

1. Si definisca  $A \nabla B := \neg(\neg A \wedge \neg B)$ ; si dimostri (sintatticamente) che
  - a.  $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A \nabla B$
  - b.  $(\Gamma \vdash A \nabla B \quad \& \quad \Gamma, A \vdash C \quad \& \quad \Gamma, B \vdash C) \Rightarrow \Gamma \vdash C$
2. Assumendo che  $x \notin FV(B)$  si dimostri in deduzione naturale che
 
$$\vdash \exists x A \rightarrow (B \rightarrow \exists x(A \wedge B))$$
3. Si dimostri che la regola di  $\forall I$  della deduzione naturale è corretta, ovvero che:
 

se  $\Gamma \vDash A$  e  $x \notin FV(\Gamma)$  allora  $\Gamma \vDash \forall x A$
4. Si enunci il lemma di Zorn e lo si applichi per dimostrare il Lemma di Lindenbaum:  
Ciascuna teoria consistente è contenuta in una teoria massimale consistente
5. sia  $F = \langle U, \sqsubseteq \rangle$  un ordine parziale;
  - a. si dimostri che per ogni formula modale  $A$ ,  $F \vDash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ .
  - b. Si esibisca un frame  $F'$  tale che per una opportuna  $A$ ,  $F' \not\vDash \Box A \rightarrow \Box \Box A$