

Sistemi a due corpi: massa ridotta.

Proprietà dei sistemi di due particelle.

Vettore posizione \mathbf{r}_{CM} del centro di massa in Oxyz (Sist. L)

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$$

N.B.: Relazioni fra i vettori posizione, velocità e accelerazione di un generico PM fra i due sistemi C e L:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}; \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}; \quad \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

Vettore posizione della particella m_i in CMxyz (Sist. C)

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2 \mathbf{r}_{12} / (m_1 + m_2) \qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1 \mathbf{r}_{21} / (m_1 + m_2) \qquad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Vettore velocità della particella m_i in C: $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2) \qquad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2) \qquad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

Vettore accelerazione della particella m_i in C: $\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2 \mathbf{a}_{12} / (m_1 + m_2) \qquad \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1 \mathbf{a}_{21} / (m_1 + m_2) \qquad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$$

Se il sistema delle due particelle è isolato ($\mathbf{a}_{\text{CM}} = 0$), si ha:

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 = m_2 \mathbf{a}_{12} / (m_1 + m_2) \quad \mathbf{a}'_2 = m_1 \mathbf{a}_{21} / (m_1 + m_2)$$

Equazioni del moto delle due particelle:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

da cui: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}/m_1$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}/m_2$ con ($\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$)

Moto relativo della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

In termini di massa ridotta $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12} / \mu$$

Equazione del moto relativo di 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione (cioè che formano un sistema libero), in termini della loro massa ridotta si scrive: $\mu \mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_1 - \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_{12}$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure: $\mu \mathbf{a}'_{12} = \mathbf{F}_{12} \quad (1)$

Questa è l'equazione del moto di una particella di massa μ sotto l'azione di una forza \mathbf{F}_{12} in un SRI ancorato nel CM del sistema.

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa μ che si muove sotto l'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua \mathbf{F}_{12} rispetto al sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: Essendo il sistema isolato le grandezze dinamiche quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema dei due corpi si conserveranno, indipendentemente dal sistema di riferimento scelto (sia esso L o C).

Calcolo delle grandezze dinamiche collettive per un sistema a due corpi relative nel sistema di riferimento C.

Quantità di moto totale \mathbf{P}'_S nel sistema C:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2$, e ricordando che $\mathbf{v}'_1 = m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)$ e $\mathbf{v}'_2 = m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2)$, si avrà anche:

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 = m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] = \mu \mathbf{v}_{12}$$

$$\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2 = m_2 [m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2)] = \mu \mathbf{v}_{21} = -\mu \mathbf{v}_{12}.$$

e quindi:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mu \mathbf{v}_{12} - \mu \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

Energia cinetica interna di un sistema di 2 particelle:

$$E_k^{\text{INT}} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 = p'^2 / 2\mu.$$

dove: $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \mu \mathbf{v}_{12}$

$$\begin{aligned}
 \text{Infatti: } E_k^{\text{INT}} &= \frac{1}{2} m_1 v'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_2{}^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)]^2 + \frac{1}{2} m_2 [m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2)]^2 = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 m_2^2 v_{12}^2 / (m_1 + m_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 m_1^2 v_{21}^2 / (m_1 + m_2)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 m_2 (m_1 + m_2) v_{12}^2 / (m_1 + m_2)^2 = \frac{1}{2} m_1 m_2 v_{12}^2 / (m_1 + m_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \mu v_{12}^2
 \end{aligned}$$

Momento angolare interno o intrinseco del sistema:

$$\mathbf{L}_{\text{CM}}^{\text{INT}} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{\text{CM}}^{\text{INT}} &= \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \wedge m_2 \mathbf{v}'_2 = \\
 &= \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] + \mathbf{r}'_2 \wedge m_2 [m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2)] = \\
 &= \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] + \mathbf{r}'_2 \wedge m_2 [-m_1 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] = \\
 &= \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2) - \mathbf{r}'_2 \wedge m_1 m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2) \\
 &= (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \wedge [m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{12}] = \\
 &= \mathbf{r}'_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12} \quad [\mathbf{r}'_{12} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}]
 \end{aligned}$$

Teoremi di König per un sistema isolato a due corpi, con velocità \mathbf{v}_{CM} costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_S &= M \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{P}'_S = M \mathbf{v}_{\text{CM}} \\
 E_{k,S} &= E_{k,\text{CM}} + E_k^{\text{INT}} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 = \\
 \mathbf{L}_{O,S} &= \mathbf{L}_{O,\text{CM}} + \mathbf{L}_{\text{CM}}^{\text{INT}} = \mathbf{r}_{\text{CM}} \wedge M \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12}
 \end{aligned}$$

Esempio: caso del manubrio costituito da 2 corpi puntiformi collegati da un'asta rigida lunga L e priva di massa: calcolo della tensione della asta:

$$T = \mu v_{12}^2 / r_{12} = \mu v_{12}^2 / L.$$

Cosa succede quando $m_1 \ll m_2$ (atomo di idrogeno: massa elettrone \ll massa protone; sistema terra–luna: massa luna \ll massa terra; etc.)

La massa ridotta di un tal sistema diventa:

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m_1 / (m_1 / m_2 + 1) \cong m_1$$

e il moto relativo delle due particelle descritto dall'equazione 1 (v. più sopra) si riduce a:

$$m_1 \mathbf{a}'_{12} = \mathbf{F}_{12}$$