EX. 1 | TRACCIA A | (15/2/2016) |

$S_1 = 5R + 6B \Rightarrow TOT(S_1) = 11$

$S_2 = 4R + 5B \Rightarrow TOT(S_2) = 9$

$S_3 = 3R + 2B \Rightarrow TOT(S_3) = 5$

$$P(S_1) = \frac{5}{13}, \quad P(S_2) = \frac{5}{13}, \quad P(S_3) = \frac{3}{13}$$

$\Rightarrow P(S_1|B) = ?$

Per determinare la probabilità cercata, si usa la formula di Bayes:

$$P(S_1|B) = \frac{P(B|S_1)\cdot P(S_1)}{P(B)}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(B) = P\left((B\cap S_1)\cup(B\cap S_2)\cup(B\cap S_3)\right)$$
$$= P(B\cap S_1) + P(B\cap S_2) + P(B\cap S_3)$$
$$= P(B|S_1)\cdot P(S_1) + P(B|S_2)\cdot P(S_2) + P(B|S_3)\cdot P(S_3)$$
$$= \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{13} + \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{13} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{13} \cong 0.516$$

$$\Rightarrow P(S_1|B) = \frac{0.21}{0.516} = 0.407$$

$\boxed{\text{EX. 2}}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow n = 8$

Dall'urna vengono estratte $k = 3$ palline.

a) $|\{a, b, c\}| = D_{8,3} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336$

b) $|\{a, b, 3\}| = D_{8,2} = \dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

c) $|\{a, b, c\}| = D'_{8,3} = 8^3 = 512$

con reinserimento

$|\{a, b, 3\}| = D'_{8,2} = 8^2 = 64$

con reinserimento

$\boxed{\text{EX. 3}}$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < +\infty$

Consideriamo il c.c.s. $\{x_1, \dots, x_n\}$. La funzione di verosimiglianza è

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} \cdots \lambda e^{-\lambda x_n}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} = \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

$$\Rightarrow l = \ln(L) = \ln\left[\lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}\right]$$

$$= \ln(\lambda^n) + \ln\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}\right)$$

$$= n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = n \cdot \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} =: \hat{\lambda}$$

Per essere sicuri che $\hat{\lambda}$ sia effettivamente lo stimatore di massima verosimiglianza per il c.c.s. preso in considerazione, calcoliamo la derivata seconda e verifichiamo che essa sia negativa:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \text{ essendo } n, \lambda^2 > 0.$$

$\boxed{\text{EX. 4}}$ Vedi Teoria

TRACCIA B

Ex. 1

CANE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PESO (kg)	42	50	48	64	68	68	48	50	64	48	68	48

Dai dati si ricava che $\sum_{i=1}^{12} y_i = 1680$

a) Distribuzione di frequenza (pesi inseriti in ordine crescente)

(peso) P_i	n_i	f_i	N_i	F_i
42	1	0.083	1	0.083
48	4	0.333	5	0.416
50	2	0.167	7	0.587
64	2	0.167	9	0.75
68	3	0.25	12	1.00
TOT	12	1.00	\	\

b) $$\overline{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot n_i = \frac{1}{12}\left[42\cdot 1 + 48\cdot 4 + 50\cdot 2 + 64\cdot 2 + 68\cdot 3\right] = 55.5 \text{ kg}$$

La moda corrisponde al peso con frequenza maggiore, ossia

$M_o = 48$.

c) Se indichiamo con Z la q.tà reale di cibo per animali consumato e con Y la q.tà dichiarata, avremo

$Z = 1.10 \cdot Y \Rightarrow \overline{Z} = 1.10 \cdot \overline{Y}$ (per la linearità della media)

D'altra parte, $\overline{Y} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} y_i = \frac{1680}{12} = 140$

$\Rightarrow \overline{Z} = 1.10 \cdot 140 = 154$.

Ex. 2

Y: v.a. che misura se uno studente pratica sport (o meno)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{200} y_i = 120.$$

a) Uno stimatore per Y è dato dalla media campionaria

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{120}{200} = 0.6 \quad (\text{stimatore corretto})$$

b) Sia $T_n = \frac{1}{200}\left(4Y_1 + Y_2 + 3Y_3\right)$

$$\Rightarrow E[T_n] = \frac{1}{200}\left[4\cdot E[Y_1] + E[Y_2] + 3E[Y_3]\right]$$

(posto $E[Y_i] = \pi$)

$$= \frac{1}{200}\cdot 8\pi = \frac{\pi}{25} \neq \pi \Rightarrow T_n \text{ non è uno stimatore corretto}$$

$$\Rightarrow d = E[T_n] - \pi = \frac{\pi}{25} - \pi = -\frac{24}{25}\pi.$$

Ex. 3

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

Consideriamo il c.c.s. $\{x_1, \dots, x_n\}$. La funzione di verosimiglianza è

$$L(= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma^2} e^{-\frac{x_i^2}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{x_1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2}{\sigma^2}} \cdot \frac{x_2}{\sigma^2} e^{-\frac{x_2^2}{\sigma^2}} \cdots \frac{x_n}{\sigma^2} e^{-\frac{x_n^2}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^n}\cdot (x_1 \cdots x_n)\cdot e^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$= \frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \, e^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\Rightarrow \ell = \ln(L) = \ln\left[\frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^{n}(x_i \cdots x_n)\, e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sigma^{2n}}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= -2n\ln(\sigma) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\ell}{d\sigma} = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2n\sigma + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2n\sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n} =: \hat{\sigma}$$

$\boxed{\text{EX. 4}}$ Vedi Teoria