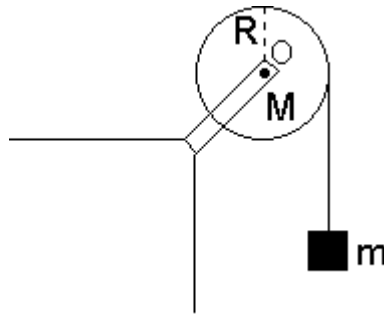


Dinamica del corpo rigido

Problema n. 1: Un disco rigido, omogeneo, di massa $M = 2.5 \text{ kg}$ e raggio $R = 0.2 \text{ m}$ è imperniato su un asse orizzontale fisso z , passante per il suo centro di massa O e perpendicolare al piano del disco. Un blocco di massa $m = 1.2 \text{ kg}$ è appeso a un filo inestensibile e privo di massa, avvolto attorno al bordo del disco. Il sistema è mantenuto in quiete, con il filo teso, tramite un opportuno dispositivo (freno a disco) che blocca la rotazione del disco (vedi figura). All'istante $t=0$ il dispositivo viene rimosso e il blocco inizia a scendere per l'azione della forza peso, mettendo simultaneamente in rotazione il disco. Assumendo che il filo non slitti e che il disco ruoti attorno all'asse z senza attrito, determinare:

- (a) l'accelerazione di caduta del blocco; [$\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{g} \ m/(m+M/2)$]
- (b) la tensione del filo; [$\mathbf{T} = - (mM/2)\mathbf{g}/(m+M/2)$]
- (c) la reazione vincolare sviluppata dal perno passante per O durante il moto di caduta del corpo m ; Calcolare, inoltre, in corrispondenza dell'istante in cui il blocco è sceso di $H = 2.4 \text{ m}$:
- (d) l'energia cinetica del sistema disco + blocco; [$\Delta E_k = -\Delta E_p^{EXT}$]
- (e) l'energia cinetica di rotazione del disco;
- (f) le velocità del centro di massa del sistema disco + blocco;
- (g) l'energia cinetica interna del sistema disco + blocco;
- (h) il momento angolare totale del sistema disco + blocco rispetto al punto O ;
- (i) il modulo dell'accelerazione di un punto del bordo del disco. [$a = a_T^2 + a_N^2$]



Problema n. 2: Un'asta rigida sottile e omogenea AB di massa $M = 10 \text{ Kg}$ e di lunghezza $L = 1 \text{ m}$ può ruotare senza attrito nel piano verticale attorno ad un asse fisso passante per il suo estremo A . All'istante $t=0$ l'asta viene abbandonata con velocità iniziale nulla dalla posizione orizzontale. Calcolare:

- (a) la traiettoria del suo centro di massa durante il moto successivo; [$x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = (L/2)^2$]
- (b) l'equazione del moto dell'asta; [$M\mathbf{a}_{CM} = M\mathbf{g} + \mathbf{R}$; $I_z\alpha = - (L/2) Mg \sin \theta$]
- (c) la sua accelerazione angolare quando forma un angolo θ con la direzione verticale; [$\alpha = - (3g/2L) \sin \theta$]
- (d) la velocità angolare dell'asta in tale configurazione; [$\omega^2 = (3g/L) \cos \theta$]
- (e) la reazione vincolare quando l'asta si trova nel punto più in basso.

Problema n. 3: Un sistema è costituito da un disco rigido omogeneo di massa $M = 2 \text{ Kg}$ e di raggio $R = 20 \text{ cm}$ imperniato su di un asse orizzontale fisso passante per suo centro C e disposto perpendicolarmente al piano del disco. Sul bordo del disco può scorrere una fune inestensibile e di massa trascurabile vincolata ad un'estremità ad un punto fisso O tramite una molla di costante elastica $k = 300 \text{ N/m}$ e massa trascurabile. All'altro estremo della fune pende un corpo di massa m

= 1 kg. Inizialmente il corpo è mantenuto in quiete tramite un opportuno dispositivo, con la fune tesa e la molla in posizione di riposo. Al tempo $t=0$ il dispositivo viene rimosso e il corpo inizia a muoversi in direzione verticale. Nell'ipotesi che la fune non scivoli sul brodo del disco, si chiede di:

- (a) scrivere l'equazione del moto del corpo di massa m ; [$Ma = Mg - T$; $I_Z \alpha = RT - kRx$]
- (b) calcolare il periodo delle sue oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio; [$T = 2\pi / \sqrt{2k/(2m+M)}$]
- (c) la massima tensione della fune durante il moto oscillatorio della massa m .

Problema n. 4: Un disco rigido, sottile, omogeneo, di massa $M = 6$ kg e raggio $R_1 = 20$ cm ruota nel piano orizzontale con velocità angolare costante $\omega_1 = 12$ rad/s attorno ad un asse verticale fisso passante per il punto O, che si trova a distanza $d = R/2$ dal baricentro del disco. Calcolare:

- (a) la forza che deve essere esercitata dai supporti sull'asse di rotazione; [$F_N = Md\omega^2 = 86.4$ N]
- (b) il momento della forza peso del disco; [$\tau_O^W = Mgd = 5.9$ N]
- (c) l'energia cinetica del disco. [$E_k = I_Z \omega^2/2 = 12.96$ J]

Se, partendo da fermo, il disco ha raggiunto la velocità di regime in 4 s, sotto l'azione di un momento di intensità costante, determinare:

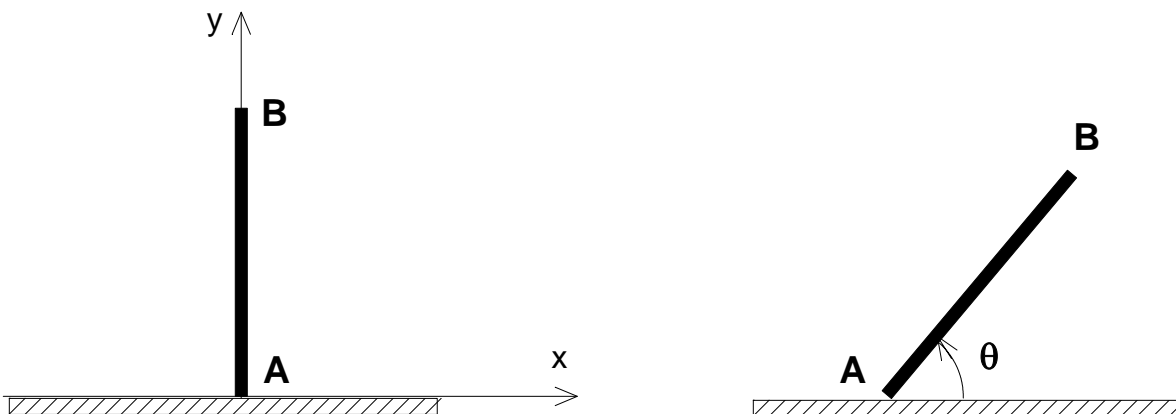
- (d) il valore di tale momento; [$\tau_O(\theta) = \Delta E_k / \Delta \theta = I_Z \alpha = 0.54$ Nm]
- (e) l'accelerazione tangenziale del CM del disco durante la fase di accelerazione. [$a_{CM} = d_{CM} \alpha = 0.3$ m/s²].

Problema n. 5: Un'asta AB rigida sottile omogenea di massa $M = 2$ kg e di lunghezza $L = 1.5$ m è appoggiata in posizione di equilibrio instabile su un piano orizzontale liscio (v. figura). Ad un certo istante viene applicato all'estremità superiore dell'asta B, un impulso parallelo al piano, di intensità trascurabile, che fa cadere l'asta. Determinare:

- 1 - la traiettoria del centro di massa durante il moto di caduta dell'asta;
- 2 - la velocità angolare di rotazione dell'asta in funzione dell'angolo θ .

Calcolare nell'istante in cui l'asse dell'asta forma un angolo di 30° con il piano orizzontale:

- 3 - la velocità dei punti estremi A e B dell'asta;
- 4 - la reazione vincolare.



N.B.: Si assuma il sistema di riferimento indicato in figura. Delle grandezze vettoriali si diano sempre tutte le componenti. Riportare nello spazio sottostante i risultati in forma simbolica e, laddove richiesto, anche in forma di valori numerici.