemento appartenente ad un fissato sottinsieme C di A. In questo caso la funzione $G=\{(x,y): (x,y)\in F \text{ e } x\in C\}$ e' detta la <u>restrizione di</u> F <u>a</u> C, e viene indicata cosi': $F|_C$.

Si noti che $F|_C\subset F$.

Un modo particolare di estendere una funzione F e' quello di aggiungere delle coppie ordinate che appartengano ad un'altra funzione G, cioe' considerare l'unione tra le funzioni F e G, $F\cup G$. Pero' questa unione potrebbe non essere una funzione: cio' accade se c'e' un valore a che appartiene all'intersezione tra i domini di F e di G tale che $F(a)\neq G(a)$, perche' in questo caso sia la coppia ordinata $(a,F(a))$ che la coppia ordinata $(a,G(a))$ appartengono ad $F\cup G$. Dunque l'unione $F\cup G$ tra due funzioni e' una funzione se e solo se per ogni elemento a appartenente all'intersezione tra i domini di F e di G si ha che $F(a)=G(a)$, cioe' se $F|_{dom(F)\cap dom(G)}=G|_{dom(F)\cap dom(G)}$. Questa condizione viene certamente soddisfatta se i domini delle due funzioni F e G sono disgiunti, cioe' se $dom(F)\cap dom(G)=\emptyset$, come spesso succedera' quando eseguiremo questa operazione tra funzioni.

Nel seguito ci interesseremo di funzioni dai numeri reali nei numeri reali. Per queste funzioni valgono tutti i concetti e la terminologia finora introdotti. Ma sfrutteremo anche le operazioni che esistono tra numeri reali per descrivere funzioni che rappresentino fenomeni a cui siamo interessati, o per ampliare le possibilita' di operazioni tra funzioni. Pero', prima di fare questo, e' opportuno poter rappresentare graficamente le funzioni che consideriamo in un modo piu' accurato di quanto fatto finora. Per le funzioni dai numeri reali nei numeri reali e' disponibile una buona rappresentazione grafica che vedremo piu' oltre.

Fin qui abbiamo sempre considerato funzioni che rappresentano fenomeni in cui la quantita' dipendente dipende da <u>una sola</u> quantita' indipendente. Queste funzioni vengono dette 1-arie e sono relazioni binarie.

Ma ci sono situazioni in cui il risultato dipende da piu' di una quantita' indipendente, ad esempio la somma dipende da entrambi gli addendi.

Ci sono due modi di estendere le nozioni introdotte per rappresentare questo tipo di situazioni.

Il primo consiste nel riguardare le varie determinazioni dei valori delle quantita' indipendenti come determinazioni di una singola quantita' che e' il prodotto cartesiano delle altre. Cosi', riprendendo l'esempio precedente, le determinazioni u di un addendo e v dell'altro addendo non sarebbero altro che le determinazioni delle coppie ordinate (u,v) di numeri. Da questo punto di vista la quantita' dipendente dipende sempre da una sola quantita' indipendente che, pero', congloba in una (in generale) n-upla ordinata tutti i valori delle n quantita' da cui siamo abituati far dipendere la quantita' dipendente. Cosi' si mantiene il concetto di funzione fin qui introdotto in cui la funzione e' un insieme di coppie ordinate che gode della univocita', ma questa volta i primi elementi delle coppie sono n-uple ordinate. Usando la simbologia introdotta, indicando con f una tale funzione si puo' scrivere $f: (x_1,...,x_n)|\rightarrow y$, o anche $f((x_1,...,x_n))=y$, o anche $((x_1,...,x_n),y)\in f$. Si noti che l'ultima scrittura puo' essere anche indicata come $(x_1,...,x_n,y)\in f$ in virtu' di quanto convenuto sugli insiemi finiti ordinati.

L'altro modo consiste nel mantenere separate le, diciamo n, quantita' indipendenti e di pensare la quantita' dipendente come determinata da esse. In questo caso bisogna modificare leggermente la nozione di funzione, e introdurre il concetto di funzione n-aria, cioe' di un insieme di (n+1)-uple ordinate, che costituiscono cosi' una relazione (n+1)-aria, che gode della proprieta' che per ogni (n+1)-upla che gli appartiene fissati i primi n elementi di una (n+1)-upla e' univocamente determinato l'(n+1)-esimo; cioe' se f indica la funzione n-aria e se sia $(x_1,...,x_n,y)$ che $(x_1,...,x_n,y')$ appartengono a f allora $y=y'$. E' naturale continuare a chiamare <u>univocita'</u> questa proprieta' che caratterizza le funzioni n-arie tra le relazioni (n+1)-arie. Si noti questo legame tra l'arienta' di un in-

sieme di (n+1)-uple che gode della univocita' visto come funzione che e' n-aria, e l'aireta' dello stesso insieme di (n+1)-uple visto come relazione che e' (n+1)-aria.
Osserviamo subito che i due modi di presentare le cose sono essenzialmente lo stesso in base all'osservazione che le coppie ordinate costituite da un'n-upla ordinata e da un elemento non sono altro che le (n+1)-uple ordinate e che l'univocita' per quelle coppie ordinate aferma esattamente quello che afferma l'univocita' per le corrispondenti (n+1)-uple ordinate.
Poiche' abbiamo introdotto a suo tempo relazioni di qualsiasi arieta' maggiore di zero, le relazioni che godono della univocita' forniscono funzioni di qualsiasi arieta' maggiore o uguale a zero. La cosa non crea problemi, ma solo una situazione un po' inconsueta nel caso di relazioni univoche 1-arie che danno luogo a funzioni 0-arie: in questo caso la quantita' dipendente non dipende da alcuna determinazione delle quantita' indipendenti che non ci sono, sicche' l'univocita' impone che sia unico l'elemento che appartiene alla relazione che sara' quindi del tipo {w} dove w e' quell'unico elemento che appartiene alla relazione 1-aria che e' una funzione 0-aria. Una funzione 0-arie viene anche detta una costante perche' applicata a niente (non ci sono quantita' indipendenti) da' un ben precisato valore.
Alle funzioni n-arie, che si dicono anche <u>funzioni di n variabili</u>, si estendono i concetti gia' visti per le funzioni 1-arie, con alcune naturali modificazioni. Anzitutto il dominio non sara' piu' unico ma bisognera' parlare di primo dominio, secondo dominio, ... , n-esimo dominio, uno per ciascuna delle quantita' indipendenti; rimane unico il codominio. Analogamente non si potra' piu' parlare solo di primo insieme ma di primo, secondo, ... , n-esimo insieme come insiemi che includono i rispettivi domini e a cui appartengono i valori che si pensa di poter assegnare alle rispettive variabili indipendenti; i valori da attribuire alla variabile dipendente si penseranno essere quelli appartenenti ad un ultimo insieme che contiene il codominio.. Cosi' il concetto di funzione da a puo' essere rappresentato con la notazione $(A_1,...,A_n,B,f)$ o con la notazione f: $A_1\times.. .\times A_n\to B$, con evidente significato dei simboli. Ci saranno piu' nozioni di totalita' della funzione relative alla coincidenza dell'i-esimo dominio con l'i-esimo insieme (i=1,...,n) ed anche una nozione globale di totalita' quando tutti i domini coincidono con i rispettivi insiemi. Rimane invariato il concetto di suriettivita'. Restano anche le terminologie di immagine di un elemento, di immaggine di un insieme, di controimmagine di un insieme e di controimmagine di un elemento, con l'avvertenza che ora l'elemento di cui si cerca l'immagine e' un'n-upla, l'insieme di cui si cerca l'immagine e' un insieme di n-uple, e le controimmagini sono ancora insiemi di n-uple. Il concetto di iniettivita' rimane in senso globale, cioe' ad n-uple diverse corrispondono elementi diversi.
Da una funzione n-aria f, fissati i valori $u_{j_1},...,u_{j_i}$ di i ($1\leq i\leq n$) variabili indipendenti, diciamo le variabili j_1-esima, j_2-esima, ... , j_i-esima, si possono ottenere in corrispondenza funzioni (n-i)-arie $f_{u_{j_1},...,u_{j_i}}$ nel modo seguente: $f_{u_{j_1},...,u_{j_i}}$ e' l'insieme delle (n-i+1)-uple ordinate ciascuna delle quali e' tale che, inseriti ordinatamente i suoi elementi nei posti liberi nelle (n+1)-uple ordinate in cui sono gia' presenti gli elementi $u_{j_1},...,u_{j_i}$ nei rispettivi posti $j_1,...,j_i$, danno luogo ad (n+1)-uple di f. Detto altrimenti $f_{u_{j_1},...,u_{j_i}}$ associa ad una (n-i)-upla ordinata $x_1,...,x_{n-i}$ lo stesso elemento che la funzione f associa all'n-upla che si ottiene inserendo ordinatamente $x_1,.. .,x_{n-i}$ nei posti liberi nelle n-uple ordinate in cui sono gia' presenti gli elementi $u_{j_1},...,u_{j_i}$ nei rispettivi posti $j_1,...,j_i$. Cosi' si e' introdotta una nuova operazione sulle funzioni che permette di ottenere funzioni di arieta' inferiore da funzioni di una certa arieta'. Chiamiamo <u>parzializzazione</u> tale operazione, sicche' parleremo di funzioni ottenute per parzializzazione da un'altra rispetto a certi valori da attribuire a particolari variabili indipendenti. Quando i e' uguale a n-1 si ottengono funzioni unarie che vengono dette <u>funzioni parziali</u> (a volte questa terminologia non e' adottata solo in questo caso).
Ecco un esempio. Sia f la seguente funzione ternaria sui numeri reali: f= {(u,v,w,z): u,v,w,z sono numeri reali e $z=3u+v^2+\sqrt{w}$}, che con altra simbologia si indica come quella funzione tale che $f(u,v,w)=3u+v^2+\sqrt{w}$. Se per la prima variabile indipendente si fissa il valore 2 e per la terza si fissa il valore 3 si ottiene la funzione unaria della seconda variabile $f_{2_1 3_3}(v)= 6+v^2+\sqrt{3}$. Se invece si fosse fissato solo il valore 5 per la terza variabile dalla stessa funzione f si sarebbe ottenuta la funzione binaria $f_{5_3}(u,v)= 3u+v^2+\sqrt{5}$.
Data una funzione f n-aria, se e' iniettiva in senso globale, si puo' parlare della sua funzione inversa f^{-1} in senso globale cioe' di una funzione che ha per codominio un insieme di n-uple. Ma, pensando alle n famiglie di funzioni parziali (una famiglia per ogni scelta di variabile indipendente, una funzione in una famiglia per ogni scelta di valori da dare alle altre variabili indipendenti),

si possono considerare tutte le funzioni inverse delle singole funzioni parziali ottenute da f e dire che sono inverse parziali di f.

La composizione di funzioni presenta particolari caratteristiche quando si considerano funzioni di piu' variabili. In effetti ciascuna delle variabili indipendenti potrebbe a sua volta dipendere da altre variabili. Supponiamo di disporre di k funzioni n-arie $f_1,...,f_k$, e di una funzione k-aria g; si puo' allora definire una nuova funzione n-aria F come segue:
$F=\{(x_1,\dots,x_n,y)$: esistono $z_1,\dots,z_k$ tali che $(x_1,\dots,x_n,z_1)\in f_1,\dots,(x_1,\dots,x_n,z_k)\in f_k$ e $(z_1,...,z_k)\in g\}$. Detto altrimenti F e' la funzione n-aria tale che $F(x_1,...,x_n) =g(f_1(x_1,...,x_n),..., f_k(x_1,...,x_n))$, in parole, F e' la funzione che applicata alla n-upla ordinata $(x_1,...,x_n)$ da' lo stesso risultato che da' la funzione g applicata alla k-upla ordinata $(f_1(x_1,...,x_n),...,f_k(x_1,...,x_n))$ dei valori delle funzioni $f_1,...,f_k$ applicate all'n-upla ordinata $(x_1,...,x_n)$. La notazione che si usera' per indicare la funzione composta F sara' la seguente $g(f_1,...,f_k)$. Si noti che tra n e k non si e' supposto ne' che siano uguali ne' che uno sia maggiore dell'altro ne' il viceversa.
Ancora si possono calcolare i domini e il codominio della funzione composta a partire dai domini e dai codomini delle funzioni componenti, calcolo che si lascia per utile esercizio. Inoltre se tutte le funzioni componenti sono iniettive allora anche la funzione composta e' iniettiva. Infine se tutte le funzioni componenti $g,f_1,...,f_k$ sono biiettive (iniettive, globalmente totali e suriettive) e il primo insieme, ... , il k-esimo insieme di g sono rispettivamente gli ultimi insiemi delle funzioni $f_1,...,f_k$ allora anche la funzione composta F e' una biiettivita'.

Concludiamo questa sezione con una serie di osservazioni che hanno origine dall'esperienza. A volte capita di considerare fenomeni nei quali pur cambiando i valori assegnati alla variabile indipendente, non cambia il corrispondente valore della variabile dipendente. Ad esempio, l'altezza su una seperficie piana orizzontale al variare delle coordinate che determinano una particolare posizione sulla superficie, oppure l'esito di una gare tra un contendente fortissimo che vince sempre nonostante il cambiare degli avversari. E abbastanza naturale rappresentare tali fenomeni con funzioni di opportuna arieta' anche se il risultato non dipende dai valori attribuiti a certe variabili: si suol chiamare apparenti o ridondanti le variabili da cui non dipende il risultato.
A volte capita di definire una funzione unaria facendo ricorso ad una funzione binaria in cui le variabili assumono lo stesso valore; ad esempio il quadrato di un numero e' visto come una funzione unaria che ad un numero associa il suo quadrato, ma e' anche definito come il prodotto (la moltiplicazione e' una funzione binaria) di un numero per se' stesso. Ma piu' in generale, puo' capitare di considerare una funzione m-aria che puo' essere considerata come ottenuta da una funzione (m+k)-aria costringendo le ultriori k variabili indipendenti ad assumere valori uguali a quelle di altre variabili tra le m inizialmente considerate. In questo caso si puo' parlare di identificazione di variabili.
A volte ancora capita di voler considerare una quantita' dipendente come funzione di certe quantita' indipendenti considerate in ordine diverso. Ad esempio si puo' considerare la pressione in un gas sia come dipendente dalla sua temperatura e dal volume che occupa, sia come dipendente dal volume che occupa e dalla sua temperatura. Ovviamente si tratta di funzioni diverse, ma strettamente legate tra loro. In questo caso si dice che si passa da una funzione all'altra mediante permutazione di variabili.
Tutte queste situazioni possono essere espresse con precisione mediante la composizione di funzioni di piu' variabili, sfruttando quelle particolari funzioni n-arie da a che, applicate ad una n-upla nel prodotto cartesiano del primi n insiemi, danno la i-esima componente dell'n-upla (ovviamente con i un numero naturale maggiore od uguale ad 1 e minore od uguale a n). Tali funzioni si indicano con $(A_1,...,A_n,I_{n,i})$ e si possono anche definire cosi': $I_{n,i}=\{(x_1,...,x_n,x_i): (x_1,...,x_n)\in A_1\times...\times.A_n\}$, o anche in questo modo': $I_{n,i}(x_1,...,x_n)=x_i$ per ogni $(x_1,...,x_n)\in A_1\times...\times.A_n$. Queste funzioni n-arie possono essre chiamate identita' sulla i-esima componete.
Di fatto una funzione (k+m)-aria F con almeno m variabili ridondanti puo' essere ottenuta da una funzione k-aria g applicando questa alle k-uple ordinate i cui elementi sono ottenuti rispettivamente applicando le funzioni $I_{k+m,i}$, con i che va da 1 a k, alle (k+m)-uple ordinate: $F(x_1,...,x_{k+m})= g(I_{k+m,1}(x_1,...,x_{k+m}),...,I_{k+m,k}(x_1,...,x_{k+m}))$. Si noti che consideriamo questa operazione anche nel caso che k sia 0, dal momento che abbiamo introdotto le funzioni 0-arie. In tal caso la funzione g non sara' di fatto applicata al risultato di alcuna funzione che possiamo comunque pensare m-aria: cosi', oltre alle funzioni costanti 0-arie, ci sono le corrispondenti funzioni costanti m-arie, per qualsiasi m, ottenute applicando le funzioni costanti 0-arie a zero funzioni n-arie.

Questo metodo di introduzione di variabili ridondanti puo' essere usato anche per far si che varie funzioni con diversi insiemi di variabili indipendenti vengano ad avere lo stesso insieme di variabili indipendenti: basta trasformare ciascuna di esse aggiungendo come vairabili ridondanti quelle che occorrono nelle altre funzioni e non in quella considerata. Cosi' si puo' ampliare il concetto stesso di composizione di funzioni senza dover richiedere che le k funzioni, a cui si applica una funzione k-aria per ottenere la funzione composta, debbano avere tutte le stesse variabili indipendenti, come detto quando se ne e' data inizialmente la definizione. Anche se non dipendono dalle stesse variabili indipendenti le si trasformano introducendo variabili ridondanti in modo che tutte dipendano da tutte le variabili che occorrono come indipendenti in almeno una delle k funzioni, e poi si applica la composizione prima definita a queste k nuove funzioni. Sicche' con piu' applicazioni della composizione di funzioni prima definita si puo' ottenere anche la composizione di funzioni a partire da funzione che non hanno le stesse variabili indipendenti.

Per quanto riguarda l'identificazione di variabili, si noti come questa possa essere ottenuta applicando una funzione (m+h)-aria a m+h funzioni m-arie $I_{m,i}$ in cui di volta in volta i e' l'indice della variabile che si vuole considerare in quella posizione. Ad esempio la funzione unaria quadrato puo' essere ottenuta per composizione dalla funzione binaria moltiplicazione applicando questa a due funzioni unarie $I_{1,1}$. Si noti come, in questo caso, l'arieta' della funzione che si applica al risultato delle altre per ottenere la funzione compossta sia maggiore dell'arieta' delle funzioni al cui risultato si applica.

Analogamente si puo' operare per ottenere una permutazione di variabili: basta applicare la funzione, diciamo n-aria, rispetto alla quale si vuol cambiare l'ordine delle variabili a n funzioni n-arie identita' sulla i-esima componente scegliendo opportunamente l'indice i. Ad esempio se in una funzione binaria f si vogliono permutare le due variabili per ottenere una nuova funzione f', questa puo' essere ottenuta per composizione cosi': $f' = f(I_{2,2}, I_{2,1})$.