CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE

Enrico Gregorio

Edizione ottobre 2015

INDICE

ELENCO DELLE FIGURE

ELENCO DELLE TABELLE

0

0.1 NUMERI REALI

L'insieme numerico che useremo sarà quello dei *numeri reali* che saranno descritti più in dettaglio nel capitolo 8. In questo capitolo introduttivo ne esporremo le più importanti proprietà in base a quello che ci servirà in seguito.

I numeri reali sono la controparte algebrica della retta geometrica e di quello che gli antichi geometri chiamavano *grandezza*, riferendosi alla misura dei segmenti. La teoria delle grandezze si basa su due assunti fondamentali:

1. date due grandezze (omogenee) diverse, esiste un multiplo della minore che supera la maggiore;
2. date due serie di grandezze $a_1, a_2, \dots$ e $b_1, b_2, \dots$, la prima crescente e la seconda decrescente, in cui ogni a_k è minore di ogni b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k, allora esiste una grandezza c tale che $a_k \le c \le b_k$, *per ogni* k.

In realtà la prima proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee, dopo aver chiarito che cosa significa "multiplo" (si pensi solo ai segmenti, per non andare in cerca di complicazioni). La seconda proprietà è quella che permise ad Archimede di confrontare la misura della circonferenza con l'area del cerchio, trovando la famosa relazione secondo la quale il rapporto fra circonferenza e diametro è uguale al rapporto fra area del cerchio e quadrato del raggio: il numero che oggi si denota universalmente con π.

Gli antichi consideravano solo grandezze positive; non è un vero problema aggiungere lo zero e i numeri negativi, anzi è un arricchimento delle proprietà algebriche. Il succo del discorso è che i numeri reali forniscono un sistema di coordinate sulla retta: ogni punto della retta può essere fatto corrispondere a un numero reale e viceversa, rispettando l'ordinamento, una volta che sulla retta si fissi un'origine e un'unità di misura, cioè due punti corrispondenti rispettivamente a 0 e 1.

Il problema che avevano Archimede, Euclide e gli altri geometri greci era quello che alcune coppie di grandezze sono *commensurabili*, cioè hanno un sottomultiplo comune, e altre no. Non ci porremo il problema se non per sottolineare che questo dà origine alla distinzione fra numeri *razionali* e *irrazionali*. Fissato un sistema di coordinate su una retta, un punto corrisponde a un numero razionale se il segmento con estremi l'origine e il punto stesso è commensurabile con l'unità di misura, altrimenti corrisponde a un numero irrazionale. I numeri razionali sono i rapporti tra numeri interi, com'è chiaro dalla definizione stessa di commensurabilità. L'esistenza di numeri irrazionali è ben nota: non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2, ma un segmento che abbia una tale lunghezza è facilmente costruibile con il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele.

Nella trattazione moderna la distinzione non ha più molta importanza se non a livello filosofico ed epistemologico, visto che le misure effettive dei fenomeni fisici sono solo numeri razionali. Perché la matematica delle grandezze "continue" (cioè i numeri reali) possa essere applicata in fisica e funzioni è un problema filosofico e non matematico.

In notazioni usuali, la prima proprietà (assioma di Eudosso-Archimede) si può scrivere: dati i numeri reali a e b con $0 < a < b$, esiste un intero positivo n tale che $na > b$. La seconda proprietà si può esprimere come assioma degli "intervalli inscatolati": data una successione $[a_n \mathinner{.\,.} b_n]$ di intervalli tali che, per ogni n,

$$[a_{n+1} \mathinner{.\,.} b_{n+1}] \subseteq [a_n \mathinner{.\,.} b_n]$$

esiste un numero reale c che appartiene a tutti gli intervalli.

Con la notazione $[a\mathrel{.\,.}b]$ intendiamo l'insieme di tutti i numeri reali r tali che $a \le r \le b$. La parentesi tonda invece di quella quadra (a sinistra o a destra, o entrambe) significa sostituire $\le$ con $<$. Si noti che nell'enunciato precedente le parentesi quadre non possono essere sostituite dalle parentesi tonde; se consideriamo $a_n = 0$ e $b_n = 1/n$ per $n > 0$ (con $b_0 = 1$), non esiste alcun numero reale che appartiene a tutti gli intervalli della forma $(0\mathrel{.\,.}1/n)$.

Se esistesse un tale numero r, dovremmo avere $r > 0$ e anche $r < 1/n$ per ogni $n > 0$, contraddicendo l'assioma di Eudosso-Archimede. In altre parole, non potremmo prendere r come unità di misura per impostare un altro sistema di coordinate sulla retta.

La proprietà degli intervalli inscatolati si può esprimere in modo diverso, ma prima dovremo introdurre un po' di terminologia. Dato un insieme (non vuoto) A di numeri reali, diremo che un numero reale r è il *massimo* di A se $r \in A$ e $a \le r$ per ogni $a \in A$. Fin qui, niente di difficile. Ma anche insiemi molto ben educati come $(0\mathrel{.\,.}1)$ non hanno massimo: se r fosse il massimo, avremmo subito una contraddizione perché

$$r < \frac{r+1}{2} < 1$$

e il numero $(r+1)/2$ certamente appartiene all'intervallo $(0\mathrel{.\,.}1)$.

Esiste un concetto molto più flessibile di quello di *massimo*, quello di *estremo superiore*. Un numero r è l'estremo superiore di A se

1. $a \le r$, per ogni $a \in A$;
2. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $r - \varepsilon < a$.

Si noti che il massimo di un insieme ne è anche l'estremo superiore, perché possiamo scegliere proprio il massimo come elemento a nella seconda clausola. Invece 1 è l'estremo superiore di $(0\mathrel{.\,.}1)$; non è affatto richiesto che l'estremo superiore appartenga all'insieme! Che $a \le 1$ per ogni $a \in (0\mathrel{.\,.}1)$ è chiaro. Supponiamo che $\varepsilon > 0$; allora abbiamo certamente

$$1-\varepsilon < \frac{1+(1-\varepsilon)}{2} = \frac{2-\varepsilon}{2} < 1$$

e quindi anche la seconda clausola è soddisfatta.

Si lascia come esercizio la definizione di *minimo* e di *estremo inferiore*.

Dimostriamo ora il fatto importante che l'estremo superiore, se esiste, è unico. Supponiamo infatti che r e s, con $r < s$ abbiano entrambi diritto di chiamarsi estremo superiore di A. Per la definizione, usando $\varepsilon = s - r$, sappiamo che esiste $a \in A$ tale che

$$s - (s - r) < a$$

cioè $r < a$, che contraddice la prima clausola per r.

Qual è una condizione necessaria per l'esistenza dell'estremo superiore? Che l'insieme A abbia un *maggiorante*, cioè un numero m tale che $a \le m$, per ogni $a \in A$ (prima clausola). La condizione è sufficiente? Sì, e la risposta è nella proprietà degli intervalli inscatolati.

Partiamo da un elemento $a_0 \in A$ e prendiamo un maggiorante m_0 di A. Definiamo $b_0 = (a_0 + m_0)/2$. Ci sono due possibilità: che b_0 sia un maggiorante di A o che non lo sia. Nel primo caso definiamo $m_1 = b_0$ e $a_1 = a_0$; nel secondo caso esiste $a_1 \in A$ con $a_1 > b_0$ e definiamo $m_1 = m_0$.

A questo punto possiamo procedere allo stesso modo; se siamo arrivati al passo k, abbiamo due casi: che $b_k = (a_k + m_k)/2$ sia un maggiorante di A o che non lo sia. Nel primo caso definiamo $m_{k+1} = b_k$ e $a_{k+1} = a_k$; nel secondo esiste $a_{k+1} \in A$ con $a_{k+1} > b_k$ e definiamo $m_{k+1} = m_k$.

Si noti che $m_1 - a_1 \le (m_0 - a_0)/2$ e, più in generale, che

$$m_{k+1} - a_{k+1} \le \frac{m_k - a_k}{2}$$

e quindi $m_k - a_k \le (m_0 - a_0)/2^k$.

Per costruzione si ha $[a_{k+1} \mathrel{..} m_{k+1}] \subseteq [a_k \mathrel{..} m_k]$ e quindi sappiamo che esiste r appartenente a tutti gli intervalli. Vogliamo dimostrare che r è un maggiorante di A. Se non lo è, troviamo $a \in A$ con $a > r$. Tuttavia possiamo trovare k tale che $m_k < a$ perché $m_k - r \le (m_0 - a_0)/2^k$ (si completi) e questa è una contraddizione, visto che m_k è un maggiorante di A.

Analogamente, se $\varepsilon > 0$, esiste k tale che $(m_0 - a_0)/2^k < \varepsilon$ e dunque $r - \varepsilon$ non è un maggiorante di A (si completi).

Abbiamo usato l'assioma di Eudosso-Archimede, più l'ovvia disuguaglianza $2^k > k$.

Una caratterizzazione dell'estremo superiore di un insieme dotato di un maggiorante è: "l'estremo superiore di un insieme con un maggiorante è il minimo maggiorante". La si dimostri per esercizio. L'esistenza del minimo maggiorante (ammesso che l'insieme dei maggioranti non sia vuoto) è proprio l'oggetto del ragionamento che stiamo seguendo.

Non c'è bisogno di rifare tutto per l'estremo inferiore. Se A è un insieme non vuoto con un minorante m, allora l'insieme A' degli opposti degli elementi di A ha $-m$ come maggiorante e quindi ha estremo superiore r; è davvero facile verificare che $-r$ è l'estremo inferiore di A.

La proprietà dell'estremo superiore è in effetti equivalente a quella degli intervalli inscatolati: basta prendere come a l'estremo superiore degli a_k e b l'estremo inferiore dei b_k, verificando che l'intervallo $[a \mathrel{..} b]$ è contenuto in tutti gli intervalli inscatolati $[a_k \mathrel{..} b_k]$.

A pagina 170 si può trovare una dimostrazione dell'esistenza delle radici quadrate dei numeri reali positivi. Più avanti scopriremo un metodo che non solo fornisce le radici quadrate, ma anche le cubiche, quarte e così via, *senza* far uso di queste proprietà, se non in modo implicito.

Per finire, le notazioni. Dato un insieme non vuoto di numeri reali A denoteremo con

$$\max A, \qquad \sup A, \qquad \min A, \qquad \inf A$$

rispettivamente massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore di A, nel caso esistano. Talvolta si trova $\sup A = +\infty$ se A non ha un maggiorante e $\inf A = -\infty$ se non ha un minorante. Si tratta solo di notazione; ritroveremo questi simboli più avanti.

Estenderemo il campionario degli intervalli anche a quelli *illimitati*: se a è un numero reale, $(a \mathrel{..} \to)$ denota l'insieme dei reali maggiori di a; $[a \mathrel{..} \to)$ quello di prima con in più a. Similmente per $(\leftarrow \mathrel{..} a)$ e $(\leftarrow \mathrel{..} a]$. Molti scrivono $+\infty$ invece di $\to$ e $-\infty$ per $\leftarrow$.

Si noti che non sono gli unici insiemi senza maggioranti o minoranti. L'insieme dei numeri razionali non ha né maggioranti né minoranti, ma si guarda bene dall'essere un intervallo, perché tra due razionali distinti esiste almeno un numero irrazionale (di fatto infiniti).

L'insieme dei reali si denoterà con $\mathbb{R}$ (potrebbe anche essere $(\leftarrow \mathrel{..} \to)$); quello dei razionali con $\mathbb{Q}$ e quello dei naturali con $\mathbb{N}$.

Vediamo una dimostrazione relativa all'estremo superiore. Supponiamo che A e B siano insiemi non vuoti di numeri reali e definiamo $A + B$ come l'insieme che contiene tutte le somme di elementi di A con elementi di B. Per esempio, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 3\}$, avremo

$$A + B = \{1 + 0, 1 + 3, 2 + 0, 2 + 3\} = \{1, 2, 4, 5\}$$

ma né A né B saranno necessariamente finiti. Proviamo che, se A e B hanno un maggiorante, allora anche $A + B$ ha un maggiorante e che $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

La prima parte è facile: se x è un maggiorante di A e y è un maggiorante di B, allora $x+y$ è un maggiorante di $A+B$; infatti, se $a \in A$ e $b \in B$, avremo $a \le x$ e $b \le y$, da cui $a+b \le x+y$. Dunque sappiamo che esiste l'estremo superiore di $A+B$. Poniamo $u = \sup A$ e $v = \sup B$; allora $u+v$ è, per la stessa ragione di $x+y$, un maggiorante di $A+B$ e quindi $\sup(A+B) \le u+v$. Ci manca solo mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $c \in A+B$ tale che $c > u+v-\varepsilon$.

Siccome $u = \sup A$, sappiamo che esiste $a \in A$ con $a > u - \frac{\varepsilon}{2}$; analogamente, esiste $b \in B$ con $b > v - \frac{\varepsilon}{2}$. Allora, se $c = a+b \in A+B$, avremo

$$c = a + b > u - \frac{\varepsilon}{2} + v - \frac{\varepsilon}{2} = u + v - \varepsilon$$

e abbiamo terminato.

Si dimostri il risultato analogo per l'estremo inferiore. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m > 0, n > 0 \right\}.$$

0.2 FUNZIONI

In tutto il corso una *funzione* avrà come dominio un insieme di numeri reali e codominio i numeri reali. Senza entrare nel dettaglio, una funzione è una "regola" che permette di associare a un numero reale sul quale la funzione sia definita, un altro numero. Regole semplici sono "elevare al quadrato", "sommare uno al doppio", che si traducono nella notazione $x \mapsto x^2$ o $x \mapsto 2x+1$. Non ci si deve aspettare che tutte le funzioni siano definite tramite regole così semplici; anche

$$x \mapsto \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } 0 < x < 3 \\ 7 & \text{se } 3 < x < 4 \\ -x^2 & \text{se } x \ge 4 \end{cases}$$

è una funzione. Come si indichi la *variabile* è del tutto irrilevante. Se chiamiamo f quest'ultima funzione, con $f(x)$ si intende il valore di f in x; per esempio

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1, \qquad f(7/2) = 7, \qquad f(4) = -16.$$

Viceversa, $f(3)$ non ha senso, perché la regola data non associa alcun valore a 3.

Spesso si parlerà di casi come "la funzione $f(x) = 1/x$" o "la funzione $g(z) = \sqrt{z-1}$" senza dare esplicitamente il dominio. Volendo essere pignoli, si tratta di un'imprecisione; ma, quando il dominio si può desumere dal contesto o dalla regola stessa, intenderemo che si tratta del "più grande insieme" in cui la formula o l'insieme di formule abbia senso. Per esempio, il dominio di g sarà l'insieme dei numeri reali ≥ 1, quello di f l'insieme dei reali diversi da zero. Con simboli,

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x \ne 0\} = (\leftarrow .. 0) \cup (0 .. \rightarrow), \\ D(g) &= \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\} = [1 .. \rightarrow). \end{aligned}$$

Le funzioni di cui parleremo saranno solo funzioni a valori reali, definite su insiemi di numeri reali, sebbene il concetto di funzione sia molto più generale. In questo contesto potremo parlare di somma, prodotto e quoziente di funzioni purché definite su un dominio comune.

Date due funzioni f e g, la funzione somma $f+g$ è $x \mapsto f(x)+g(x)$ (dove entrambe siano definite), mentre fg è $x \mapsto f(x)g(x)$. Per il quoziente, definito in modo analogo, occorrerà ovviamente che il denominatore sia non nullo nel punto considerato.

Alcune funzioni hanno la proprietà di essere *periodiche*: una funzione f è periodica esiste un numero positivo T, il periodo, tale che, per ogni $x \in D(f)$, valga anche

$x+T, x-T \in D(f)$ e $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$. L'esempio canonico è quello delle funzioni trigonometriche seno e coseno, il cui periodo è 2π; la tangente ha periodo π. Notiamo che anche 2π è un periodo per la tangente e 4π per il seno; spesso *il periodo* si riferisce al *minimo periodo*.

Un esempio non trigonometrico si può costruire con la funzione *pavimento* (in inglese, *floor*): se x è un numero reale, $\lfloor x \rfloor$ indica il massimo intero n tale che $n \le x$. Per esempio, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. La funzione *parte frazionaria* definita da $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ è periodica, di minimo periodo 1. Infatti $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ e perciò

$$f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = f(x)$$

e si può dimostrare per esercizio che se $T > 0$ e $f(x+T) = f(x)$ per ogni x, allora T è intero; in altre parole, ogni periodo è intero e quindi il minimo periodo è 1.

Esiste anche la funzione *soffitto* (in inglese *ceiling*): $\lceil x \rceil$ indica il minimo intero n tale che $x \le n$. Si dimostri che $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

0.3 INDUZIONE

Uno dei metodi più ingegnosi escogitati dai matematici per dimostrare fatti che riguardano i numeri naturali è quello dell'*induzione*. L'idea non sembra molto promettente: se voglio salire una scala devo esserci davanti e saper salire da un gradino all'altro.

Un po' più formalmente, supponiamo di dover dimostrare che, per ogni numero naturale $k > 0$, si ha $2^k > k$. Mettiamoci davanti alla scala, cioè nel caso $k = 1$: ovviamente $2^1 > 1$ perché $2^1 = 2$. Supponiamo ora di essere arrivati al gradino k, cioè di sapere che $2^k > k$; sarà vero che $2^{k+1} > k+1$? Proviamo:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k \ge k + 1$$

perché $2k < k+1$ solo per $k = 0$. Dunque la nostra asserzione è dimostrata (e ovviamente vale anche per $k = 0$).

Una delle prime asserzioni per la cui dimostrazione si adoperò l'induzione è la cosiddetta *disuguaglianza di Bernoulli*: se $x \ge -1$, allora $(1+x)^k \ge 1 + kx$, per ogni naturale k.

Il gradino iniziale, in termine più tecnico il *passo base*, è quello di $k = 0$, che è ovvio, perché $a^0 = 1$ per ogni a, per definizione. La salita da un gradino all'altro (il *passo induttivo*) può essere trattato così:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\
&\ge (1+x)(1+kx) \\
&= 1 + x + kx + kx^2 \\
&= 1 + (k+1)x + kx^2 \\
&\ge 1 + (k+1)x
\end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza si adopera in modo essenziale l'ipotesi che $x \ge -1$, cioè che $1 + x \ge 0$, oltre che l'ipotesi induttiva. Nell'ultima si trascura il termine non negativo kx^2. Dall'ipotesi induttiva (cioè che siamo arrivati al gradino k) ricaviamo che la disuguaglianza vale anche al gradino successivo; perciò la disuguaglianza vale per ogni k.

Se proprio si vuole una giustificazione più dettagliata, domandiamoci se può esistere un numero naturale n per il quale non valga $(1+x)^n \ge 1 + nx$. Questo numero non può essere 0, perché il passo base è vero; allora $n > 0$ e dunque la disuguaglianza non può valere nemmeno per $n-1$, perché abbiamo dimostrato che sappiamo salire da un gradino al successivo. Ma allora in un numero finito di passi scenderemmo a 0, contraddizione.

Per esercizio, si dimostri che $(1+x)^k > 1+kx$ per ogni naturale $k \geq 2$ e ogni reale $x > -1$, purché $x \neq 0$. Il passo base dovrà essere quello di $k = 2$, ovviamente.

Per $x = 1$ la disuguaglianza ci dice che $2^k = (1+1)^k \geq 1+k$ e, siccome $1+k > k$, abbiamo dimostrato in un altro modo che $2^k > k$. Un'altra applicazione: supponiamo $t > 1$ e scriviamo $t = 1+x$, cioè $x = t-1$. Siccome $x \geq 0$, la disuguaglianza di Bernoulli ci dice che

$$t^k = (1+x)^k \geq 1+kx = 1+k(t-1).$$

In particolare, l'insieme delle potenze di t non ha maggioranti: se m fosse un maggiorante si avrebbe $k(t-1) \leq m-1$, per ogni naturale k, contro la proprietà di Eudosso-Archimede.

Se $0 < t < 1$, sappiamo che $1/t > 1$ e quindi che

$$\frac{1}{t^k} \geq 1 + k\left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{t + k(1-t)}{t}$$

da cui ricaviamo

$$t^k \leq \frac{t}{t + k(1-t)}.$$

Applicheremo questa disuguaglianza in seguito.

L'induzione è legata alla *ricorsione*. Non sono esattamente la stessa cosa, ma non è questo il luogo per discuterne. Possiamo definire concetti per ricorsione adoperando la stessa idea dell'induzione; per esempio

$$a^0 = 1, \qquad a^{n+1} = a^n \cdot a$$

è la definizione ricorsiva delle potenze. Qui si suppone tacitamente che n sia un naturale e il succo è che per calcolare a^3 si parte da 1, si moltiplica per a (cioè si calcola $a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$), si moltiplica per a (cioè si calcola $a^2 = a^{1+1} = a^1 \cdot a = a \cdot a$) e si moltiplica ancora per a ottenendo finalmente $(a \cdot a) \cdot a$.

Quanto fa 0^0? Se lo chiedete in giro otterrete risposte apparentemente contraddittorie. Per noi $0^0 = 1$. Non si confonda questo con la cosiddetta "forma indeterminata zero alla zero" che qualcuno potrebbe avere sentito nominare. Quella sarà indicata qui con un'abbreviazione speciale, cioè $[\![0^0]\!]$.

Una semplice disuguaglianza tra numeri reali ci sarà utile in seguito. Prima di tutto definiamo, per x reale,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si noti che $|-x| = |x|$ e $x^2 = |x|^2$; inoltre $|x| \leq y$ se e solo se $-y \leq x \leq y$.

Allora vale la *disuguaglianza triangolare* $|a+b| \leq |a|+|b|$. Infatti la disuguaglianza equivale a

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

che diventa $a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2$, cioè $ab \leq |ab|$, perché ovviamente $|a||b| = |ab|$. La disuguaglianza $x \leq |x|$ è ovvia dalla definizione.

Una forma diversa è $||a|-|b|| \leq |a-b|$ che equivale a

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|.$$

La disuguaglianza di sinistra si può scrivere $|(b-a)+a| \leq |b-a|+|a|$ che è la disuguaglianza triangolare. Similmente la disuguaglianza di destra è $|(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$.

1

Il metodo semplice per determinare l'equazione della retta tangente a una conica è quello di scrivere l'equazione di un fascio di rette e trovare quelle in cui l'intersezione con la conica dia origine a un'equazione di secondo grado con discriminante nullo.

Vorremmo però capirci di più, perché il metodo non può funzionare così com'è per trovare le tangenti a curve più complicate.

1.1 IL METODO DI FERMAT

Forse il primo ad accorgersi della proprietà che permette di trovare le tangenti fu Pierre de Fermat (1607(?)–1685): il famoso magistrato, matematico per passatempo, osservò che la variazione di una curva in prossimità di un massimo o minimo è minore che negli altri punti.

Facciamo l'esempio della funzione $f(x) = x^4$ che ha evidentemente un minimo in 0. Consideriamo il valore in h, con $h > 0$ 'piccolo': la differenza tra i valori di f in h e in 0 è allora h^4. Facciamo lo stesso considerando la differenza tra i valori di f in 1 e in $1 + h$:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= (1+h)^4 - 1 \\ &= 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 - 1 \\ &= h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h. \end{aligned}$$

La differenza tra le differenze è dunque

$$4h^3 + 6h^2 + 4h = 2h(h^2 + 3h + 1) > 0.$$

Spostandoci di poco da un punto non di minimo, il valore della funzione cresce di più di quando ci spostiamo della stessa quantità da un punto di minimo.

L'idea di Fermat per trovare massimi e minimi è dunque di cercare i punti dove la variazione sia 'piccola'. Facciamo un altro esempio: se si fa tracciare a un programma di calcolo come GeoGebra il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x$ sembra evidente che essa ha un massimo in -1 e un minimo in 1 (figura 1). Proviamo a fare i conti come Fermat:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 3x - 3h - x^3 + 3x \\ &= h(3x^2 + 3hx + h^2 - 3) \end{aligned}$$

e da questo possiamo vedere che la differenza è piccola quando spariscono i termini senza h nella parentesi, cioè quando $3x^2 - 3 = 0$ che dà proprio i valori -1 e 1.

Il senso è che le differenze diventano piccole con h, senza dipendere troppo dal valore di x proprio perché c'è il fattore h in evidenza. Intuitivamente, i punti di massimo e minimo sono quelli in cui la tangente è *orizzontale*, cioè parallela all'asse delle ascisse.

Adesso facciamo una cosa simile per trovare le tangenti: consideriamo un punto del grafico della funzione e il fascio di rette per esso. Per ogni retta calcoliamo la differenza dei valori spostandoci sulla retta o sul grafico. Più precisamente, calcoliamo per la retta $y = mx + q$ la differenza

$$f(t+h) - m(t+h) - q,$$

dove t è un'ascissa arbitraria, e vediamo che succede. Intanto determiniamo q: la retta deve passare per il punto di coordinate $(t, f(t))$, quindi

$$f(t) = mt + q$$

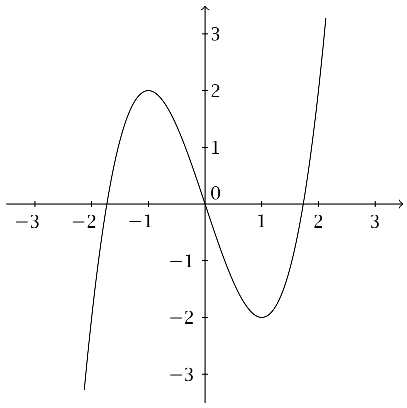


FIGURA 1: Grafico di $f(x) = x^3 - 3x$

cioè $q = f(t) - mt$. Per cominciare supponiamo $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned} f(t+h) - (m(t+h) + f(t) - mt) &= (t+h)^3 - mh - t^3 \\ &= 3ht^2 + 3h^2t - mh \\ &= h(3t^2 - m + 3ht) \end{aligned}$$

che diventa piccolo con h quando $m = 3t^2$. L'espressione precedente, ha una forma piuttosto interessante, quando la guardiamo in generale:

$$f(t+h) - (m(t+h) + f(t) - mt) = (f(t+h) - f(t)) - mh.$$

Questo suggerisce di guardare solo $f(t+h) - f(t)$, vedere se si può raccogliere h: a quel punto il fattore h si elimina ottenendo un valore che indicheremo con $f'(t)$ e la tangente si avrà quando $m = f'(t)$. O almeno così ragionava Fermat.

Proviamo con le curve che conosciamo, cioè le coniche; cominciamo con la parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ e applichiamo la ricetta:

$$\begin{aligned} f(t+h) - f(t) &= at^2 + 2aht + ah^2 + bt + bh + c - at^2 - bt - c \\ &= h(2at + b). \end{aligned}$$

Il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa t risulta $f'(t) = 2at + b$. Verifichiamolo con il metodo del discriminante, considerando il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - (at^2 + bt + c) = m(x - t) \end{cases}$$

che porta all'equazione risolvente

$$ax^2 + (b - m)x - at^2 - bt + mt = 0$$

il cui discriminante è

$$\Delta(m) = (b - m)^2 - 4a(-at^2 - bt + mt)$$

cioè

$$\begin{aligned} \Delta(m) &= b^2 - 2bm + m^2 + 4a^2t^2 + 4abt - 4atm \\ &= m^2 - 2(2at + b)m + 4a^2t^2 + 4abt + b^2 \\ &= m^2 - 2(2at + b)m + (2at + b)^2 \\ &= (m - (2at + b))^2. \end{aligned}$$

L'equazione in m data da $\Delta(m) = 0$ ha una sola soluzione che è proprio

$$m = 2at + b.$$

Almeno nel caso della parabola i due metodi coincidono!

Proviamone uno più complicato, l'iperbole grafico di $f(x) = 1/x$. Il metodo di Fermat dice di calcolare $f(t+h) - f(t)$, cioè

$$f(t+h) - f(t) = \frac{1}{t+h} - \frac{1}{t} = \frac{-h}{t(t+h)}$$

Qui il problema sembra più difficile; allora facciamo come Fermat: eliminiamo il fattore h e in quello che rimane poniamo $h = 0$. Otteniamo $f'(t) = -1/t^2$.

Proviamo con il metodo del discriminante: il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y - \dfrac{1}{t} = m(x - t) \end{cases}$$

ha come equazione risolvente

$$mtx^2 - (mt^2 - 1)x - t = 0$$

e il discriminante è

$$\Delta(m) = m^2t^4 - 2mt^2 + 1 + 4mt^2 = (t^2m + 1)^2$$

che si annulla per $m = -1/t^2$, esattamente come prima.

Rimane da discutere la circonferenza. Con una traslazione si può supporre che la circonferenza abbia centro nell'origine e, prendendo come unità di misura il raggio, l'equazione della semicirconferenza 'superiore' è il grafico di $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Dobbiamo dunque calcolare

$$\begin{aligned} f(t+h) - f(t) &= \sqrt{1 - (t+h)^2} - \sqrt{1 - t^2} \\ &= \frac{(1 - (t+h)^2) - (1 - t^2)}{\sqrt{1 - (t+h)^2} + \sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{h(-2t - h)}{\sqrt{1 - (t+h)^2} + \sqrt{1 - t^2}}. \end{aligned}$$

Eliminando il fattore h e ponendo $h = 0$ in quello che rimane si ottiene

$$f'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Proviamo con il metodo geometrico: il fascio di rette per il punto (t, u), dove $u = \sqrt{1 - t^2}$, consiste delle rette di equazione $y - u = m(x - t)$ e di queste dobbiamo calcolare la distanza dal centro per determinare quella con distanza 1: se scriviamo la retta nella forma $mx - y - mt + u = 0$ l'equazione diventa

$$\frac{|m0 - 0 - mt + u|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

cioè, elevando al quadrato,

$$m^2t^2 - 2mtu + u^2 = m^2 + 1$$

che diventa

$$(t^2 - 1)m^2 - 2mtu + u^2 - 1 = 0.$$

Questa ha certamente discriminante nullo e quindi la soluzione è

$$m = \frac{2tu}{2(t^2 - 1)} = \frac{tu}{-u^2} = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

1.2 COME GIUSTIFICARE IL METODO DI FERMAT

Consideriamo una funzione facile, $f(x) = x^4$; supponiamo $h \neq 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{t^4 + 4ht^3 + 6h^2t^2 + 4h^3t + h^4 - t^4}{h} \\ &= \frac{h(4t^3 + 6ht^2 + 4h^2t + h^3)}{h} \\ &= 4t^3 + 6ht^2 + 4h^2t + h^3. \end{aligned}$$

Quando h diventa piccolo in valore assoluto, il valore dell'espressione diventa sempre più vicino a $4t^3$. Se facciamo i conti con $f(x) = x^3$, con lo stesso metodo otteniamo $3t^2$.

Più in generale, con $f(x) = x^n$, possiamo usare lo sviluppo del binomio, ma senza scriverlo tutto. Ricordiamo che, per $n > 1$,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + b^2K_n(a, b)$$

dove $K_n(a, b)$ è un'espressione algebrica in a e b, senza frazioni.

▶ Se $n = 2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $K_2(a, b) = 1$. Supponiamo di conoscere l'espressione $K_n(a, b)$; allora

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a^n + na^{n-1}b + b^2K_n(a, b)) \\ &= a^{n+1} + a^nb + na^nb + na^{n-1}b^2 + (a + b)b^2K_n(a, b) \\ &= a^{n+1} + (n + 1)a^nb + b^2(na^{n-1} + (a + b)K_n(a, b)) \end{aligned}$$

e quindi $K_{n+1}(a, b) = na^{n-1} + (a + b)K_n(a, b)$. ◀

Tenendo conto di quanto appena detto, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{t^n + nht^{n-1} + h^2K_n(t, h) - t^n}{h} \\ &= nt^{n-1} + hK_n(t, h) \end{aligned}$$

e, quando h diventa piccolo in valore assoluto, il valore dell'espressione si avvicina sempre di più a nt^{n-1}.

Esprimiamo l'affermazione che il valore dell'espressione $F(h)$ si avvicina al valore l quando h diventa piccolo in valore assoluto con la notazione tradizionale

$$\lim_{h \to 0} F(h) = l$$

senza, per ora, definirne formalmente il significato preciso. L'importante è che si arrivi a un'espressione $g(h)$, la più semplice possibile, nell'ipotesi che $h \neq 0$.

Quello che abbiamo dimostrato è: se $f(x) = x^n$, allora $f'(x) = nx^{n-1}$, almeno nel caso $n > 1$. Per $n = 1$ la faccenda è ovvia: se $f(x) = x$, allora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = 1$$

e quindi certamente $f'(x) = 1 = 1x^0$. Per $n = 0$ la formula non ha significato, perché si dovrebbe considerare x^{-1} che è definita solo per $x \neq 0$. Ma è certo che, se $f(x) = x^0 = 1$, si ha $f'(x) = 0$.

Come facciamo per i polinomi in genere? E per le frazioni? Abbiamo bisogno di qualche strumento in più.

Date le funzioni f e g, entrambe definite almeno sull'intervallo $(p \mathrel{..} q)$, possiamo sommarle e moltiplicarle per numeri; il rapporto di Fermat per la funzione $x \mapsto af(x)+bg(x)$ è allora

$$\frac{(af(x+h)+bg(x+h))-(af(x)+bg(x))}{h} = a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

e dunque, se poniamo $F(x) = af(x) + bg(x)$, abbiamo

$$F'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Ne segue facilmente che per il polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ si ha

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Questo torna con il conto per la tangente alla parabola.

Un po' più complicato quando $F(x) = f(x)g(x)$, ma nemmeno tanto:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\\ &\quad+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

e perciò

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Quest'ultima formula fu scoperta da Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) parecchio tempo dopo che Fermat aveva compiuto i suoi studi. La possiamo usare per calcolare le tangenti alla circonferenza: consideriamo $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = f(x)$ nella formula precedente. Allora

$$F'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f'(x)f(x).$$

Ma $F(x) = 1 - x^2$ e quindi conosciamo già $F'(x) = -2x$. Dunque

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{2f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Questo è in accordo con quanto già visto a pagina 15. L'espressione non ha senso per $x = -1$ e $x = 1$ e del resto sappiamo che in quei punti la tangente è verticale, quindi non ha coefficiente angolare.

Facciamo qualche altro trucco del genere: se $f(x) = x^n$, con $n < 0$, e $g(x) = x^{-n}$, abbiamo $F(x) = f(x)g(x) = 1$ e quindi, essendo $F'(x) = 0$ (per $x \neq 0$), abbiamo

$$0 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad f'(x) = -f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}$$

e, sostituendo,

$$f'(x) = -x^n\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-n}} = nx^{n-1}$$

e dunque la formula è esattamente la stessa.

Con un trucco analogo possiamo eseguire il calcolo per qualsiasi frazione algebrica: consideriamo $F(x) = f(x)/g(x)$; allora $f(x) = F(x)g(x)$ e quindi

$$f'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

da cui

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}$$

che con una facile manipolazione diventa

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

1.3 IL LOGARITMO E L'ESPONENZIALE

Per definizione, il logaritmo di a è, per $a > 0$, come l'area delimitata dal segmento $(1,0)\_(a,0)$ sull'asse delle ascisse, dai segmenti $(1,0)\_(1,1)$ e $(a,0)\_(a,1/a)$ e dall'arco di iperbole di equazione $y = 1/x$ fra i punti $(1,1)$ e $(a,1/a)$. Se $0 < a < 1$ l'area viene presa con segno negativo, se $a > 1$ con segno positivo, si veda la figura 2, dove viene presentata anche una definizione alternativa e più 'geometrica'.

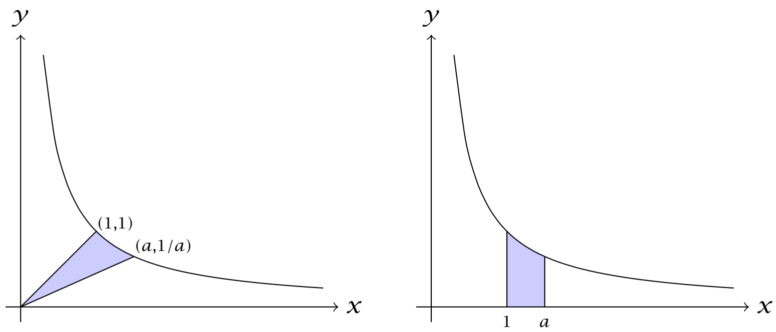


FIGURA 2: Definizioni di $\log a$ tramite la curva $xy = 1$; le due aree colorate sono uguali e valgono $\log a$, per definizione

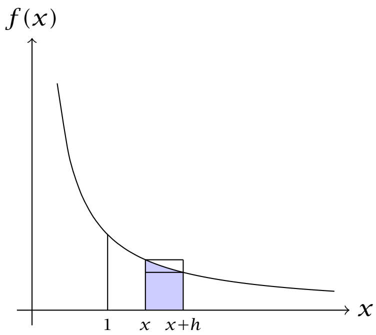


FIGURA 3: Il calcolo del rapporto di Fermat per $\log x$

Vogliamo ora valutare l'espressione $\log(x+h) - \log x$, supponendo prima $h > 0$ e $x > 1$. Si tratta ancora, per differenza di aree, di un'area delimitata da tre segmenti e un arco dell'iperbole. Ma possiamo considerare i rettangoli 'inscritto' e 'circoscritto' come si vede nella figura 3: avremo allora

$$\frac{h}{x+h} \le \log(x+h) - \log x \le \frac{h}{x}$$

e dunque

$$\frac{1}{x+h} \le \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \le \frac{1}{x}.$$

Se h si avvicina a 0, abbiamo che $1/(x+h)$ si avvicina a $1/x$ e dunque possiamo concludere che

$$\log' x = \frac{1}{x}.$$

Gli altri casi (cioè $h < 0$ e $0 < x < 1$) si trattano infatti in modo simile.

La tangente alla curva di equazione $y = \log x$ nel punto di ascissa t ha dunque equazione $y - \log t = (x-t)/t$. Scambiando i due assi la curva diventa quella di equazione $y = \exp x$ e dunque la tangente nel punto di ordinata t ha equazione $x - \log t = (y-t)/t$; se $t = \exp u$ otteniamo l'equazione $y - \exp u = (x-u)\exp u$, cioè il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa u è $\exp u$ e questo equivale a

$$\exp' x = \exp x.$$

Vedremo più avanti un metodo meno 'geometrico' per eseguire i calcoli sulle funzioni inverse.

1.4 DERIVATA E TANGENTE

Cerchiamo di essere un poco più formali. La funzione f definita nell'intervallo $(p \mathrel{..} q)$ è derivabile in $x \in (p \mathrel{..} q)$ se possiamo scrivere, secondo quanto detto prima,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

cioè nel caso in cui il rapporto di Fermat si avvicina a un valore, che denotiamo con $f'(x)$, quando h diventa piccolo in valore assoluto. Non cerchiamo, per ora, il pelo nell'uovo nel dire per bene che cosa significhi *avvicinarsi quando h diventa piccolo*, di fatto è uno dei concetti più complicati del calcolo differenziale.

Il valore $f'(x)$ si chiama la *derivata* di f nel punto x e, secondo l'intuizione di Fermat, dovrebbe essere uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di coordinate $(x, f(x))$. Abbiamo visto che, nel caso di alcune curve note, questo calcolo determina effettivamente la tangente.

Non sempre le cose vanno come ci si aspetta, per esempio con la funzione $f(x) = |x|$; se calcoliamo il rapporto di Fermat in 0, abbiamo

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

e questo vale 1 quando $h > 0$, ma vale -1 quando $h < 0$. Dunque il rapporto di Fermat non si avvicina a un valore quando h diventa piccolo e ne concludiamo che il grafico della funzione non ha una tangente nel punto di ascissa 0. E possiamo effettivamente concordare che non ha molto senso parlare di tangente in quel punto.

Ma come definiamo la tangente, in generale? Facile: se per la funzione f definita nell'intervallo $(p \mathrel{..} q)$ e per $t \in (p \mathrel{..} q)$ possiamo scrivere

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t),$$

allora la tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa t è proprio la retta di equazione
$$y - f(t) = (x - t)f'(t)$$
cioè la retta passante per $(t, f(t))$ di coefficiente angolare $f'(t)$. In altre parole, prendiamo l'intuizione di Fermat come *definizione* della tangente.

Generalizziamo la notazione: scriveremo
$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = l,$$
dove φ è una qualsiasi funzione, se $\varphi(h)$ si avvicina a l quando h diventa piccolo in valore assoluto (più avanti sostituiremo questo concetto intuitivo con una formulazione rigorosa, per ora accetteremo il linguaggio informale). Possiamo allora riscrivere la nozione di derivata nel modo seguente: $f'(x)$ è la derivata di f nel punto x se e solo se
$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$$
dove $\varphi(h) = (f(x + h) - f(x) - hf'(x))/h$ e
$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$
Infatti, se $f'(x)$ è la derivata, sappiamo che
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \varphi(h). \end{aligned}$$
Il viceversa è del tutto analogo, basta seguire le uguaglianze alla rovescia.

Che cos'è dunque la tangente? È la retta che meglio approssima la curva nelle vicinanze del punto. Chiaramente non possiamo definire come tangente una retta che abbia un solo punto in comune con la curva; l'esempio di $f(x) = x^3 - 3x$ è chiaro: la tangente in 1 è orizzontale e ha equazione $y = -2$, ma questa retta incontra la curva in un altro punto. Infatti da $x^3 - 3x = -2$ segue $x = 1$ oppure $x = -2$. Un altro esempio è la parabola di equazione $y = x^2$: nessuna retta verticale è tangente, eppure tutte queste rette incontrano la curva in un solo punto.

L'idea di Fermat, se la riguardiamo dopo queste ultime riflessioni, è esattamente questa: la tangente (se esiste) è quella retta che più si avvicina al grafico della funzione, quando ci avviciniamo al punto che stiamo considerando.

1.5 CURVE ALGEBRICHE

Descartes pose il problema, che considerava assai difficile, di determinare le tangenti alla curva di equazione
$$x^3 + y^3 = 3axy$$
e Fermat lo risolse in un modo tale che perfino Descartes dovette riconoscere la superiorità rispetto al suo metodo.

Se (u, v) sono le coordinate di un punto della curva, il fascio di rette con centro in quel punto è dato dalle rette di equazione
$$y = m(x - u) + v$$

(sempre con l'eccezione della retta verticale). Proviamo a sostituire nell'equazione della curva, ottenendo

$$x^3 + (m(x-u)+v)^3 - 3ax(m(x-u)+v) = 0$$

che porta all'equazione

$$x^3 + m^3(x-u)^3 + 3m^2(x-u)^2v + 3m(x-u)v^2 + v^3 - 3amx(x-u) - 3avx = 0$$

e, semplificando, a

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

dove abbiamo indicato i coefficienti con A, B, C e D:

$$\begin{cases} A = 1 + m^3 \\ B = -3um^3 + 3m^2v - 3am \\ C = 3m^3u^2 - 6m^2uv + 3mv^2 + 3amu - 3av \\ D = -m^3u^3 + 3m^2u^2v - 3muv^2 + v^3 \end{cases}$$

per non portarci dietro troppe cose complicate.

Nel caso delle coniche, il metodo usuale è di annullare il discriminante. Possiamo fare qualcosa di simile qui? L'idea è che u deve essere una radice *doppia* dell'equazione, cioè che il polinomio $(x-u)^2$ divida il polinomio $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Vediamo il caso generale: abbiamo un polinomio $P(x)$ e vogliamo trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché $P(x)$ sia divisibile per $(x-u)^2$. Supponiamo dunque che $P(x) = (x-u)^2Q(x)$ e *calcoliamo la derivata* di ambo i membri:

$$P'(x) = (2x-2u)Q(x) + (x-u)^2Q'(x).$$

È chiaro che, in questo caso, $P'(u) = 0$, cioè u è radice anche della derivata. Proviamo a verificare che vale anche il viceversa: supponiamo perciò che $P'(u) = 0$, dove anche $P(u) = 0$. Se eseguiamo la divisione di $P(x)$ per $(x-u)^2$, abbiamo

$$P(x) = (x-u)^2Q(x) + ax + b$$

e possiamo di nuovo calcolare le derivate:

$$P'(x) = (2x-2u)Q(x) + (x-u)^2Q'(x) + a.$$

Applicando l'ipotesi che $P'(u) = 0$ otteniamo $a = 0$. Applicando l'ipotesi che $P(u) = 0$, troviamo anche $b = 0$ e dunque il resto della divisione è zero.

Abbiamo trovato il trucco che ci permette di calcolare le tangenti? Se pensiamo al caso delle coniche sembra proprio di sì. Perciò, nel caso di Fermat e del *folium* di Descartes, basta verificare quando u è radice anche del polinomio

$$3Ax^2 + 2Bx + C.$$

L'equazione diventa allora

$$\begin{multline} 3(1+m^3)u^2 + 2(-3um^3 + 3m^2v - 3am)u \\ + (3m^3u^2 - 6m^2uv + 3mv^2 + 3amu - 3av) = 0 \end{multline}$$

che a sua volta si semplifica in

$$u^2 - amu + mv^2 - av = 0$$

cioè

$$m = \frac{u^2 - av}{au - v^2}$$

eccetto nel caso in cui $au = v^2$. Questo caso, con la condizione

$$u^3 + v^3 - 3auv = 0$$

corrisponde a

$$\frac{v^6}{a^3} + v^3 - 3v^3 = 0$$

cioè a $v = 0$ oppure $v = a\sqrt[3]{2}$. Il caso di $v = a\sqrt[3]{2}$ corrisponde a $u = a\sqrt[3]{4}$ che è esattamente il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante del punto in cui la tangente è orizzontale ($m = 0$, cioè $av = u^2$).

Il caso di $v = 0$ corrisponde, naturalmente a $u = 0$, dove l'equazione originale va studiata a parte. Siccome il caso è semplice, lo trattiamo da capo: intersechiamo la curva con una retta di equazione $y = mx$:

$$x^3(1 + m^3) - 3amx^2 = 0.$$

Qui sembra che ogni retta sia tangente, ma un disegno della curva prova che così non è: in realtà qui le tangenti sono due, precisamente gli assi cartesiani. Si tratta di un *punto doppio*, concetto sul quale non indagheremo più a fondo.

Quello che abbiamo imparato è che la derivata non dà solo le tangenti: per esempio, fornisce un criterio affinché un polinomio abbia radici multiple.

Vediamo il caso del polinomio $P(x) = x^3 + px + q$, con $P'(x) = 3x^2 + p$. Dunque non ci possono essere radici multiple se $p > 0$; se invece $p \le 0$, i numeri candidati a essere radice multipla sono $r = \sqrt{-p/3}$ e $-r$. Proviamo a sostituire:

$$P(r) = r^3 + pr + q = r(r^2 + p) + q = \frac{2}{3}pr + q$$

mentre

$$P(-r) = -r^3 - pr + q = -r(r^2 + p) + q = -\frac{2}{3}pr + q$$

e uno di questi valori è zero quando $9q^2 = 4p^2r^2$ cioè, scritto in altro modo,

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0.$$

Nel caso del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ si ha, ovviamente, $P'(x) = 2ax + b$ e si ha una radice multipla solo quando $-b/2a$ è radice di $P(x)$, cioè quando

$$a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

che si semplifica in $4ac - b^2 = 0$, condizione ben nota.

1.6 SENO E COSENO

Cerchiamo di ampliare la nostra conoscenza di derivate, trattando le importanti funzioni trigonometriche. Proviamo dunque a scrivere il rapporto di Fermat per il seno:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin h}{h}\cos x + \frac{\cos h - 1}{h}\sin x.\end{aligned}$$

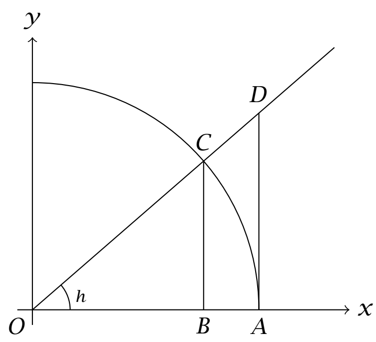


FIGURA 4: Definizione di seno e coseno

Sembra evidente che dobbiamo calcolare i due limiti

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}.$$

Il problema qui è di confrontare $\sin h$ con h; naturalmente la misura degli angoli è in radianti, come si fa sempre in matematica teorica. È proprio la definizione di radiante insieme a quella di seno e coseno ad aiutarci, la rivediamo nella figura 4. Supponiamo, per cominciare, che $0 < h < \pi/2$.

Con un po' di trigonometria elementare riconosciamo che, con $OA = 1$, si ha

$$OB = \cos h, \quad BC = \sin h, \quad AD = \tan h.$$

È anche evidente che l'area del triangolo OBC è minore dell'area del settore circolare OAC che, a sua volta, è minore dell'area del triangolo OAD. La lunghezza dell'arco AC è, per definizione, h e quindi l'area s del settore circolare è $h/2$: infatti vale la proporzione

$$s : \pi = h : 2\pi.$$

L'area del triangolo OBC è $(\sin h \cos h)/2$, quella del triangolo OAD è $(\tan h)/2$. Dunque possiamo scrivere

$$\sin h \cos h \le h \le \tan h.$$

Dalla disuguaglianza di sinistra, ricordando che $0 < h < \pi/2$, otteniamo

$$\frac{\sin h}{h} \le \frac{1}{\cos h},$$

da quella di destra abbiamo

$$\cos h \le \frac{\sin h}{h}$$

e perciò possiamo scrivere

$$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le \frac{1}{\cos h}. \tag{*}$$

Questo per $0 < h < \pi/2$. Se, invece, $-\pi/2 < h < 0$, avremo $0 < -h < \pi/2$ e quindi

$$\cos(-h) \le \frac{\sin(-h)}{-h} \le \frac{1}{\cos(-h)}$$

che si trasforma esattamente nella (*), che quindi vale per ogni h tale che $-\pi/2 < h < \pi/2$, $h \ne 0$.

Se ora facciamo diventare piccolo h, sia $\cos h$ sia $1/\cos h$ si avvicinano a 1; dunque abbiamo provato che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1.$$

Molto bene: siamo a metà dell'opera. Per valutare l'altra espressione usiamo un altro trucco che torna spesso utile:

$$\begin{aligned}\frac{\cos h-1}{h}&=\frac{\cos h-1}{h}\,\frac{\cos h+1}{\cos h+1}\\&=\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\&=\frac{\sin h}{h}\,\frac{-\sin h}{\cos h+1}.\end{aligned}$$

Abbiamo spezzato la frazione in due parti; la prima ha limite 1 e la seconda si avvicina a 0, dunque il prodotto si avvicina a 0. Ecco qui il risultato finale:

$$\sin' x=\cos x.$$

Possiamo provare con il coseno, adesso: con la formula di addizione e raccogliendo opportunamente abbiamo

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\cos x-\frac{\sin h}{h}\sin x$$

e usando i risultati di prima possiamo scrivere

$$\cos' x=-\sin x.$$

Per la funzione tangente non è un problema: $\tan x=\sin x/\cos x$ e dunque possiamo applicare la formula già vista:

$$\begin{aligned}\tan' x&=\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{(\cos x)^2}\\&=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x.\end{aligned}$$

Questa, naturalmente, vale dove sia definita la tangente (trigonometrica), cioè la funzione 'tan'.

1.7 PROBLEMI

Tutto quanto abbiamo visto sembra ragionevole, e così infatti pensavano i matematici fino a che qualcosa cominciò ad andare storto. Non tanto per il fatto che ogni tanto ci si imbatteva in funzioni che non ammettono la derivata in qualche punto: la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$ è un esempio. Si provi a calcolarne la derivata in x e si veda che l'espressione non ha senso per $x=0$, infatti la tangente in quel punto è verticale. (Suggerimento: la radice cubica è l'inversa di elevare al cubo.)

Ma che dire quando Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) propose la seguente funzione

$$D(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x \text{ è razionale,}\\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale,}\end{cases}$$

per la quale il rapporto di Fermat è

$$\frac{D(x+h)-D(x)}{h}$$

che però, quando h diventa piccolo, continua a saltare tra 0 e 1 quando x è razionale, tra -1 e 0 quando x è irrazionale. Questo perché tra due numeri reali distinti ci sono sempre sia razionali sia irrazionali.

Si potrebbe ovviare al problema dicendo che facciamo diventare h piccolo solo usando valori razionali. In questo modo il rapporto di Fermat per D si avvicinerebbe a 0 per ogni x. Ma questo va contro un altro importante risultato: se la derivata di una funzione è 0 in ogni punto, la funzione è costante. Lo vedremo più avanti, dando le opportune ipotesi affinché sia davvero valido; certamente, però, la funzione di Dirichlet non è costante.

Vediamo il vero motivo per il quale la funzione di Dirichlet non può ammettere derivata in alcun punto. Abbiamo già visto che se f è derivabile in x, possiamo scrivere

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$$

dove $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$. Ma allora $h\varphi(h)$ si deve avvicinare a 0 quando h diventa piccolo. Dalla formula segue dunque che $f(x+h)$ deve avvicinarsi a $f(x)$ quando h diventa piccolo. E questo non è certamente vero per la funzione di Dirichlet, qualunque via usiamo per "far diventare piccolo h".

Ci sono altri problemi che però furono riconosciuti solo più tardi; un esempio è proprio il calcolo della derivata di seno e coseno nella quale si deve adoperare il concetto di area di una figura delimitata da una linea curva. Si potrebbe evitare il concetto di area, ma solo trasferendo il problema sulla lunghezza dell'arco AC nella figura 4: intuitivamente questa lunghezza è maggiore di quella del segmento BC e minore di quella del segmento AD: ma la lunghezza dell'arco o della circonferenza stessa è ben definita? Renderemo più avanti del tutto rigoroso il concetto di area e quindi il problema sarà superato.

2

Nella prima metà del XIX secolo, i problemi a cui abbiamo accennato diventarono sempre più evidenti, già prima che Dirichlet proponesse la sua funzione strana. La soluzione fu trovata prima da Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) in termini non del tutto rigorosi; Heinrich Eduard Heine (1821–1881) la migliorò e la versione definitiva fu data da Karl Weierstraß (1815–1897): occorre essere più cauti nel trattare le funzioni e non saltare a conclusioni affrettate. La funzione di Dirichlet è strana perché non soddisfa la condizione di *continuità*:

$$\text{se } h \text{ diventa piccolo, } f(x+h) \text{ si avvicina a } f(x).$$

Il grande contributo di Cauchy, Heine e Weierstraß fu di rendere preciso il significato della frase che dovrebbe definire la continuità. La loro idea può essere illustrata pensando alle approssimazioni: se vogliamo calcolare la radice quarta di 1,2, possiamo prendere un valore approssimato della radice quadrata di 1,2 e di questo calcolare la radice quadrata. Naturalmente, più cifre decimali esatte consideriamo per l'approssimazione di $\sqrt{1{,}2}$, più cifre decimali esatte avremo per il valore approssimato di $\sqrt[4]{1{,}2}$; per averne, per esempio, cinque, non ci bastano altrettante cifre esatte per $\sqrt{1{,}2}$.

Con un programma di calcolo possiamo verificare che, con 20 cifre esatte,

$$\sqrt[4]{1{,}2} \approx 1{,}04663513939210555578.$$

Vediamo nella tabella 1 i valori che si ottengono calcolando la radice quadrata delle varie approssimazioni di $\sqrt{1{,}2}$; nell'ultima riga riportiamo, per controllo, il valore scritto prima.

$\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}09544511501033222691$	
Approssimazione di $\sqrt{1{,}2}$	Radice quadrata
1	1
1,1	1,04880884817015154699
1,095	1,04642247682281748663
1,0954	1,04661358676447536360
1,09545	1,04663747305358792986
1,095445	1,04663508444920763605
$\sqrt[4]{1{,}2}$	1,04663513939210555578

TABELLA 1: Approssimazione di $\sqrt[4]{1{,}2}$

Questo funziona perché la nostra intuizione dice che la radice quadrata soddisfa la condizione di continuità. L'esempio ci dice che, se vogliamo un valore abbastanza preciso della radice quarta, dobbiamo avvicinarci a sufficienza al valore vero della variabile e questo grado di avvicinamento dipenderà dalla tolleranza che imponiamo. Una funzione che soddisfa questa condizione si dirà *continua*.

La simbologia tradizionale indica con ε la tolleranza per il valore finale e con δ la restrizione che risulta per la variabile. Per dire che il valore si discosta da quello vero entro la tolleranza ε si scriverà

$$|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon$$

e dunque la definizione segue in modo naturale.

DEFINIZIONE. *La funzione f si dice* continua *in x se, qualunque sia la tolleranza $\varepsilon > 0$, si può trovare un grado di avvicinamento $\delta > 0$ in modo che, ogni volta che $|h| \le \delta$, si abbia $|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon$.*

Ora non ci resta che trovare funzioni continue. Il primo esempio è facile e quasi ovvio: $f(x) = x$. Prendiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$ e consideriamo la disequazione

$$|(x+h) - x| \le \varepsilon$$

le cui soluzioni sono, evidentemente, $|h| \le \varepsilon$. In questo caso, ed era ovvio fin dal principio, il grado di avvicinamento è uguale alla tolleranza.

Proviamo con qualcosa di più complicato: $f(x) = x^2$. La disequazione da esaminare è

$$|(x+h)^2 - x^2| \le \varepsilon$$

che diventa

$$|2xh + h^2| \le \varepsilon.$$

Una disuguaglianza del genere equivale al sistema di disequazioni

$$-\varepsilon \le 2xh + h^2 \le \varepsilon$$

cioè al sistema

$$\begin{cases} h^2 + 2xh - \varepsilon \le 0 \\ h^2 + 2xh + \varepsilon \ge 0 \end{cases}$$

che possiamo risolvere nel modo usuale. La prima disequazione ha discriminante positivo $4x^2 + 4\varepsilon$ ed è soddisfatta per valori interni all'intervallo delle radici:

$$-x - \sqrt{x^2 + \varepsilon} < h < -x + \sqrt{x^2 + \varepsilon}.$$

La seconda è soddisfatta per ogni h quando il discriminante $4x^2 - 4\varepsilon$ non è positivo, cioè per $\varepsilon \ge x^2$; altrimenti è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici. Quindi, se $0 < \varepsilon < x^2$, le soluzioni sono date da

$$h \le -x - \sqrt{x^2 - \varepsilon} \quad \text{oppure} \quad h \ge -x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}.$$

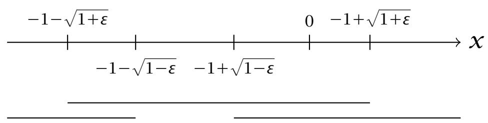
Dobbiamo preoccuparci di quando $\varepsilon \ge x^2$? No, almeno se $x \ne 0$: se riusciamo a trovare un grado di avvicinamento che produca la tolleranza richiesta quando $0 < \varepsilon < x^2$, questo andrà bene anche per valori maggiori di ε. Saremo più restrittivi del necessario, ma a noi interessa trovare *un* opportuno grado di avvicinamento. Dunque possiamo supporre $0 < \varepsilon < x^2$, perché nel caso di $x = 0$ le due disequazioni sono $h^2 - \varepsilon \le 0$ e $h^2 + \varepsilon \ge 0$; la seconda è verificata per ogni h, la prima per $-\sqrt{\varepsilon} \le h \le \sqrt{\varepsilon}$ e si può prendere $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Un produttore di ingranaggi sa che, tarando i suoi strumenti in un certo modo, i pezzi che produce rispettano la tolleranza richiesta dall'industria che ha commissionato gli ingranaggi; un'altra industria fa un'ordinazione, chiedendo una tolleranza meno rigorosa: il produttore può benissimo mantenere la taratura allo stesso livello. Forse spenderà di più, ma di certo fornisce pezzi adeguati alle richieste.

Trasponendo al nostro caso, la questione del costo non si pone: i numeri reali sono gratis.

Facciamoci un'idea della situazione; con la calcolatrice troviamo i valori delle quantità in gioco, quando $x = 1$:

	$\varepsilon = 0{,}01$
$-1-\sqrt{1+\varepsilon}$	$-2{,}00498756211208902702$
$-1+\sqrt{1+\varepsilon}$	$0{,}00498756211208902702$
$-1-\sqrt{1-\varepsilon}$	$-1{,}99498743710661995473$
$-1+\sqrt{1-\varepsilon}$	$-0{,}00501256289338004527$



Si noti che il grafico delle soluzioni non è in scala. L'intuizione, guardando i valori della tabella, è che la tolleranza richiesta sia $\delta = -x + \sqrt{x^2+\varepsilon}$, quando $x > 0$. Ci basta in effetti vedere che

$$-x + \sqrt{x^2+\varepsilon} \le \left|-x + \sqrt{x^2-\varepsilon}\,\right|.$$

Con evidenti passaggi, la disuguaglianza si trasforma in altre equivalenti:

$$\begin{gathered}
-x + \sqrt{x^2+\varepsilon} \le x - \sqrt{x^2-\varepsilon} \\
\sqrt{x^2+\varepsilon} \le 2x - \sqrt{x^2-\varepsilon} \\
x^2+\varepsilon \le 4x^2 - 4x\sqrt{x^2-\varepsilon} + x^2 - \varepsilon \\
4x\sqrt{x^2-\varepsilon} \le 4x^2 - \varepsilon \\
16x^4 - 16x^2\varepsilon \le 16x^4 - 8x^2\varepsilon + \varepsilon^2 \\
0 \le 8x^2\varepsilon + \varepsilon^2
\end{gathered}$$

e l'ultima è certamente soddisfatta. Abbiamo dunque dimostrato che, ponendo $\delta = -x + \sqrt{x^2+\varepsilon}$, quando $|h| \le \delta$, si avrà $|(x+h)^2 - x^2| \le \varepsilon$. Per il caso $x < 0$ non occorre rifare i calcoli, perché basta cambiare x in $-x$.

Non sarà necessario eseguire questi calcoli, in futuro, soprattutto quelli finali per determinare δ. Quello che conta è scoprire che l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon$$

forma un *intorno* di 0, cioè un insieme che include un intervallo aperto contenente 0. Con questo linguaggio la definizione di continuità diventa più facile.

DEFINIZIONE. *La funzione f è continua in x se, data una qualsiasi tolleranza $\varepsilon > 0$, l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon$$

forma un intorno di 0.

Naturalmente in quella disequazione l'incognita è h. È importare notare che la condizione deve valere per *ogni* tolleranza. Per questo, quando si imposta la verifica, occorre tenere ε indicato e non si può dare solo un valore, per quanto piccolo. Tuttavia è ammesso, per quanto già visto, considerare $0 < \varepsilon < k$, dove $k > 0$ è un valore qualsiasi che ci renda più facile trattare il caso senza dover fare scomode distinzioni. Nell'esempio di prima abbiamo infatti preso $0 < \varepsilon < x^2$ (per $x \ne 0$) che appunto non è restrittivo, dal momento che x è fisso.

Diremo che una funzione è *continua* se è tale in ogni punto del suo dominio.

Nel seguito ci servirà questa semplice osservazione: l'intersezione di due intorni di 0 è un intorno di 0. Infatti se il primo intorno include l'intervallo aperto $(-\delta_1 \mathrel{..} \delta_1)$ e il secondo l'intervallo aperto $(-\delta_2 \mathrel{..} \delta_2)$, è chiaro che, ponendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, l'intersezione dei due intorni include l'intervallo aperto $(-\delta \mathrel{..} \delta)$. Adesso basta osservare che ogni intervallo aperto che contiene 0 include un intervallo aperto *simmetrico*.

È evidente anche che ogni insieme che include un intorno di 0 è anch'esso un intorno di 0 e che anche l'intersezione di n intorni è un intorno (n naturale positivo).

Le funzioni non sono necessariamente continue, altrimenti non ci sarebbe alcun bisogno di dare la definizione. Un esempio drammatico è proprio la funzione di Dirichlet che non è continua in alcun punto. Infatti, se x è un reale qualsiasi, in ogni suo intorno cadono punti razionali e irrazionali; perciò non è possibile soddisfare alcuna tolleranza $\varepsilon < 1$. Un esempio meno patologico è la funzione pavimento, che non è continua sugli interi, ma lo è in ogni numero non intero. Se x è intero, ogni suo intorno contiene numeri minori di x: se $x - 1 < y < x$, allora $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1$ e quindi non può essere soddisfatta alcuna tolleranza $\varepsilon < 1$. Viceversa, se x non è intero, esiste un intorno di x in cui la funzione è costante, quindi certamente continua.

2.1 TEOREMI SULLA CONTINUITÀ

Abbiamo parlato di intorni di 0, ma possiamo allo stesso modo parlare di intorni di un punto qualsiasi: un intorno di x è un insieme che include un intervallo aperto contenente x. L'intervallo aperto si può sempre prendere simmetrico rispetto a x.

È facile vedere che se U è un intorno di 0, l'insieme dei numeri della forma $x + h$, per $h \in U$, è un intorno di x. Questo è un fatto che useremo più volte.

Per ora supporremo che le funzioni siano definite in tutto un intorno del punto considerato. Possiamo allora considerare la somma e il prodotto di due funzioni che sarà ancora definita in un intorno del punto, perché l'intersezione di due intorni è un intorno.

TEOREMA. *La somma di due funzioni continue nel punto x è continua in x.*

▶ Siano f e g le due funzioni; dobbiamo risolvere le disequazioni

$$|f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))| \le \varepsilon.$$

Ci ricordiamo della disuguaglianza fondamentale

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

e applichiamo l'ipotesi: le soluzioni della disequazione

$$|f(x+h) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

formano un intorno di 0, chiamiamolo U. Anche le soluzioni di

$$|g(x+h) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

formano un intorno di 0, chiamiamolo V. Se dunque $h \in U \cap V$, abbiamo

$$\begin{aligned} &|f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)| \\ &\qquad \le |f(x+h) - f(x)| + |g(x+h) - g(x)| \\ &\qquad \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Allora l'insieme delle soluzioni della nostra disequazione include $U \cap V$ che è un intorno di 0 e dunque è a sua volta un intorno di 0. ◀

Si noti la comodità di non dover risolvere *esattamente* la disequazione: ci interessa solo che l'insieme delle soluzioni sia un intorno di 0; se troviamo che questo insieme include un intorno di 0, determinato in qualche modo, abbiamo finito.

Perché quella scelta di $\varepsilon/2$? Qui entrano in gioco altri fattori: esperienza e intuizione. L'idea era di usare la disuguaglianza sul valore assoluto di una somma; fissiamo tolleranze più strette per f e g di quella che ci interessa per la somma e, siccome non abbiamo preferenze per f e g, proviamo con la tolleranza metà di quella data. È importante ricordare che la continuità richiede che le soluzioni di *ogni* disuguaglianza $|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon$ formino un intorno di 0.

Un'applicazione. Siccome la funzione pavimento non è continua sugli interi, nemmeno la funzione parte frazionaria lo è: se $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, allora $\lfloor x \rfloor = x - f(x)$ e, se f fosse continua sugli interi lo sarebbe anche "pavimento", perché certamente $x \mapsto x$ è una funzione continua.

TEOREMA. *Se f è continua in x e a è un numero qualsiasi, allora af è continua in x.*

▶ La disuguaglianza da trattare è $|af(x+h) - af(x)| \le \varepsilon$. Se $a = 0$ non c'è proprio niente da dimostrare: ogni funzione costante è evidentemente continua (data qualsiasi tolleranza possiamo prendere come grado di avvicinamento qualsiasi numero positivo). Quindi possiamo assumere $a \ne 0$. Allora la disuguaglianza è equivalente a

$$|f(x+h) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{|a|}$$

e per ipotesi sappiamo che l'insieme delle soluzioni di questa è un intorno di 0, perché possiamo prendere $\varepsilon/|a|$ come tolleranza. ◀

TEOREMA. *Se f è continua in x, allora $|f|$ è continua in x.*

▶ Qui usiamo la disuguaglianza $\bigl||a|-|b|\bigr| \le |a-b|$. Data la tolleranza $\varepsilon > 0$, dobbiamo risolvere

$$\bigl||f(x+h)| - |f(x)|\bigr| \le \varepsilon.$$

Sia U un intorno di 0 tale che, per $h \in U$, valga

$$|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza di prima, abbiamo la tesi. ◀

TEOREMA. *La funzione prodotto di due funzioni continue in x è una funzione continua in x.*

▶ Se f e g sono le nostre due funzioni, la disuguaglianza è

$$|f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)| \le \varepsilon.$$

Il trucco di aggiungere e togliere sembra promettente: possiamo di certo scrivere

$$\begin{aligned}
&|f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)| \\
&\qquad = |f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)| \\
&\qquad \le |f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)| + |f(x)g(x+h) - f(x)g(x)| \\
&\qquad = |f(x+h) - f(x)| \cdot |g(x+h)| + |f(x)| \cdot |g(x+h) - g(x)|.
\end{aligned}$$

Il problema è che $g(x+h)$ varia al variare di h: se fosse possibile delimitarlo, saremmo quasi a posto. Ci occorre un lemma.

LEMMA. *Se g è continua in x, allora esistono $l > 0$ e un intorno U di 0 tali che, per ogni $h \in U$, si abbia $|g(x+h)| \le l$.*

Fissiamo $\varepsilon > 0$ in modo che $|g(x)| < \varepsilon$; allora esiste un intorno U di 0 tale che, se $h \in U$, si abbia $|g(x+h) - g(x)| \le \varepsilon$. In altre parole, per $h \in U$ si ha

$$-\varepsilon + g(x) \le g(x+h) \le \varepsilon + g(x).$$

Se $l = \max\{\varepsilon - g(x), \varepsilon + g(x)\}$ abbiamo, per la scelta di ε, $l > 0$ e inoltre che, se $h \in U$, $|g(x+h)| \le l$. Armati di questo lemma, possiamo proseguire la nostra dimostrazione, supponendo che $f(x) \ne 0$. Esistono intorni U, V e W di 0 tali che,

$$\begin{aligned}
&|g(x+h)| \le l, && h \in U,\\
&|f(x+h) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2l}, && h \in V,\\
&|g(x+h) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2|f(x)|}, && h \in W,
\end{aligned}$$

dove $l > 0$ è quello determinato con il lemma. Allora, se $h \in U \cap V \cap W$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&|f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)|\\
&\quad\le |f(x+h) - f(x)| \cdot |g(x+h)| + |f(x)| \cdot |g(x+h) - g(x)|\\
&\quad\le \frac{\varepsilon}{2l} l + |f(x)| \frac{\varepsilon}{2|f(x)|}\\
&\quad= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

esattamente come si voleva. Nel caso in cui $f(x) = 0$ la dimostrazione è ancora più semplice, la si completi. ◀

Il teorema che segue si chiama *teorema della permanenza del segno.*

TEOREMA. *Se la funzione f è continua in x e $f(x) > 0$, allora esiste un intorno U di 0 tale che, per $h \in U$, vale $f(x+h) > 0$.*

▶ Basta prendere come tolleranza $\varepsilon = f(x)/2$: esiste un intorno U di 0 tale che $|f(x+h) - f(x)| \le \varepsilon$ e quindi

$$-\varepsilon + f(x) \le f(x+h) \le \varepsilon + f(x)$$

e, considerando la disuguaglianza di sinistra, abbiamo

$$f(x+h) \ge -\frac{f(x)}{2} + f(x) = \frac{f(x)}{2} > 0.$$ ◀

Enunciamo esplicitamente due corollari del teorema. Si noti che il primo enunciato è equivalente al teorema, ci riferiremo spesso a questo con il nome di 'teorema della permanenza del segno'.

COROLLARIO. *Supponiamo che f sia continua in x e che esista un intorno U di 0 tale che, per $h \in U$ e $h \ne 0$, sia $f(x+h) \ge 0$. Allora $f(x) \ge 0$.*

▶ Se fosse $f(x) < 0$, ci sarebbe un intorno V di 0 tale che, per $h \in V$, $f(x) < 0$: questo contraddice l'ipotesi per $0 \ne h \in U \cap V$. ◀

COROLLARIO. *Se f è continua in x e $f(x) \ne 0$, allora esiste un intorno di x nel quale f non si annulla.*

▶ Se $f(x) > 0$, si ha $f(z) > 0$ in tutto un intorno di x. Analogamente se $f(x) < 0$, prendendo $-f$. ◀

Naturalmente il teorema e i corollari ammettono anche la versione con $f(x) < 0$: basta considerare $g = -f$, come nella dimostrazione precedente.

TEOREMA. *Se la funzione f è continua in x e $f(x) \neq 0$, allora la funzione $z \mapsto g(z) = 1/f(z)$ è continua in x.*

▶ Per quanto visto, g è effettivamente definita in un intorno di x. La disequazione da risolvere è

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \varepsilon$$

che diventa

$$\left|\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right| \leq \varepsilon$$

cioè, sviluppando,

$$|f(x) - f(x+h)| \leq \varepsilon|f(x)f(x+h)|.$$

Questa volta ci occorre limitare i valori $|f(x+h)|$ dal basso, cioè trovare un intorno U di 0 e un numero $l > 0$ tali che, per $h \in U$ si abbia $|f(x+h)| > l$. Ma l'abbiamo già fatto dimostrando il teorema della permanenza del segno: c'è un intorno U di 0 tale che, per $h \in U$, $|f(x+h)| > |f(x)|/2$. A questo punto possiamo prendere un intorno V di 0 tale che, per $h \in V$,

$$|f(x) - f(x+h)| \leq \frac{\varepsilon|f(x)|^2}{2}$$

e quindi, per $h \in U \cap V$,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x+h)| &\leq \frac{\varepsilon|f(x)|^2}{2}\\ &= \varepsilon|f(x)|\frac{|f(x)|}{2}\\ &\leq \varepsilon|f(x)| \cdot |f(x+h)|\end{aligned}$$

che è esattamente la disuguaglianza che ci serve. ◀

Da tutto questo lavoro astratto possiamo trarre una conseguenza molto importante.

TEOREMA. *Se P è un polinomio, allora la funzione $x \mapsto P(x)$ è continua.*

Un polinomio si ottiene infatti combinando con somme e prodotti le funzioni costanti e la funzione $x \mapsto x$ (cioè il polinomio x). Quindi una funzione polinomiale è continua. Non c'è dunque bisogno di risolvere disequazioni complicate per verificare la continuità di $f(x) = x^2$, come abbiamo fatto prima. La disequazione sarebbe intimidente nel caso di $f(x) = 3x^5 - 7x^2 + 2x - 4$, ma appunto non c'è bisogno nemmeno di scriverla.

Rimandiamo a più avanti la questione se le funzioni log, exp, sin e cos siano continue. Ci rimane un ultimo risultato importante.

TEOREMA. *Se la funzione f è continua in x e la funzione g è continua in $y = f(x)$, allora la funzione $z \mapsto F(z) = g(f(z))$ è continua in x.*

▶ In certe situazioni, come questa, è più comodo scrivere diversamente la definizione di continuità in un punto. Si verifichi che la seguente asserzione è equivalente alla definizione data: f è continua in x se, per ogni tolleranza $\varepsilon > 0$, c'è un intorno U di x tale che, per $z \in U$, $|f(z) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Con questa caratterizzazione, la dimostrazione diventa più semplice. Fissiamo una tolleranza ε; allora esiste un intorno U di y tale che, per $z \in U$, $|g(z) - g(y)| \leq \varepsilon$.

Dal momento che U è un intorno di y, possiamo individuare $\delta > 0$ tale che ogni z con $|z - y| < \delta$ appartenga a U. Possiamo allora usare $\delta/2$ come tolleranza per f: esiste un intorno V di 0 tale che, per $h \in V$, $|f(x+h) - f(x)| \le \delta/2$; in particolare, $f(x+h) \in U$ e perciò $|g(f(x+h)) - g(f(x))| \le \varepsilon$. ◀

Questo risultato si può ricordare brevemente come "la composizione di funzioni continue è continua". Il teorema precedente sulla continuità di $z \mapsto F(z) = 1/f(z)$ si può dimostrare facilmente considerando la funzione $z \mapsto 1/z$ nel teorema sulla composizione. Abbiamo anche un'altra conseguenza importante.

TEOREMA. *Se P e Q sono polinomi, allora la funzione $f(x) = P(x)/Q(x)$ è continua su tutto il suo dominio, che consiste dei punti x dove $Q(x) \neq 0$.*

Si noti che la funzione $f(x) = x/x$ *non* è definita in 0. Questo non vuol dire che ignoriamo la possibile semplificazione: lo scopo della prossima sezione è proprio rendere rigorosa l'intuizione che f *può* essere estesa anche con un valore in 0.

2.2 LIMITI

Una delle conseguenze della continuità di f in x è che il valore $f(x)$ è determinato dai valori $f(x+h)$ con $h \neq 0$ preso in un opportuno intorno di 0. Supponiamo infatti che f e g siano funzioni continue in x e che esista un intorno U di 0 tale che, per $h \in U$, $h \neq 0$ sia $f(x+h) = g(x+h)$. Dimostriamo che, in tali ipotesi, $f(x) = g(x)$.

Se $f(x) \neq g(x)$, la funzione $F = |f - g|$ è continua in x e $F(x) > 0$; esiste allora un intorno V di 0 tale che, per $h \in V$, $F(x+h) > 0$. Ma dalla definizione, segue che, per $h \neq 0$, $F(x+h) = 0$. Dunque dovremmo avere $U \cap V = \{0\}$ che è impossibile, perché l'intersezione di due intorni di 0 è un intorno di 0 e $\{0\}$ non lo è.

In molte situazioni, alcune le abbiamo già viste, è data una funzione che è definita in tutto un intorno di un punto x ma non in x. Il caso tipico è quello del rapporto di Fermat in x, visto come funzione di h:

$$v(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è una funzione definita in un intorno di 0, ma non in 0, dove l'espressione perde significato. Il nostro problema è, appunto, vedere se la funzione v può essere *estesa* a una funzione definita anche in 0 che sia *continua* in 0.

Come si fa spesso, si suppone che il problema sia risolto. Fissiamo dunque le notazioni: abbiamo una funzione f definita in un intorno W di x, escluso x, e supponiamo di saperla estendere a una funzione $\tilde{f}$ definita su tutto W, cioè

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in W,\ z \neq x, \\ l & \text{se } z = x. \end{cases}$$

Quindi la funzione $\tilde{f}$ assume gli stessi valori di f in tutti i punti di W escluso x, ma ha un valore anche in x. Siccome supponiamo che la funzione sia continua in x, data una tolleranza $\varepsilon > 0$ sappiamo trovare un intorno U di x tale che si abbia, per $z \in U$,

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x)| \le \varepsilon$$

che, quando $z \neq x$, si può anche scrivere

$$|f(z) - l| \le \varepsilon.$$

Nel caso di $z = x$ la disuguaglianza è automaticamente verificata, quindi ci basta trattarla per $z \neq x$. Per quello che abbiamo visto prima, il valore l è determinato dalla richiesta che $\tilde{f}$ sia continua in x, perciò il problema ha al più una soluzione.

Ecco che abbiamo giustificato l'importante definizione che segue, dovuta in sostanza a Cauchy, ma resa precisa da Weierstraß.

DEFINIZIONE. *Sia f una funzione definita in un intorno W di x, escluso x. Diremo che il numero l è* il limite di f per z che tende a x *se, data una qualsiasi tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U$, $z \neq x$, si abbia*

$$|f(z) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

In tal caso la notazione usata sarà

$$\lim_{z\to x} f(z) = l.$$

La terminologia 'limite' e 'tende' risale ai primi tempi dello sviluppo del calcolo differenziale, quando si parlava di variabili 'tendenti a valori limite', avendo un'idea dinamica della questione che però non trova posto nella sistemazione rigorosa data da Weierstraß. Continuiamo a usare i termini tradizionali: basta ricordarsi che sono solo nomi, senza farsi ingannare dal loro suono o, meglio, dal loro significato nel linguaggio comune.

Il limite, se esiste, è quell'unico valore l che, assegnato come valore alla funzione $\tilde{f}$ in x, cioè se si pone $\tilde{f}(x) = l$, la rende continua in x. Perciò ogni teorema sulle funzioni continue diventa un teorema sui limiti.

Useremo la stessa notazione anche quando la funzione sia definita in x, con la tacita convenzione che, in tale contesto, il valore assunto da f in x non ci interessa: la 'sdefiniamo' in x.

TEOREMA. *Siano f e g funzioni definite in un intorno W di x, escluso x, e supponiamo che esistano $\lim_{z\to x} f(z) = l$ e $\lim_{z\to x} g(z) = m$. Sia poi a un numero qualsiasi. Allora esistono i limiti seguenti e hanno i valori indicati:*

$$\lim_{z\to x}(f(z) + g(z)) = l + m, \qquad \lim_{z\to x}(f(z)g(z)) = lm,$$
$$\lim_{z\to x}|f(x)| = |l|, \qquad \lim_{z\to x} af(z) = al,$$
$$\lim_{z\to x}\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{l} \quad (\textit{se } l \neq 0)$$

Si faccia attenzione che non è affatto detto che un limite esista sempre. L'esempio classico è quello della funzione $f(x) = \cos(1/x)$ che è definita ovunque eccetto che in 0. Dimostriamo che per nessun l si può avere

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = l.$$

Sia infatti $l > 0$. In ogni intorno di 0 ci sono punti x nei quali $\cos(1/x) < 0$, per esempio tutti i numeri della forma $1/(\pi + 2k\pi)$ per k intero abbastanza grande: se l'intorno U include l'intervallo aperto $(-\delta \mathinner{..} \delta)$, ci basta prendere

$$0 < \frac{1}{\pi + 2k\pi} < \delta$$

cioè $(2k+1)\pi > 1/\delta$ che equivale a

$$k > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi\delta} - 1\right)$$

e quindi l'intorno non soddisfa alla tolleranza $\varepsilon = l/4$. Analogamente, se $l < 0$, all'intorno appartengono tutti i numeri della forma $1/(2k\pi)$ per $k > 1/(2\pi\delta)$ dove il coseno vale 1 e quindi l'intorno non soddisfa la tolleranza $\varepsilon = -l/4$. Lo stesso per $l = 0$: all'intorno appartengono i punti $1/(2k\pi)$ ancora per $k > 1/(2\pi\delta)$ e l'intorno non soddisfa la tolleranza $\varepsilon = 1/4$.

Il teorema sui limiti di maggiore utilità fornisce una tecnica che abbiamo già adoperato nella sua forma intuitiva e che chiameremo *teorema del confronto di limiti*.

TEOREMA. *Siano F, G e f funzioni definite in un intorno W di x, escluso x e supponiamo che, per $z \in W$, $z \neq x$, si abbia*

$$F(z) \le f(z) \le G(z).$$

Se esistono

$$\lim_{z\to x} F(z) = \lim_{z\to x} G(z) = l$$

allora esiste anche

$$\lim_{z\to x} f(z) = l.$$

▶ Fissiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$; allora esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U$, $z \neq x$, si abbia

$$|F(z) - l| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |G(z) - l| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

In effetti dovremmo distinguere l'intorno in cui vale la disuguaglianza per F e quello in cui vale la disuguaglianza per G: se ne prendiamo l'intersezione, ne abbiamo uno in cui valgono entrambe. Ora osserviamo che da $F(z) \le f(z) \le G(z)$ segue

$$0 \le G(z) - f(z) \le G(z) - F(z)$$

che possiamo anche scrivere tra valore assoluto; dunque, per $z \in U$, $z \neq x$,

$$\begin{aligned} |G(z) - f(z)| &\le |G(z) - F(z)| \\ &= |G(z) - l + l - F(z)| \\ &\le |G(z) - l| + |l - F(z)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned}$$

Con questa disuguaglianza possiamo adesso scriverne un'altra, sempre per $z \in U$, $z \neq x$:

$$\begin{aligned} |f(z) - l| &= |f(z) - G(z) + G(z) - l| \\ &\le |f(z) - G(z)| + |G(z) - l| \\ &\le \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$ ◀

Questa volta le funzioni erano tre, quindi abbiamo considerato $\varepsilon/3$; ma non lo si prenda come guida assoluta: in realtà si scrivono le dimostrazioni mettendo valori generici che poi si aggiustano quando la dimostrazione è completa.

Si possono riesaminare i due casi in cui abbiamo usato questo teorema, cioè quando abbiamo calcolato la derivata del logaritmo e delle funzioni trigonometriche. Per il logaritmo, dalle disuguaglianze

$$\frac{1}{x+h} \le \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \le \frac{1}{x}.$$

abbiamo 'dedotto' che $\lim_{h\to 0}(\log(x+h) - \log x)/h = 1/x$, perché

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{x+h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

dal momento che le funzioni $h \to 1/(x+h)$ e $h \to 1/x$ sono continue.

In realtà dovremmo considerare la funzione $h \to 1/(x+h)$ definita in un intorno di 0, escluso 0; ma siccome ne conosciamo già un'estensione continua in 0, l'esistenza e il valore del limite non sono un problema.

C'è un problema più serio, invece: queste disuguaglianze valgono solo per $h > 0$; per $h < 0$ abbiamo

$$\frac{1}{x} \le \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \le \frac{1}{x+h}.$$

È giunto il momento di dare una definizione più generale di limite che ci possa essere utile in situazioni del genere.

DEFINIZIONE. *Sia f una funzione di dominio $D(f)$ e sia $x \in D(f)$; diremo che f è continua in x se, per ogni tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap D(f)$,*

$$|f(z) - f(x)| \le \varepsilon.$$

L'unica differenza rispetto a prima, ma decisiva, è di limitare i valori di z a quelli che appartengono sia all'intorno U di x sia al dominio di f. Ovviamente, se $D(f)$ include un intorno di x, la definizione coincide con la precedente, a parte l'uso di $z \in U$ invece di $x + h$, con h in un intorno di 0.

Si può verificare facilmente che i teoremi sulla continuità dimostrati prima continuano a valere secondo la nuova definizione quando le funzioni, invece di essere definite in un intorno W di x sono tutte definite in un insieme qualunque a cui x appartiene.

Vediamo subito un esempio importante: la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, di cui vogliamo dimostrare la continuità in ogni punto del dominio $D(f) = [0 \mathrel{..} \to)$. Dato $\varepsilon > 0$, dobbiamo risolvere la disequazione

$$|\sqrt{z} - \sqrt{x}| \le \varepsilon$$

nell'incognita z e scoprire che l'insieme delle soluzioni è l'intersezione di un intorno di x con $D(f)$. La disequazione è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato:

$$\begin{gathered} z - 2\sqrt{xz} + x \le \varepsilon^2, \\ z + (x - \varepsilon^2) \le 2\sqrt{xz}. \end{gathered}$$

Nel caso di $x > 0$ possiamo supporre $0 < \varepsilon < \sqrt{x}$ e quindi elevare di nuovo al quadrato:

$$\begin{gathered} z^2 + 2(x - \varepsilon^2)z + (x - \varepsilon^2)^2 \le 4xz, \\ z^2 - 2(x + \varepsilon^2)z + (x - \varepsilon^2)^2 \le 0, \end{gathered}$$

il cui discriminante è

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= (x + \varepsilon^2)^2 - (x - \varepsilon^2)^2 \\ &= (x + \varepsilon^2 + x - \varepsilon^2)(x + \varepsilon^2 - x + \varepsilon^2) \\ &= 4x\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Dunque le radici del polinomio in z sono $x + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{x} = (\sqrt{x} - \varepsilon)^2$ e $x + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{x} = (\sqrt{x} + \varepsilon)^2$. L'insieme delle soluzioni è dunque

$$(\sqrt{x} - \varepsilon)^2 \le z \le (\sqrt{x} + \varepsilon)^2$$

che è un intorno di x, dal momento che

$$(\sqrt{x} - \varepsilon)^2 < x < (\sqrt{x} + \varepsilon)^2,$$

come si verifica facilmente usando l'ipotesi che $0 < \varepsilon < \sqrt{x}$. Dunque la funzione è continua in ogni $x > 0$. Nel caso di $x = 0$ la disequazione diventa

$$|\sqrt{z}| \le \varepsilon$$

le cui soluzioni sono date da $0 \le z \le \varepsilon^2$; questo insieme coincide con

$$(-\varepsilon^2, \varepsilon^2) \cap D(f)$$

e quindi abbiamo dimostrato anche la continuità in 0.

Ci sono casi in cui il dominio non include un intorno di ogni punto. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}$$

definita nel più ampio insieme dove l'espressione abbia senso, cioè

$$D(f) = \{0\} \cup [2 \mathrel{..} \rightarrow),$$

cioè la funzione è definita in 0 e nei punti x tali che $x \ge 2$. Che possiamo dire riguardo alla continuità in 0? Applichiamo la definizione: riusciamo, dato $\varepsilon > 0$, a trovare un intorno U di 0 tale che, per $z \in U \cap D(f)$ si abbia $|f(z) - f(0)| \le \varepsilon$? Certo: l'intervallo aperto $U = (-1 \mathrel{..} 1)$ è un intorno di 0 e $U \cap D(f) = \{0\}$; quindi se $z \in U \cap D(f)$, è vero che $|f(z) - f(0)| = |0 - 0| = 0 \le \varepsilon$.

Si tratta certamente di un caso molto particolare; in effetti ci si accorge che ogni funzione è continua in un *punto isolato* del suo dominio, cioè un punto x per il quale esiste un intorno U di x tale che $U \cap D(f) = \{x\}$, perché questo intorno sarà sempre adatto per qualsiasi tolleranza $\varepsilon > 0$. Come se al produttore di oggetti di metallo fosse ordinato 'un pezzo di ferro' senza altre specificazioni: qualsiasi cosa andrà bene.

DEFINIZIONE. *Siano S un insieme di numeri e a un numero; diremo che a è un punto di accumulazione per S se, per ogni intorno U di a, l'insieme $U \cap S$ contiene almeno un punto diverso da a.*

Nel caso precedente, 0 non è un punto di accumulazione di $D(f)$, tutti gli altri elementi di $D(f)$ sono punti di accumulazione. Nel caso dell'intervallo aperto $S = (2 \mathrel{..} 3)$, quali sono i punti di accumulazione? Tutti gli elementi di S, ma anche gli estremi dell'intervallo. Per esempio, nell'intorno $(2 - \delta \mathrel{..} 2 + \delta)$, con $\delta > 0$, di 2 cadono infiniti punti di S, tutti gli x tali che $2 < x < 2 + \delta$. Siccome ogni intorno di 2 include un intervallo aperto di questo tipo, abbiamo dimostrato la tesi. Si scriva la dimostrazione per 3.

La discussione appena fatta mostra che un punto di accumulazione di S può non appartenere a S. È proprio il caso del rapporto di Fermat per una funzione f definita in un intorno di x: il dominio della funzione $h \mapsto v(h)$ dove

$$v(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è un intorno di 0, escluso 0: ma allora 0 è un punto di accumulazione del dominio di v. Ci accorgiamo allora che questo è quanto serve per poter parlare di limite, esattamente secondo la nuova definizione di continuità, più generale.

DEFINIZIONE. *Sia f una funzione definita in un insieme S e sia x un punto di accumulazione di S. Diremo che il numero l è* il limite di f per z che tende a x *se, data una qualsiasi tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap S$, $z \ne x$, si abbia*

$$|f(z) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Useremo sempre la notazione di prima, ma talvolta vorremo mettere in evidenza l'insieme S, magari perché la funzione potrebbe avere un dominio 'naturale' più ampio dell'insieme che vogliamo considerare; in quel caso scriveremo

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in S}} f(z) = l.$$

In genere non useremo insiemi S complicati; anzi, di solito come S prenderemo proprio il dominio della funzione. Il caso più importante in cui useremo insiemi diversi è quello dei limiti 'destro' e 'sinistro'.

Supponiamo che f sia definita in un intorno W di x, escluso x; possiamo considerare la funzione $f_{x,+}$ che coincide con f, ma che ha come dominio $W \cap (x \mathinner{..} \to)$, di cui x è certamente un punto di accumulazione. Invece di usare la notazione complicatissima

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in W \cap (x \mathinner{..} \to)}} f_{x,+}(z)$$

ricorreremo al più semplice

$$\lim_{z \to x+} f(z)$$

che chiameremo *limite per z che tende a x da destra*. Analogo discorso si può fare per il *limite per z che tende a x da sinistra*, che ci si può esercitare a definire esplicitamente; per questo useremo la notazione

$$\lim_{z \to x-} f(z).$$

Perché ci interessano i limiti da destra e da sinistra? La risposta è quasi ovvia.

TEOREMA. *La funzione f sia definita in un intorno W di x, escluso x. Allora*

$$\lim_{z \to x} f(z)$$

esiste se e solo se esistono e sono uguali

$$\lim_{z \to x+} f(z) \quad e \quad \lim_{z \to x-} f(z).$$

▶ La dimostrazione è facile in un senso e la lasciamo per esercizio: se S è un sottoinsieme di $D(f)$ di cui x è un punto di accumulazione e $\lim_{z \to x} f(z)$ esiste, allora esiste

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in S}} g(z) = \lim_{z \to x} f(z),$$

dove con g denotiamo la funzione f *ristretta* a S. Questo vale in particolare se $S = D(f) \cap (x \mathinner{..} \to)$ così che $g = f_{x,+}$ e analogamente per il limite da sinistra.

Vediamo la parte importante: supponiamo che sia $\lim_{z \to x+} f(z)$ sia $\lim_{z \to x-} f(z)$ esistano e che siano uguali a l. Fissiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$ e cerchiamo l'insieme delle soluzioni di

$$|f(z) - l| \le \varepsilon$$

(con $z \ne x$, naturalmente). Poniamo per semplicità $S_+ = W \cap (x \mathinner{..} \to)$ e $S_- = W \cap (\leftarrow \mathinner{..} x)$. Per ipotesi, le funzioni $f_{x,+}$ e $f_{x,-}$, definite rispettivamente su S_+ e S_- hanno limite l. Dunque esiste un intorno U_+ di x tale che, per $z \in U_+ \cap S_+$,

$$|f_{x,+}(z) - l| = |f(z) - l| \le \varepsilon.$$

Esiste anche un intorno U_- di x tale che, per $z \in U_- \cap S_-$,

$$|f_{x,-}(z) - l| = |f(z) - l| \le \varepsilon.$$

Ma allora, se poniamo $U = U_+ \cap U_-$, U è un intorno di x e per $z \in U$, $z \neq x$, si ha

$$|f(z) - l| \leq \varepsilon$$

usando la disuguaglianza per $f_{x,+}$ se $z > x$, quella per $f_{x,-}$ se $z < x$. ◀

A questo punto la nostra dimostrazione rigorosa della derivabilità del logaritmo è quasi conclusa: poniamo $v(h) = (\log(x+h) - \log x)/h$; per $h > 0$ abbiamo

$$\frac{1}{x+h} \leq v(h) \leq \frac{1}{x}$$

e quindi per il teorema del confronto di limiti possiamo dire che

$$\lim_{h \to 0+} v(h) = \frac{1}{x}.$$

Per $h < 0$ abbiamo

$$\frac{1}{x} \leq v(h) \leq \frac{1}{x+h}$$

e, ancora per il teorema di confronto di limiti possiamo dire che

$$\lim_{h \to 0-} v(h) = \frac{1}{x}.$$

Dunque $\lim_{h\to 0} v(h) = 1/x$.

Non possiamo dire altrettanto sulla rigorosità della dimostrazione per la derivata di seno e coseno, dal momento che là abbiamo assunto la continuità delle due funzioni. Sta di fatto che le funzioni seno e coseno *sono* continue.

TEOREMA. *La funzione* $x \mapsto \sin x$ *e la funzione* $x \mapsto \cos x$ *sono continue.*

▶ Ci ricordiamo della famosa formula di prostaferesi

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dalla quale ricaviamo

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}.$$

Fissiamo la tolleranza $\varepsilon > 0$. La disequazione da risolvere diventa allora

$$\left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora $|\cos(x + (h/2))| \leq 1$ e perciò cominciamo a risolvere la disequazione $|\sin(h/2)| \leq \varepsilon/2$. Se troviamo un intorno U di 0 tale che, per $h \in U$ si abbia questa disuguaglianza, per $h \in U$ avremo anche la più restrittiva:

$$\left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\frac{h}{2}\right| \leq \left|\sin\frac{h}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo $\varepsilon' = \varepsilon/2$ e $h = 2k$. Dobbiamo quindi risolvere $|\sin k| \leq \varepsilon'$: alla fine ci siamo ridotti a dimostrare che la funzione seno è continua in 0.

Ritorniamo alla figura 4, dove supponiamo che l'angolo AOC sia di misura $0 < k < \pi/2$, e consideriamo la corda AC: la sua lunghezza è certamente minore della lunghezza dell'arco di circonferenza AC e vale $2\sin(k/2)$. Proviamo che

$$\sin k < 2\sin(k/2).$$

Infatti, $\sin k = 2\sin(k/2)\cos(k/2) \leq 2\sin(k/2)$ perché $0 \leq \cos(k/2) \leq 1$. Ma allora $BC < AC$ e perciò $\sin k < k$. Per il teorema di confronto dei limiti, dalla disuguaglianza

$$0 \leq \sin k \leq k \qquad (k > 0)$$

possiamo concludere che $\lim_{k\to 0+} \sin k = 0$. Se $-\pi/2 < k < 0$, abbiamo $\sin(-k) < -k$ e quindi $k < \sin k < 0$ ma, ancora, questo ci dice che $\lim_{k\to 0-} \sin k = 0$. Ne deduciamo che $\lim_{k\to 0} \sin x = 0$ e perciò la funzione $x \mapsto \sin x$ è continua in 0, perché $\sin 0 = 0$.

Ora è facile ritornare indietro: esiste un intorno U di 0, che possiamo prendere simmetrico, cioè $U = (-\delta, \delta)$ tale che, per $k \in U$, $|\sin k| \le \varepsilon'$. Allora, per $h \in U' = (-2\delta, 2\delta)$ avremo $h/2 \in U$ e quindi

$$\left|\sin \frac{h}{2}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

come voluto.

Dobbiamo fare la stessa fatica per il coseno? No: siccome $\cos x = \sin(x + (\pi/2))$, sappiamo che $x \mapsto \cos x$ è continua perché composizione di due funzioni continue. ◀

2.3 IL TEOREMA DI BOLZANO SUGLI ZERI

Bernard Bolzano, matematico e filosofo praghese (1781–1848), fu tra i primi, con Cauchy, ad affrontare il problema del rigore nell'analisi matematica che si stava sempre più sviluppando a opera dei successori di Leibniz, cioè i Bernoulli,[1] Leonhard Euler (1707–1783), Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813) e altri. Fino ai suoi studi si dava come ovvio che una funzione che assuma sia valori positivi che negativi assume anche il valore zero. In realtà questo è tutt'altro che ovvio e dipende dalla struttura profonda dei numeri reali.

TEOREMA DI BOLZANO SUGLI ZERI. *Sia f una funzione continua definita nell'intervallo chiuso $[p \mathrel{..} q]$. Se $f(p) < 0$ e $f(q) > 0$, esiste un punto c interno all'intervallo $[p \mathrel{..} q]$ tale che $f(c) = 0$.*

▶ L'idea di Bolzano è semplice. Poniamo $p_0 = p$ e $q_0 = q$; dividiamo l'intervallo $[p_0 \mathrel{..} q_o]$ a metà e sia r_0 il punto medio. Ci sono tre casi: (1) $f(r_0) = 0$; (2) $f(r_0) < 0$; (3) $f(r_0) > 0$.

Nel primo caso abbiamo finito e poniamo $c = r_0$. Nel secondo caso poniamo $p_1 = r_0$ e $q_1 = q_0$. Nel terzo caso poniamo $p_1 = p_0$ e $q_1 = r_0$. Così, se $f(r_0) \ne 0$, possiamo considerare f definita sull'intervallo $[p_1 \mathrel{..} q_1]$, con $f(p_1) < 0$ e $f(q_1) > 0$.

A questo punto possiamo far partire il meccanismo: se supponiamo di essere arrivati al passo $n > 0$, con la stessa tecnica troviamo o un punto r_{n+1} tale che $f(r_{n+1}) = 0$ oppure un intervallo $[p_{n+1} \mathrel{..} q_{n+1}]$ tale che $f(p_{n+1}) < 0$ e $f(q_{n+1}) > 0$.

Se il meccanismo arriva a una fine, cioè a un passo n in cui $f(r_n) = 0$ il teorema per f è dimostrato. In caso contrario abbiamo la successione *inscatolata* di intervalli $[p_n \mathrel{..} q_n]$ che hanno lunghezze decrescenti indefinitamente: infatti, se $l = q - p$, la lunghezza dell'n-esimo intervallo è $l/2^n$. Dunque esiste un unico punto c comune a tutti gli intervalli, come si intuisce e come vedremo con precisione nel capitolo 8.

Qui arrivava Bolzano e concludeva che $f(c) = 0$, lasciando però un buco nella dimostrazione. Noi abbiamo alle spalle Weierstraß e possiamo colmarlo.

Chiamiamo S_- l'insieme dei punti p_n e S_+ l'insieme dei punti q_n. Allora c è un punto di accumulazione sia di S_- sia di S_+. Siccome f è continua, lo è in particolare in c e quindi

$$f(c) = \lim_{z\to c} f(z) = \lim_{\substack{z\to c\\ z\in S_-}} f(z) = \lim_{\substack{z\to c\\ z\in S_+}} f(z).$$

Siccome su S_- si ha $f(z) < 0$ e su S_+ si ha $f(z) > 0$, è immediato verificare che

$$f(c) = \lim_{\substack{z\to c\\ z\in S_-}} f(z) \le 0 \quad \text{e} \quad f(c) = \lim_{\substack{z\to c\\ z\in S_+}} f(z) \ge 0$$

1 I matematici della famiglia furono: Jakob Bernoulli (1654–1705); Nicolaus Bernoulli (1687–1759); Johann Bernoulli (1667–1748); Nicolaus Bernoulli, II (1695–1726); Daniel Bernoulli (1700–1782); Johann Bernoulli, II (1710–1790); Johann Bernoulli, III (1744–1807); Jakob Bernoulli, II (1759–1789). I maggiori furono Jakob, Nicolaus e Daniel.

per il teorema della permanenza del segno. L'unico numero che soddisfa entrambe le disuguaglianze è $f(c) = 0$. ◀

Le ipotesi sui valori di f agli estremi non sono poi così stringenti: vale lo stesso se $f(p) > 0$ e $f(q) < 0$, basta applicare il teorema alla funzione $x \mapsto -f(x)$. Ma possiamo dire molto di più.

Vediamo un'applicazione. Vogliamo vedere se l'equazione $x - 1 = \log_{10}(x+2)$ ha soluzioni. Consideriamo la funzione $f(x) = x - 1 - \log_{10}(x+2)$. Allora $f(0) = -1 - \log_{10} 2 < 0$, mentre $f(8) = 7 - \log_{10}(10) = 7 - 1 = 6 > 0$. Dunque l'equazione ammette soluzione, sebbene non abbiamo alcun metodo per determinarla "esattamente". Analogamente l'equazione $x = \cos x$ ha soluzione; infatti, se $f(x) = x - \cos x$, abbiamo $f(0) = -1 < 0$ e $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$.

Più avanti vedremo metodi più potenti che ci potranno anche dire il numero di soluzioni.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. *Sia f definita su un intervallo I e continua. Se a e b, con $a < b$, sono valori assunti da f, allora f assume anche ogni valore y con $a < y < b$.*

▶ Per ipotesi, esistono punti $p, q \in I$ tali che $f(p) = a$ e $f(q) = b$. Supponiamo che $p < q$, la dimostrazione nel caso $q < p$ è identica. La funzione

$$x \mapsto g(x) = f(x) - y$$

è continua in $[p \mathinner{..} q]$ e $g(p) = f(p) - y = a - y < 0$, mentre $g(q) = f(q) - y = b - y > 0$. Per il teorema sugli zeri, esiste un punto c nell'intervallo $[p \mathinner{..} q]$ tale che $g(c) = 0$. Ma allora $f(c) = y$. ◀

L'ipotesi che f sia definita su un intervallo è essenziale: la funzione $f(x) = 1/x$ è continua, $f(-1) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, ma non esiste alcun punto c in cui $f(c) = 0$. Questo non contraddice il teorema, perché questa funzione non è definita su un intervallo.

Il teorema sugli zeri non è l'unico contributo di Bolzano, che enunciò anche un risultato poi reso rigoroso da Weierstraß.

TEOREMA. *Sia f una funzione definita sull'intervallo chiuso $[p \mathinner{..} q]$ e continua. Allora f assume un valore massimo e un valore minimo.*

▶ La dimostrazione di questo teorema è piuttosto difficile, sebbene usi ancora l'idea della bisezione per un risultato preliminare: *esistono numeri k e K tali che, per $x \in [p \mathinner{..} q]$, $k \le f(x) \le K$.* Si esprime questo dicendo che f è *limitata.* Supponiamo dapprima che, per $x \in [p \mathinner{..} q]$, $f(x) \ge 0$. Perciò f non è limitata se, per qualsiasi $s > 0$, esiste x_s tale che $f(x_s) \ge s$. La dimostrazione sarà per assurdo, quindi supponiamo che f non sia limitata.

Come nella dimostrazione del teorema precedente poniamo $p_0 = p$ e $q_0 = q$ e dividiamo l'intervallo a metà con il punto medio r_0. La funzione sarà non limitata in almeno una delle due metà dell'intervallo; quindi possiamo definire

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0, \quad q_1 = r_0 \quad \text{se } f \text{ non è limitata in } [p_1 \mathinner{..} q_1], \\ p_1 &= r_0, \quad q_1 = q_0 \quad \text{se } f \text{ non è limitata in } [p_1 \mathinner{..} q_1]. \end{aligned}$$

Conveniamo che, se la funzione non è limitata in entrambe le metà, scegliamo quella di sinistra (andrebbe bene anche scegliere quella di destra, naturalmente, l'importante è fissare una regola).

Anche qui possiamo dare il via al meccanismo, perché la funzione f pensata come definita sull'intervallo $[p_1 \mathinner{..} q_1]$ soddisfa le stesse ipotesi. Quindi possiamo supporre di avere una successione inscatolata e indefinitamente decrescente di intervalli $[p_n \mathinner{..} q_n]$ in ciascuno dei quali la funzione non è limitata.

Esiste un unico punto c che appartiene a tutti questi intervalli e f è continua in c. Quindi esiste un intorno U di c tale che, per $z \in U$, $|f(z) - f(c)| \le 1$ (prendiamo come tolleranza 1, andrebbe bene un numero positivo qualsiasi). Siccome U contiene un intervallo aperto della forma $(c - \delta \mathinner{..} c + \delta)$, con $\delta > 0$, possiamo trovare m tale che $l/2^m < \delta$. Allora $[p_m \mathinner{..} q_m] \subseteq U$ e perciò, per $z \in [p_m \mathinner{..} q_m]$,

$$0 \le f(z) \le f(c) + 1$$

contro l'ipotesi che f non sia limitata in $[p_m \mathinner{..} q_m]$: contraddizione. Dunque f è limitata.

A questo punto possiamo passare a funzioni qualsiasi: la funzione $g = |f|$ soddisfa la condizione $g(x) \ge 0$ per $x \in [p \mathinner{..} q]$ e quindi esiste K tale che $0 \le g(x) \le K$. Ne segue che $-K \le f(x) \le K$ e quindi f è limitata.

Ora possiamo dimostrare l'esistenza di un punto nell'intervallo $[p \mathinner{..} q]$ dove f assume il valore massimo. Siccome l'insieme dei valori assunti da f è limitato, esso ha un estremo superiore M. Se dimostriamo che f assume il valore M siamo a posto. Ancora per assurdo, supponiamo che $f(x) \ne M$ per ogni $x \in [p \mathinner{..} q]$. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Per definizione di M e per l'ipotesi di contraddizione abbiamo $f(x) < M$ per $x \in [p \mathinner{..} q]$, quindi g è continua. Dimostriamo che g non è limitata, da cui deriverà l'assurdo perché violeremmo ciò che abbiamo appena dimostrato.

Sia $s > 0$: dobbiamo dimostrare che possiamo trovare $x_s \in [p \mathinner{..} q]$ tale che $g(x_s) \ge s$. Per definizione di estremo superiore, esiste un valore della funzione f che appartiene all'intervallo $[M - (1/s) \mathinner{..} M]$, cioè troviamo $x_s \in [p \mathinner{..} q]$ tale che

$$M - \frac{1}{s} \le f(x_s) < M$$

quindi

$$0 < M - f(x_s) \le \frac{1}{s}$$

e dunque, prendendo i reciproci,

$$\frac{1}{M - f(x_s)} \ge s$$

cioè proprio $g(x_s) \ge s$. Dunque la possibilità di definire g conduce a un assurdo e ne segue che f deve assumere il valore M.

Per l'esistenza del minimo si procede in modo analogo (o si prende $-f$). ◀

Si possono notare fondamentali differenze tra due dimostrazioni che usano la stessa idea: in quella del teorema sugli zeri si dà una procedura "effettiva" che permette, almeno in linea di principio, di trovare un'approssimazione del punto c tale che $f(c) = 0$. La dimostrazione del secondo teorema invece consiste di due dimostrazioni per assurdo: non dà alcuna procedura effettiva per determinare dove sia il punto di massimo (o quello di minimo).

Il problema di trovare uno zero di funzione si può affrontare con il calcolo approssimato, con il metodo di bisezione o altri più raffinati. Quello di trovare i punti di massimo e minimo è, invece, più complesso. Per funzioni derivabili, invece, si possono dare metodi numerici, come vedremo.

Il teorema dei valori intermedi ha conseguenze molto importanti. Una funzione f si dice *strettamente crescente* quando, per $x_1, x_2 \in D(f)$, se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$. Si dice *strettamente decrescente* quando, per $x_1, x_2 \in D(f)$, se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) > f(x_2)$. Il termine *strettamente monotona* significa che f è strettamente crescente o strettamente decrescente. Notiamo che una funzione strettamente monotona è iniettiva e quindi, considerando come codominio l'immagine, invertibile.

TEOREMA. *Se una funzione continua f definita su un intervallo è strettamente monotona, allora f è invertibile e la sua inversa è definita su un intervallo.*

▶ Quello che ci interessa è che l'immagine sia un intervallo. Ma per il teorema dei valori intermedi, l'immagine è un insieme I di numeri reali tale che, se $a, b \in I$, allora $[a \,..\, b] \subseteq I$. Dunque I è un intervallo; la dimostrazione completa richiede di esaminare un buon numero di casi; ne tratteremo alcuni, lasciando il resto per esercizio.

Poniamo $p = \inf I$ e $q = \sup I$ e ammettiamo per il momento che nessuno dei due sia infinito. Se $p \in I$ e $q \in I$, è evidente che $I = [p \,..\, q]$: infatti $[p \,..\, q] \subseteq I$ per quanto visto prima; se poi $y \in I$, abbiamo $p \le y \le q$ e quindi $y \in [p \,..\, q]$.

Supponiamo che $p \notin I$, $q \in I$: vogliamo vedere che $I = (p \,..\, q]$. Se $p < y \le q$, dalla definizione di estremo inferiore segue che esiste $z \in I$ tale che $0 < z - p < (y - p)/2$; perciò $y \in [z \,..\, q]$ e $[z \,..\, q] \subset I$, da cui $y \in I$. Dunque $(p \,..\, q] \subseteq I$. Viceversa, se $y \in I$ abbiamo $[y \,..\, q] \subseteq I$ e dunque $y > p$ (non può essere $y = p$ perché $p \notin I$). Dunque $y \in (p \,..\, q]$.

Si procede analogamente nel caso in cui $p \in I$ e $q \notin I$. Nel caso in cui $p \notin I$ e $q \notin I$ si tratta di adattare le due dimostrazioni precedenti.

Lasciamo come esercizio i casi in cui $p = -\infty$ oppure $q = +\infty$. ◀

TEOREMA. *Se una funzione continua f definita su un intervallo è invertibile, allora è strettamente monotona.*

▶ Supponiamo che f non sia strettamente monotona. Allora esistono tre punti del dominio di f, $x_1, x_2, x_3 \in D(f)$, con $x_1 < x_2 < x_3$, tali che valga una delle condizioni seguenti:

1. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_2) > f(x_3)$, $f(x_1) < f(x_3)$;
2. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_2) > f(x_3)$, $f(x_1) \ge f(x_3)$;
3. $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$, $f(x_1) < f(x_3)$;
4. $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$, $f(x_1) \ge f(x_3)$.

Svolgiamo la dimostrazione nel primo caso, gli altri si trattano in modo analogo. Per il teorema dei valori intermedi, esiste $c \in [x_1 \,..\, x_2]$ tale che $f(c) = f(x_3)$, dunque f non è iniettiva. ◀

LEMMA. *Se f è una funzione monotona definita sull'intervallo chiuso $[p \,..\, q]$ e $p < x < q$, allora esistono*

$$\lim_{z \to x-} f(z) \quad e \quad \lim_{z \to x+} f(z)$$

e si ha $\lim_{z \to x-} f(z) \le \lim_{z \to x+} f(z)$. Esistono anche $\lim_{z \to p} f(z)$ e $\lim_{z \to q} f(z)$.

▶ Scriviamo la dimostrazione solo per $\lim_{z \to x+} f(z)$, gli altri casi sono del tutto analoghi.

Siccome f è monotona, abbiamo $f(p) \le f(z)$ per ogni $z \in [p \,..\, q]$. Se $\delta > 0$ e $x + \delta \le q$, l'insieme dei valori assunti da f nell'intervallo $(x \,..\, x + \delta)$ è limitato inferiormente; quindi ne esiste l'estremo inferiore l. Il nostro scopo è di dimostrare proprio che $\lim_{z \to x+} f(z) = l$.

Sia data la tolleranza $\varepsilon > 0$; per le proprietà dell'estremo inferiore, esiste $z_0 \in (x \,..\, x + \delta)$ tale che $f(z_0) - l \le \varepsilon$. Se $z \in (x \,..\, z_0)$, avremo $f(z) \le f(z_0)$ e quindi $f(z) - l \le \varepsilon$: abbiamo trovato l'intorno nel quale è soddisfatta la tolleranza richiesta.

La dimostrazione che $\lim_{z \to x-} f(z) \le \lim_{z \to x+} f(z)$ è lasciata per esercizio. ◀

Notiamo un'importantissima conseguenza: se per un certo x si ha

$$l = \lim_{z \to x-} f(z) < \lim_{z \to x+} f(z) = m,$$

allora nessun punto interno all'intervallo $[l\mathinner{\ldotp\ldotp} m]$ può appartenere all'immagine di f e quindi f non è continua. Siccome è evidente che l'inversa di una funzione strettamente monotona è anch'essa strettamente monotona, abbiamo il teorema seguente.

TEOREMA. *Se f è una funzione continua definita su un intervallo e strettamente monotona, allora f è invertibile e la sua inversa è continua e definita su un intervallo.*

▶ Che f sia invertibile è già stato dimostrato. Inoltre sappiamo che l'inversa g è definita su un intervallo. Il problema è di applicare il lemma che parla di intervalli chiusi. Se y è un punto dell'immagine di g abbiamo tre casi: (1) y è il minimo dell'immagine; (2) y è un punto interno all'immagine; (3) y è il massimo dell'immagine. In alcun caso y è l'unico punto dell'immagine, perché f è iniettiva e il dominio è un intervallo (che non è formato, per definizione, da un solo punto). Possiamo applicare il lemma nel primo caso a un qualsiasi intervallo del tipo $[y, y_2]$, con y_2 appartenente all'immagine, $y < y_2$; nel secondo caso a un qualsiasi intervallo del tipo $[y_1, y_2]$ con y_1 e y_2 nell'immagine e $y_1 < y < y_2$; nel terzo caso a un qualsiasi intervallo $[y_1, y]$ con y_1 nell'immagine, $y_1 < y$.

In tutti i casi abbiamo che g è continua in y. ◀

Con questo ci saremmo potuti risparmiare il lavoro di dimostrare che la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ è continua, perché è l'inversa di $x \mapsto x^2$, definita su $[0 \mathinner{\ldotp\ldotp} \rightarrow)$. Torneremo sull'argomento.

2.4 TECNICHE DI CALCOLO DEI LIMITI

In genere non è possibile 'calcolare un limite', spesso si riesce solo a dimostrare che esiste. Tuttavia qualche trucco a volte funziona.

TEOREMA. *Sia g una funzione continua in y e sia f una funzione tale che la composizione $g \circ f$ sia definita in un intorno di x. Se*

$$\lim_{z \to x} f(z) = y$$

allora

$$\lim_{z \to x} g(f(z)) = g(y)$$

▶ Dire che $\lim_{z \to x} f(z) = y$ significa che la funzione $\tilde{f}$ definita da

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq x \\ y & \text{se } z = x \end{cases}$$

è continua in x. Dunque la composizione $x \mapsto g(\tilde{f}(x))$ è continua in x. ◀

Diamo un esempio di applicazione di questo teorema per calcolare

$$\lim_{z \to 1} \sin \frac{1 - z}{1 - \sqrt{z}}.$$

Ci basta calcolare

$$l = \lim_{z \to 1} \frac{1 - z}{1 - \sqrt{z}}$$

(se esiste), perché allora il limite cercato vale $\sin l$. Il limite della frazione è

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1-\sqrt{z}} &= \lim_{z\to 1}\frac{(1-\sqrt{z})(1+\sqrt{z})}{1-\sqrt{z}}\\ &= \lim_{z\to 1}(1+\sqrt{z}) = 2.\end{aligned}$$

La semplificazione si può eseguire perché in tutto il calcolo si assume $z \neq 1$ e, in questo modo, ci si riduce alla funzione continua $z \mapsto 1+\sqrt{z}$. Dunque il limite proposto vale $\sin 2$.

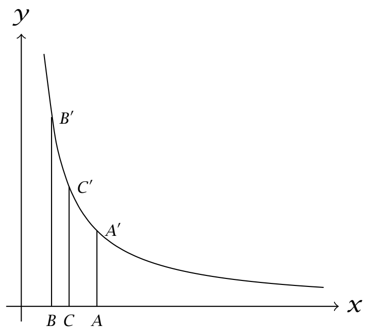


FIGURA 5: Calcolo di $\lim_{z\to 0} z\log z$

Possiamo provare a calcolare un limite più difficile: $\lim_{z\to 0} z^z$. Siccome $z^z = \exp(z\log z)$, possiamo ridurci a calcolare $\lim_{z\to 0} z\log z$: se questo limite è l, quello richiesto sarà $\exp(l)$. Qui usiamo la continuità di log e di exp anche se non è stata ancora ufficialmente dimostrata.

Per $0 < z < 1$, che è quanto ci interessa, $\log z$ si può vedere come l'opposto dell'area indicata nella figura 5 dal 'trapezio' con lato obliquo curvo $AA'B'B$, che maggioriamo con la somma delle aree dei due trapezi (con lato obliquo rettilineo) $AA'C'C$ e $CC'B'B$. Il punto B è dunque quello di coordinate $(z,0)$, mentre B' ha coordinate $(z,1/z)$. Come C scegliamo il punto di coordinate $(\sqrt{z},0)$ e perciò C' ha coordinate $(\sqrt{z},1/\sqrt{z})$. Chiamiamo S_1 e S_2 le aree di $AA'C'C$ e $CC'B'B$ rispettivamente: allora

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{z})\left(1+\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)\\ S_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z}-z)\left(\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)\end{aligned}$$

cioè le aree dei due trapezi sono uguali. Dunque

$$-\log z \leq \frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}$$

e perciò

$$z\left(\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \leq z\log z \leq 0$$

da cui otteniamo che

$$z\sqrt{z}-\sqrt{z} \leq z\log z \leq 0$$

e per il teorema sul confronto dei limiti abbiamo che

$$\lim_{z\to 0} z\log z = 0$$

dal quale finalmente otteniamo

$$\lim_{z\to 0} z^z = 1.$$

Risultato che tutto sommato ci attendevamo, ma che non è affatto ovvio. Con i metodi più potenti che studieremo più avanti non sarà necessaria tutta questa fatica per dimostrare che

$$\lim_{z\to 0} z^n \log n = 0$$

per ogni $n > 0$.

Il risultato precedente ci permette di "portar fuori" dal limite una funzione continua; il prossimo ci permetterà di "cambiare la variabile".

TEOREMA. *Sia f una funzione continua, definita su un intervallo e invertibile. Se x appartiene all'immagine di f e g è una funzione definita in un intorno di x, escluso x, allora*

$$\lim_{z\to x} g(z) = \lim_{t\to f^{-1}(x)} g(f(t))$$

nel senso che uno esiste se e solo se esiste l'altro e, in tal caso, sono uguali.

La dimostrazione consiste nel ricordare che una funzione continua, definita su un intervallo e invertibile ha inversa con le stesse proprietà. Quindi si riduce a scrivere una camionata di disuguaglianze e perciò la omettiamo. Vediamo invece qualche interessante applicazione.

Cominciamo con uno facile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}.$$

Possiamo considerare come f la funzione $t \mapsto 1-t$ che soddisfa certamente le ipotesi. Al posto di x metteremo dunque $(1-t)$ e siccome $f^{-1}(0) = 1$, dovremo calcolare

$$\lim_{t\to 1} \frac{1-t}{1-\sqrt{t}}$$

che abbiamo già calcolato e vale 2.

Come si fa, in pratica? Vogliamo togliere di mezzo $1-x$ sostituendolo con qualcosa di più semplice; allora scriviamo formalmente $t = 1-x$ e cerchiamo di risolvere rispetto a x, ottenendo $x = 1-t$. La funzione $t \mapsto (1-t)$ è di quelle buone e quindi possiamo eseguire la sostituzione. Un esempio più complicato:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x - \cos x - 1}{\cos x}.$$

Il trucco che qui funziona è la sostituzione $t = \tan(x/2)$ che trasforma l'espressione data in una frazione algebrica. La possiamo usare perché la funzione $x \mapsto \tan(x/2)$ è invertibile, se si limita il dominio all'intervallo $(-\pi \,..\, \pi)$; l'inversa dà allora $x = 2\arctan t$ e quando $x = \pi/2$ avremo $t = \tan(\pi/4) = 1$. Ricordiamo poi che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e perciò

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x - 1 &= \frac{2t-(1-t^2)-(1+t^2)}{1+t^2} \\ &= \frac{2(t-1)}{1+t^2}, \end{aligned}$$

Allora dobbiamo calcolare

$$\lim_{t\to 1} \frac{2(t-1)}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1-t^2} = \lim_{t\to 1} \frac{2(t-1)}{1-t^2} = \lim_{t\to 1} \frac{-2}{1+t} = -1.$$

Potremmo anche usare la sostituzione $u = \pi/2 - x$, cioè $x = \pi/2 - u$ che porta il limite nella forma

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos u - \sin u - 1}{\sin u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\cos u - 1}{\sin u} - 1\right) = -1 + \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{u}\frac{u}{\sin u} = -1$$

perché sappiamo già che $\lim_{u\to 0}(1 - \cos u)/u = 0$.

2.5 FUNZIONI COMPOSTE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione $x \mapsto \log(x + 1)$. L'intuizione ci dice che la funzione è derivabile, perché il suo grafico non è altro che la traslazione del grafico del logaritmo: se questo ha tangente in ogni punto, anche ogni traslato deve averlo. Ancora: abbiamo "calcolato" la derivata di $x \mapsto (1 - x^2)^{1/2}$ con un trucco nel quale supponevamo fin dall'inizio che la funzione fosse derivabile. Questo modo di procedere, comune nei primi tempi dell'analisi, può condurre a risultati scorretti o addirittura paradossali.

Supponiamo che abbia senso la somma di infiniti termini

$$S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n + \dots$$

e che per queste espressioni valgano le regole usuali. Allora

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n+1} + \dots = (-1) + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S.$$

Dunque $2S = S - 1$, da cui $S = -1/2$. Difficile crederci, pare. Eppure Euler sosteneva, sulla base di questi conti, che i numeri negativi fossero da considerare maggiori di "infinito".

Occorre perciò qualcosa di più rigoroso. Non che sia del tutto illecito il metodo di porre

$$F(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

e notare che $F(x)^2 = 1 - x^2$, da cui, derivando ambo i membri e usando al primo la regola di Leibniz,

$$\begin{aligned} F'(x)F(x) + F(x)F'(x) &= -2x \\ F'(x) = \frac{-x}{F(x)} &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (x \neq -1, x \neq 1) \end{aligned}$$

È illecito se prima non dimostriamo la derivabilità di F.

La risposta ci è data dal concetto di composizione di funzioni. Nel nostro caso possiamo scrivere $F(x) = g(f(x))$, dove $f\colon x \mapsto 1 - x^2$ e $g\colon y \mapsto \sqrt{y}$. Usiamo simboli diversi per le variabili, in modo da distinguere meglio le due funzioni. Entrambe le funzioni componenti sono derivabili nel loro dominio, a parte che la seconda non lo è in 0. Proviamo a ragionare in modo intuitivo e poi a rendere rigorosa la dimostrazione.

Dobbiamo calcolare il rapporto di Fermat di F:

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h}.$$

L'idea è che, per h piccolo, $f(x+h)$ è approssimabile con $f(x)+hf'(x)$ e $k = hf'(x)$ è piccolo; quindi $g(f(x)+hf'(x)) = g(y+k)$ è approssimabile con $g(y)+kg'(y) = g(y) + hg'(y)f'(x)$ e dunque

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Con le funzioni scritte si ha

$$f'(x) = -2x, \qquad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

A dire il vero non avevamo ancora calcolato la derivata di g, lo si faccia per esercizio. Per $y = f(x)$ si ha proprio

$$F'(x) = g'(y)f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

che coincide con il valore "calcolato" con l'altro metodo.

TEOREMA. *Sia f definita e continua in un intorno di x e derivabile in x. La funzione g sia definita in un intorno di $y = f(x)$ e derivabile in $y = f(x)$. Supponiamo infine che la composizione $F\colon z \mapsto g(f(z))$ sia definita in un intorno di x. Allora F è derivabile in x e*

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Le ipotesi che abbiamo scritto non sono le meno restrittive possibili, ma queste saranno sufficienti per le applicazioni.

▶ Dobbiamo trattare il rapporto di Fermat di F:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}.$$

Sappiamo scrivere $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$, dove $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$; siccome f è continua in x, per h piccolo anche $k = hf'(x) + h\varphi(h)$ sarà piccolo e quindi potremo calcolare $g(y+k)$; dunque la nostra espressione diventa

$$\frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x)) + kg'(f(x)) + \psi(k) - g(f(x))}{h}$$

dove abbiamo usato la formula analoga per g: $g(y+k) = g(y) + kg'(y) + k\psi(k)$, con $\lim_{k\to 0}\psi(k) = 0$, e $y = f(x)$. Andiamo avanti:

$$\begin{aligned}\frac{kg'(f(x)) + k\psi(k)}{h} &= (g'(f(x)) + \psi(k))\frac{k}{h}\\ &= (g'(f(x)) + \psi(k))(f'(x) + \varphi(h)).\end{aligned}$$

A questo punto prendiamo il limite per $h \to 0$ e otteniamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x))f'(x). \qquad ◀$$

Abbiamo naturalmente usato il fatto che

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} hf'(x) + h\varphi(h) = 0,$$

non abbiamo scritto $k(h)$ solo per evitare di complicare la formula, ma la definizione $k = hf'(x) + h\varphi(h)$ rende chiaro che si tratta di una funzione che ha limite 0 per $h \to 0$. Come si vede, l'idea di considerare la tangente come la retta che approssima meglio il grafico della funzione vicino al punto considerato è vincente.

Questo teorema permette di calcolare la derivata di moltissime funzioni che ancora non sapevamo trattare. Per esempio, siccome

$$x^r = \exp(r \log x),$$

se consideriamo $F(x) = x^r$ (definita per $x > 0$), avremo

$$f(x) = r \log x, \qquad g(y) = \exp y$$

e perciò

$$f'(x) = \frac{r}{x}, \qquad g'(y) = \exp y,$$
$$F'(x) = g'(f(x))f'(x) = \exp(r \log x)\frac{r}{x} = rx^r \frac{1}{x} = rx^{r-1}$$

esattamente come nel caso di $x \mapsto x^n$ con n intero positivo. Il ragionamento non vale per $r = 0$, ma non occorre scomodare tanta teoria per derivare la funzione $x \mapsto 1$. Per $r = 1/2$ si ha proprio che la derivata di $g\colon y \mapsto \sqrt{y}$ è

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Nel caso della funzione $F\colon x \mapsto \sqrt[n]{x}$ che, per $n > 0$ intero dispari è definita anche per $x \le 0$, possiamo usare un trucco: se $x > 0$, si ha $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ e quindi la derivata si può calcolare come prima. Nel caso di $x < 0$, si ha

$$\sqrt[n]{x} = -(-x)^{1/n}.$$

Quindi, per $x < 0$, ponendo per comodità $r = 1/n$, si ha

$$F'(x) = r(-x)^{r-1} \cdot (-1)$$

dove abbiamo usato $f(x) = -x$ e $g(y) = y^{1/n}$. Perciò

$$F'(x) = \frac{r(-(-x)^r)}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

che è la stessa espressione valida anche quando $x > 0$. Si noti che la formula non vale per $x = 0$ e infatti, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ non è derivabile in 0. Lo si verifichi esplicitamente.

3

Diamo la definizione formale di derivabilità, alla luce della teoria dei limiti. Sia x un punto di accumulazione appartenente al dominio $D(f)$ della funzione f. Diremo che f è *derivabile in* x se esiste

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Questa espressione si scrive anche, in modo del tutto equivalente,

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x),$$

dal momento che la funzione continua $h \mapsto x+h$ è invertibile. In altre parole la funzione

$$v_{f,x}(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \text{se } h \neq 0 \\ f'(x) & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

è continua in 0 precisamente quando f è derivabile in x e la sua derivata è il numero $f'(x)$.

Diremo che f è *derivabile* se è tale in ogni punto di accumulazione del dominio (la derivata non ha senso nei punti isolati).

TEOREMA. *Se f è derivabile in x, allora f è continua in x.*

▶ Per $h \neq 0$ possiamo evidentemente scrivere

$$f(x+h) = f(x) + hv_{f,x}(h)$$

e quindi, per i teoremi sui limiti, visto che $v_{f,x}$ è continua in 0,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0}(f(x) + hv_{f,x}(h)) = f(x) + 0f'(x) = f(x). \quad ◀$$

Una prima applicazione è alla continuità di log, dal momento che ne abbiamo già dimostrato la derivabilità; inoltre sappiamo già che log è strettamente crescente e definita in $(0\,..\,\to)$.

TEOREMA. *La funzione $x \mapsto \log x$ è continua. Di conseguenza anche $x \mapsto \exp x$ è continua.*

▶ Abbiamo infatti visto che $\log'$ esiste in ogni punto del dominio. ◀

DEFINIZIONE. *Sia data una funzione f. Un punto x di $D(f)$ si dice un punto di massimo se esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap D(f)$, $f(z) \leq f(x)$. Un punto x di $D(f)$ si dice un punto di minimo se esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap D(f)$, $f(z) \geq f(x)$.*

È evidente che un punto isolato del dominio è sia di massimo che di minimo; ci interessano di più, ovviamente, i punti di massimo e di minimo che siano punti di accumulazione del dominio. In caso di dubbio parleremo di *massimo e minimo locale* (si dice spesso anche *relativo*) se dobbiamo distinguere dal valore massimo o minimo assunti dalla funzione.

TEOREMA. *Se f è definita in un intervallo aperto $(p\,..\,q)$ e $x \in (p\,..\,q)$ è un punto di massimo o di minimo locale in cui f è derivabile, allora $f'(x) = 0$.*

▶ Dimostriamo la tesi nel caso in cui x sia un punto di massimo; per un punto di minimo basta considerare $-f$. Sia U un intorno di x tale che, per $z \in U$, $f(z) \le f(x)$. Allora, per $z \in U$, $z > x$, si ha

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le 0$$

mentre per $z \in U$, $z < x$, si ha

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, per i due limiti seguenti, che esistono perché f è derivabile in x, vale

$$f'(x) = \lim_{z \to x+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le 0 \qquad f'(x) = \lim_{z \to x-} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \ge 0$$

e dunque $f'(x) = 0$. ◀

3.1 I TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI

Il primo teorema importante sulle funzioni derivabili è quello tradizionalmente attribuito a Michel Rolle (1652–1719) che però non ne diede che una vaga giustificazione.

In molti di questi teoremi le ipotesi sulle funzioni si scrivono in un modo complicato che cercheremo di riassumere con una locuzione.

DEFINIZIONE. *La funzione f si dice una funzione di Lagrange in $[p \,..\, q]$ se è definita e continua su $[p \,..\, q]$ ed è derivabile su $(p \,..\, q)$.*

Un esempio di funzione di Lagrange è $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$, sull'intervallo $[-1 \,..\, 1]$. È continua e derivabile in ogni punto del dominio, esclusi proprio gli estremi. Chiaramente, la funzione può essere derivabile anche agli estremi dell'intervallo per essere una funzione di Lagrange: è solo che la derivabilità agli estremi non fa parte delle richieste. In particolare, una funzione derivabile in un intervallo $(p \,..\, q)$ è una funzione di Lagrange su ogni sottointervallo chiuso.

TEOREMA DI ROLLE. *Sia f una funzione di Lagrange su $[p \,..\, q]$ tale che $f(p) = f(q)$. Allora esiste $c \in (p \,..\, q)$ tale che $f'(c) = 0$.*

▶ Per il teorema di Weierstraß sui valori estremi, f assume il valore massimo e il minimo. Siccome $f(p) = f(q)$ è evidente che uno fra massimo e minimo dovrà cadere all'interno dell'intervallo (ci sarebbe il caso in cui stanno entrambi agli estremi, ma allora la funzione sarebbe costante e la tesi sarebbe comunque verificata), dunque sarà un massimo o minimo locale. In un punto di massimo o di minimo interno la derivata, che esiste per ipotesi, vale 0. ◀

Il teorema di Rolle, di per sé, non serve a molto. Lo si enuncia perché la dimostrazione è molto semplice e, con esso, possiamo dimostrare teoremi più generali.

TEOREMA DI LAGRANGE. *Sia f una funzione di Lagrange su $[p \,..\, q]$. Allora esiste un punto $c \in (p \,..\, q)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}.$$

▶ Per dimostrare questo teorema vogliamo usare quello di Rolle. Ci serve una funzione g, definita in termini di f, che abbia le proprietà richieste. La cerchiamo della forma

$$g(x) = f(x) - ax,$$

dove a è un opportuno numero reale, che è certamente una funzione di Lagrange su $[p \mathinner{..} q]$. Dobbiamo allora avere $g(p) = g(q)$, cioè

$$f(p) - ap = f(q) - aq$$

che dà

$$a = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}.$$

In base al teorema di Rolle, esiste un punto c tale che $g'(c) = 0$, cioè, essendo $g'(x) = f'(x) - a$,

$$f'(c) - a = 0$$

che si traduce nell'uguaglianza richiesta. ◀

Il valore $(f(q) - f(p))/(q - p)$ si chiama *valore medio* di f in $[p \mathinner{..} q]$; il teorema di Lagrange dice quindi che la derivata di una funzione di Lagrange in un intervallo assume il valore medio della funzione in quell'intervallo. Si pensi a qualche situazione fisica in cui questo valore è proprio comunemente noto come 'valore medio'.

La terminologia *funzione di Lagrange* non è diffusa; ma riassume bene le ipotesi (continuità in un intervallo chiuso e derivabilità all'interno; non è richiesta la derivabilità agli estremi): a una funzione di Lagrange si può applicare l'omonimo teorema che ha due conseguenze importantissime.

Il teorema di Lagrange è legato a un'importante concetto. Data la funzione f definita sull'intervallo $[p \mathinner{..} q]$, possiamo considerare la retta per i due punti $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ che ha equazione

$$y - f(p) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}(x - p).$$

Cerchiamo il punto sulla curva definita da f che abbia distanza massima da questa retta. Per evitare notazioni complicate, chiamiamo m il coefficiente angolare della retta. La distanza del punto $(t, f(t))$ da questa retta è

$$\frac{|f(t) - f(p) - m(t - p)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

e, per trovare la distanza massima, ci basta considerare il numeratore e togliere il modulo, cioè la funzione

$$g(t) = f(t) - f(p) - m(t - p).$$

Di questa cercheremo il minimo e il massimo, poi ne calcoleremo il modulo e potremo scegliere quale sia il più grande. Se la funzione f è una funzione di Lagrange, possiamo essere certi che il minimo e il massimo di g siano all'interno dell'intervallo $[p \mathinner{..} q]$, perché $g(p) = g(q) = 0$; questo purché il grafico di f non sia la retta stessa, ma in tal caso il problema non si porrebbe nemmeno. Inoltre g è derivabile in $(p \mathinner{..} q)$ e dunque troveremo minimo e massimo dove g' si annulla:

$$g'(t) = f'(t) - m.$$

Dunque $g'(t) = 0$ se e solo se $f'(t) = m$, cioè t è proprio uno dei punti la cui esistenza è nota dal teorema di Lagrange!

Vediamo in un caso semplice, quello di $f(x) = ax^2$, con $a > 0$. Cerchiamo dunque i punti $t \in (p \mathinner{..} q)$ in cui

$$f'(t) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = a(q + p).$$

Evidentemente si ha $f'(t) = 2at$ e quindi $t = (q + p)/2$. La distanza massima è dunque

$$\frac{|at^2 - ap^2 - m(t-p)|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|(t-p)(at+ap-m)|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Qui $m = (aq^2 - ap^2)/(q-p) = a(q+p)$ e dunque abbiamo

$$t - p = \frac{q-p}{2}, \qquad at + ap - m = a\frac{q+p}{2} + ap - a(q+p) = \frac{a}{2}(p-q),$$

da cui, togliendo il modulo, otteniamo come distanza massima

$$\frac{a}{4}\frac{(q-p)^2}{\sqrt{1+a^2(q+p)^2}}.$$

Per $f(x) = 1/x$, sempre nell'intervallo $[p \mathrel{..} q]$ (con $q > p > 0$), abbiamo

$$m = \frac{f(q) - f(p)}{q-p} = -\frac{1}{pq}$$

e dunque dobbiamo risolvere l'equazione

$$-\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{pq},$$

che dà come punto di massima distanza $t = \sqrt{pq}$ che è la media geometrica tra p e q. Da questo segue che $p < \sqrt{pq} < q$, se $0 < p < q$; risultato dimostrabile senza passare per il teorema di Lagrange, naturalmente.

Nel caso di $f(x) = \sin x$ e prendendo $0 \le p < q \le \pi$, si ha

$$m = \frac{\sin q - \sin p}{q-p}$$

e l'equazione è

$$\cos t = \frac{\sin q - \sin p}{q-p}.$$

Il teorema di Lagrange, in questo caso, ci garantisce che

$$-1 \le \frac{\sin q - \sin p}{q-p} \le 1$$

perché l'equazione ha soluzione.

Analogamente, il teorema applicato a $f(x) = \exp x$ nell'intervallo $[0 \mathrel{..} b]$ dice che l'equazione

$$\frac{\exp b - 1}{b} = \exp c$$

ha soluzione in questo intervallo (perché $f'(x) = \exp x$) e, essendo f crescente, abbiamo le due disuguaglianze

$$1 \le \frac{\exp b - 1}{b} \le \exp b.$$

La prima si può anche scrivere $1 + b \le \exp b$, mentre la seconda dice che $\exp b - 1 \le b \exp b$ cioè, in altro modo, $(1-b)\exp b \le 1$. Per $0 < b < 1$ abbiamo dunque

$$\exp b \le \frac{1}{1-b}.$$

Una delle principali conseguenze del teorema di Lagrange è un criterio spesso utile per determinare se una funzione è crescente o decrescente.

TEOREMA. *Se la funzione f è definita e derivabile in un intervallo e vale $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D(f)$, allora f è strettamente crescente.*

▶ Consideriamo $x_1, x_2 \in D(f)$, con $x_1 < x_2$; allora f è certamente una funzione di Lagrange su $[x_1 \mathrel{..} x_2]$ e quindi possiamo scrivere

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) > 0$$

per un opportuno $c \in (x_1 \mathrel{..} x_2)$, dunque $f(x_1) < f(x_2)$. ◀

È evidente che supponendo $f'(x) < 0$ la conclusione diventa che f è strettamente decrescente.

Notiamo che la condizione appena scritta è solo *sufficiente* affinché una funzione derivabile sia strettamente crescente. L'esempio più semplice al riguardo è $x \mapsto x^3$ che è strettamente crescente, ma ha derivata nulla in 0.

TEOREMA. *Se la funzione f è definita in un intervallo, derivabile e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in D(f)$, allora f è costante.*

▶ Di nuovo, se $x_1, x_2 \in D(f)$ e $x_1 < x_2$, possiamo scrivere

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) = 0$$

per un opportuno $c \in (x_1 \mathrel{..} x_2)$. Questo prova che il valore della funzione f è lo stesso su qualsiasi coppia di punti del dominio; dunque f assume lo stesso valore su ogni punto. ◀

Indebolendo le ipotesi si ottiene una conclusione più debole: se f è derivabile in un intervallo e $f'(x) \geq 0$ in esso, allora f è (debolmente) crescente, cioè se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Lo si dimostri per esercizio. Si dimostri anche che se l'insieme dei punti dove f' si annulla non ha punti di accumulazione, allora f è strettamente crescente.

Vediamo un importante esempio. Della funzione f si sa che è definita ovunque e che $f'(x) = f(x)$, per ogni x. Che possiamo dire della funzione f?

Conosciamo già una funzione che ha queste proprietà, la funzione esponenziale: abbiamo già visto infatti che $\exp' x = \exp x$. (Non del tutto rigorosamente, per la verità.) Siccome $\exp x \neq 0$, possiamo considerare la funzione

$$g(x) = \frac{f(x)}{\exp x}$$

che è definita ovunque; ne calcoliamo la derivata:

$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp' x}{(\exp x)^2} = \frac{f(x)\exp x - f(x)\exp x}{(\exp x)^2} = 0$$

per l'ipotesi $f'(x) = f(x)$. Dunque g è costante; se poniamo $a = g(0)$, avremo allora, per ogni x,

$$f(x) = a\exp x.$$

Consideriamo ora una funzione F definita in $(0 \mathrel{..} \rightarrow)$ tale che $F'(x) = 1/x$, per ogni $x > 0$. Se consideriamo $g(x) = F(x) - \log x$ abbiamo che

$$g'(x) = F'(x) - \log' x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

e dunque g è costante. Poniamo $a = g(1)$, cioè $a = F(1) - \log 1 = F(1)$. Allora, per $x > 0$,

$$F(x) = F(1) + \log x.$$

Se poniamo $F(1) = \log k$, che è possibile, abbiamo un'espressione ancora più interessante:

$$F(x) = \log(kx).$$

Si provi che se F è una funzione definita e derivabile in $(0 \mathrel{..} \rightarrow)$ per la quale, per $x > 0$,

$$F(x) = \frac{b}{x}, \quad F(1) = 0$$

con $b \neq 0$, allora esiste un unico a tale che $F(x) = \log_a x$, per ogni $x > 0$.

Il teorema di Lagrange e le sue conseguenze sono uno strumento insostituibile per lo *studio di funzioni*, perché spesso permettono di trovare gli "intervalli di crescenza e decrescenza", quindi di ottenere informazioni utili sull'andamento di una funzione.

Consideriamo, per esempio, $f(x) = x^3 - 3x$; allora $f'(x) = 3x^2 - 3$ ed è facile studiarne la variazione:

$x < -1$	$f'(x) > 0$	la funzione è crescente in $(\leftarrow \mathinner{\ldotp\ldotp} -1]$
$-1 < x < 1$	$f'(x) < 0$	la funzione è decrescente in $[-1 \mathinner{\ldotp\ldotp} 1]$
$x > 1$	$f'(x) > 0$	la funzione è crescente in $[1 \mathinner{\ldotp\ldotp} \rightarrow)$

Di conseguenza -1 è un punto di massimo e 1 è un punto di minimo.

Vediamo un'applicazione di questo studio. Ci ricordiamo che l'equazione $x = \cos x$ ha soluzione; ma quante ne ha? Consideriamo di nuovo la funzione $f(x) = x - \cos x$, che è derivabile in ogni punto. Ne calcolamo la derivata: $f'(x) = 1 + \sin x$ che si annulla solo per $\sin x = -1$, cioè $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ (k intero). In tutti gli altri punti si ha $f'(x) > 0$, quindi la funzione è strettamente crescente e perciò può annullarsi in al più un punto. La soluzione di $x = \cos x$ è dunque unica.

Facciamo qualcosa di più complicato: cerchiamo i valori di m e q per i quali $\exp x = mx + q$ abbia soluzioni e vogliamo anche discutere il numero di soluzioni al variare di m e q. Consideriamo dunque $f(x) = \exp x - mx - q$ e studiamo la crescenza e decrescenza di f:

$$f'(x) = \exp x - m$$

che è positiva per $\exp x > m$. Se $m > 0$, la funzione è decrescente in $(\leftarrow \mathinner{\ldotp\ldotp} \log m]$ e crescente in $[\log m \mathinner{\ldotp\ldotp} \rightarrow)$ e quindi ha un minimo assoluto in $\log m$.

Siccome $f(\log m) = m - m \log m - q$, avremo una soluzione quando $f(\log m) = 0$, cioè $q = m(1 - \log m)$, perché il grafico di f è tangente all'asse delle ascisse, due soluzioni quando $f(\log m) < 0$, cioè $q > m(1 - \log m)$, nessuna soluzione quando $f(\log m) > 0$, cioè $q < m(1 - \log m)$. Che ci siano soluzioni quando $q > m(1 - \log m)$ si basa sui limiti

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x - mx - q = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x - mx - q = +\infty,$$

che discuteremo più avanti.

Se $m \leq 0$, la disuguaglianza $\exp -m > 0$ è certamente soddisfatta e quindi f, in questo caso, è crescente; dunque c'è al più una soluzione. Se $m = 0$ l'equazione diventa $\exp x = q$, che ha soluzione solo per $q > 0$.

Vediamo per $m < 0$: quello che ci interessa è scoprire l'immagine della funzione $g(x) = \exp x - mx$. Usando concetti che vedremo più avanti, possiamo dire che

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x - mx = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x - mx = +\infty.$$

e quindi che per $m < 0$ si ha una soluzione qualunque sia q.

3.2 I TEOREMI DI CAUCHY E DI L'HÔPITAL

Con una tecnica analoga a quella usata per il teorema di Lagrange si può dimostrare un risultato più generale, dovuto a Cauchy.

TEOREMA DI CAUCHY. *Siano f e g funzioni di Lagrange su $[p \mathinner{\ldotp\ldotp} q]$ e supponiamo che $g(x) \neq 0$ per $x \in [p \mathinner{\ldotp\ldotp} q]$ e $g'(x) \neq 0$ per $x \in (p \mathinner{\ldotp\ldotp} q)$. Allora esiste un punto $c \in (p \mathinner{\ldotp\ldotp} q)$ tale che*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(q) - f(p)}{g(q) - g(p)}.$$

Il teorema di Lagrange è un caso speciale di questo, con $g(x) = x$, così come il teorema di Rolle è un caso speciale di quello di Lagrange quando $f(p) = f(q)$, così che in effetti dicono la stessa cosa.

▶ La tecnica della dimostrazione è simile a quella usata in precedenza: cerchiamo a in modo che alla funzione $F(x) = f(x) - ag(x)$ si possa applicare il teorema di Rolle, perché F è certamente una funzione di Lagrange su $[p \,..\, q]$. Siccome $F(p) = f(p) - ag(p)$ e $F(q) = f(q) - ag(q)$, troviamo

$$a(g(q) - g(p)) = f(q) - f(p).$$

Notiamo che $g(q) \neq g(p)$; se non fosse così, per il teorema di Rolle esisterebbe un punto $d \in (p \,..\, q)$ tale che $g'(d) = 0$, che è escluso dall'ipotesi. Quindi a è univocamente determinato.

Ora il punto $c \in (p \,..\, q)$ fornito dal teorema di Rolle, cioè tale che $F'(c) = 0$ è quello desiderato:

$$f'(c) - ag'(c) = 0$$

e quindi, essendo $g'(c) \neq 0$ per ipotesi,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = a = \frac{f(q) - f(p)}{g(q) - g(p)}.$$ ◀

Il teorema di Cauchy serve essenzialmente per dimostrare un teorema assai utile per i calcoli. È dovuto probabilmente a Johan Bernoulli, ma apparve per la prima volta senza attribuzioni nel libro *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* del marchese Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661–1704) a cui Bernoulli aveva insegnato il calcolo.

Enunceremo il teorema in un caso particolare, lo estenderemo in seguito, ma prima vogliamo capire da dove Bernoulli ha avuto l'idea. Consideriamo due funzioni f e g definite in un intorno di x e derivabili in x; supponiamo anche che $f(x) = g(x) = 0$, ma che g non assuma il valore 0 se non in x. Se vogliamo calcolare il

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)}{g(z)}$$

possiamo sfruttare il trucco di "dividere numeratore e denominatore per $z - x$":

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to x} \frac{\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}}{\dfrac{g(z) - g(x)}{z - x}} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

purché $g'(x) \neq 0$. Il primo passaggio usa ovviamente il fatto che $f(x) = g(x) = 0$. Che succede però se $f'(x) = g'(x) = 0$? Saremmo di nuovo in un caso di indeterminazione. Bernoulli (o l'Hôpital) esaminò proprio questo e ne dedusse un teorema davvero utile. Più tardi Cauchy dimostrò il teorema che porta il suo nome e da questo è più facile e diretto dedurre il teorema che ora tratteremo.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. *Siano f e g funzioni definite in un intorno W di x, escluso x, e derivabili, con $g'(z) \neq 0$ per $z \in W$, $z \neq x$. Supponiamo che*

$$\lim_{z\to x} f(z) = 0, \qquad \lim_{z\to x} g(z) = 0.$$

Se esiste

$$\lim_{z\to x} \frac{f'(z)}{g'(z)} = l$$

allora si ha anche

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)}{g(z)} = l.$$

▶ Diamo solo un'idea della dimostrazione. Verifichiamo prima di tutto la questione per il limite da destra, si potrà fare in modo analogo per il limite da sinistra. Le funzioni $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ che si ottengono estendendo f e g ponendo $\tilde{f}(x) = 0$ e $\tilde{g}(x) = 0$ sono continue e quindi funzioni di Lagrange nell'intervallo $[x \mathinner{..} z]$ per qualsiasi $z \in W$, $z > x$, perché coincidono con f e g. Le due funzioni dunque soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy e quindi, per ogni $z \in W$, $z > x$, esiste $t_z \in (x \mathinner{..} z)$ con

$$\frac{\tilde{f}'(t_z)}{\tilde{g}'(t_z)} = \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x)}{\tilde{g}(z) - \tilde{g}(x)}$$

cioè

$$\frac{f'(t_z)}{g'(t_z)} = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Via via che z si avvicina a x, anche t_z si avvicina a x (la parte difficile della dimostrazione è rendere rigoroso questo passaggio) e si può concludere adoperando l'esistenza di $\lim_{z \to x} f'(z)/g'(z)$. ◀

Un paio di esempi di applicazione del teorema. Consideriamo

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - \cos x - 1}{\cos x}.$$

Le funzioni soddisfano le ipotesi del teorema, quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - \cos x - 1}{\cos x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x + \sin x}{-\sin x} = \frac{0 + 1}{-1} = -1$$

dove il simbolo $\overset{\mathrm{H}}{=}$ va interpretato come "l'uguaglianza vale purché il limite che segue esista" e indica l'applicazione del teorema.

In certi casi l'applicazione del teorema di l'Hôpital non ha molto senso; si pensi al caso

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cos h}{1} = \cos 0 = 1$$

in cui il calcolo richiederebbe la derivata della funzione seno che è stata ottenuta tramite il limite richiesto! Anche la funzione precedente, in effetti, potrebbe ricadere in questo circolo vizioso. Tuttavia, siccome la derivata di seno e coseno è nota, non è proibito adoperare il teorema di l'Hôpital anche qui.

Il teorema di l'Hôpital si può usare anche più volte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}.$$

Dopo il primo passaggio alle derivate, si ottiene un limite al quale il teorema è ancora applicabile. L'ultimo limite esiste, quindi esiste anche il secondo, quindi anche il primo.

Altro esempio, nel quale è bene eseguire qualche semplificazione, prima di procedere con la seconda applicazione del teorema:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\log x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{x} - 1}{2x - 2} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{2} \frac{1 - x}{x(x - 1)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{2} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Si potrebbe anche applicare il teorema all'espressione ottenuta dopo la prima applicazione senza eseguire la semplificazione, ottenendo in questo caso di dover calcolare il limite di $-1/(2x^2)$. In generale, però, è meglio prima di tutto eseguire le possibili semplificazioni.

Si faccia anche attenzione a servirsi del teorema solo quando le funzioni soddisfano le ipotesi, per non incorrere in gravi errori. Se infatti applicassimo il teorema per calcolare $\lim_{x\to 1}(x-1)/x$, otterremmo $\lim_{x\to 1} 1/1 = 1$ che non è certamente il limite richiesto.

Vediamo una delle principali conseguenze del teorema. Se la funzione f è continua in x, il rapporto di Fermat fornisce proprio un'espressione del tipo trattato dal teorema di l'Hôpital: in

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

il numeratore ha limite 0 per $z \to x$ se e solo se f è continua in x. Se f è derivabile in un intorno di x, possiamo applicare il teorema di l'Hôpital; la derivata del numeratore è $f'(z)$, quella del denominatore è 1.

TEOREMA. *Se f è continua in x e derivabile in un intorno di x, escluso al più x, allora f è derivabile in x se e solo se* $\lim_{z\to x} f'(z)$ *esiste e, in tal caso,*

$$f'(x) = \lim_{z\to x} f'(z).$$

Spesso il teorema si usa per dimostrare che f *non* è derivabile in x. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x^2-x^3}$, la cui derivata, per $x < 1$ ma $x \neq 0$, è

$$f'(x) = \frac{2x-3x^2}{2\sqrt{x^2-x^3}}.$$

La funzione non è allora derivabile in 1, come si vede facilmente; per trattare la derivabilità in 0, consideriamo il limite da destra e quello da sinistra della derivata. Per trattarlo dobbiamo portare il numeratore sotto il segno di radice quadrata, ma per questo occorre stabilire se è positivo o negativo. Con ovvi calcoli si vede che $2x-3x^2 > 0$ per $0 < x < 2/3$. Quindi, per $0 < x < 2/3$, si può scrivere

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2x-3x^2)^2}{x^2-x^3}}$$

mentre, per $x < 0$, si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2x-3x^2)^2}{x^2-x^3}}$$

Chiamiamo g l'espressione sotto radice:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(2-3x)^2}{1-x} = 1$$

da cui deduciamo che

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = 1.$$

Quindi f non è derivabile in 0.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^n \log x$, definita e continua in $(0\,..\,\to)$. Il limite a $+\infty$ non dà problemi; vediamo quello in 0, scrivendo $f(x) = \log x / x^{-n}$ alla quale si può applicare il teorema di l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-n}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{n} x^n = 0.$$

Non occorre il teorema per calcolare il limite di $x^n(\log x)^m$, con $n \ge m > 0$, perché abbiamo

$$\lim_{x\to 0} x^n(\log x)^m = \lim_{x\to 0} x^{n-m\varepsilon}(x^\varepsilon \log x)^m$$

e basta scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $n - m\varepsilon > 0$, cioè $0 < \varepsilon < n/m$. Siccome $n/m \ge 1$, un tale ε esiste e i teoremi sui limiti permettono di concludere.

3.3 DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

In un punto precedente abbiamo barato: abbiamo infatti usato l'espressione per la derivata della funzione esponenziale avendola ricavata da considerazioni geometriche. Ma ora abbiamo tutti gli strumenti per trattare il problema generale.

Supponiamo dunque che f sia una funzione strettamente monotona definita in un intervallo I e derivabile. Sia x un punto dell'intervallo I tale che $f'(x) \ne 0$. Allora la funzione $g = f^{-1}$ è derivabile in $y = f(x)$ e si ha

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Si noti che questa è proprio la relazione che lega i coefficienti angolari dell'equazione di una retta prima e dopo lo scambio degli assi: la retta $y = mx + q$, per $m \ne 0$, diventa $x = my + q$ e quindi $y = (1/m)x + (q/m)$.

Per dimostrare la formula precedente, consideriamo il rapporto di Fermat:

$$\lim_{t\to y} \frac{g(t) - g(y)}{t - y}$$

e usiamo il cambiamento di variabile nel limite dato da f, cioè scriviamo $t = f(z)$:

$$\lim_{t\to y} \frac{g(t) - g(y)}{t - y} = \lim_{z\to f^{-1}(y)} \frac{g(f(z)) - g(y)}{f(z) - y}.$$

Ora sappiamo che $g(f(z)) = z$ e, siccome $y = f(x)$, possiamo scrivere $x = g(y)$, quindi

$$\lim_{t\to y} \frac{g(t) - g(y)}{t - y} = \lim_{z\to x} \frac{z - x}{f(z) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

come si voleva.

Si noti che la funzione g non è derivabile nei punti y in cui $f'(g(y)) = 0$. Infatti, se lo fosse e la derivata valesse $l \ne 0$, la derivata di f in $g(y)$ sarebbe $1/l \ne 0$ per lo stesso motivo: se g è la funzione inversa di f, allora f è la funzione inversa di g. Si verifichi che non può nemmeno essere $l = 0$.

In pratica, una volta noto che l'inversa di una funzione derivabile è derivabile, si può eseguire il calcolo in modo meno complicato, usando il teorema sulle funzioni composte. Vediamo nel caso dell'esponenziale. Scriviamo l'identità fondamentale che lega la funzione al logaritmo e deriviamo ambo i membri:

$$\log(\exp x) = x,$$

$$\frac{1}{\exp x} \exp' x = 1,$$

$$\exp' x = \exp x.$$

Proviamo con funzioni più complicate: la funzione seno, purché ristretta all'intervallo $[-\pi/2 \mathrel{..} \pi/2]$, è invertibile e la sua inversa si denota con arcsin:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x,\\ \cos(\arcsin x)\arcsin' x &= 1,\\ \arcsin' x &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)},\\ \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Infatti, per $\alpha \in [-\pi/2 \mathrel{..} \pi/2]$ vale l'uguaglianza

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Notiamo che $\sin'(-\pi/2) = \sin'(\pi/2) = 0$ e quindi arcsin non è derivabile in $-1 = \sin(-\pi/2)$ e in $1 = \sin(\pi/2)$, cioè agli estremi dell'intervallo di definizione. Tuttavia è una funzione di Lagrange in $[-1 \mathrel{..} 1]$. Analogamente si ottiene

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Per la tangente abbiamo un'espressione molto interessante:

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x) &= x,\\ (1+\tan^2(\arctan x))\arctan' x &= 1,\\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Quindi arctan, che è definita ovunque, è anche derivabile ovunque. Abbiamo scoperto un'altra funzione la cui derivata è una frazione algebrica.

L'arcotangente pone un problemino interessante; consideriamo la funzione

$$F(x) = \arctan\frac{1}{x}$$

che è definita per $x \neq 0$. La sua derivata si calcola ponendo $f(x) = 1/x$ e $g(y) = \arctan y$:

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{1+(f(x))^2}\frac{-1}{x^2}$$

che con una facile semplificazione dà

$$F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Consideriamo allora la funzione

$$G(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$$

la cui derivata è allora la somma delle derivate degli addendi:

$$G'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$$

e, per la conseguenza del teorema di Lagrange, dovremmo dedurre che G è costante. Invece non lo è! Infatti

$$\begin{aligned} G(1) &= \arctan 1 + \arctan(1/1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \\ G(-1) &= \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dov'è il problema? Naturalmente nel fatto che G *non* è definita su un intervallo! Invece dal teorema di Lagrange si può correttamente dedurre che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

È giunto il momento di riassumere tutte le principali derivate nella tabella 2. Nella colonna "Condizioni" sono riportate eventuali limitazioni a cui devono essere sottoposte le quantità nella riga. Dove non altrimenti scritto, la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio.

$F(x)$	$F'(x)$	Condizioni
$af(x)$	$af'(x)$	
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	
$g(f(x))$	$g'(f(x))f'(x)$	
x^n	nx^{n-1}	n intero
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$	$x \neq 0$, n intero positivo
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\exp x$	$\exp x$	
x^r	rx^{r-1}	r reale, $r \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1\,..\,1)$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1\,..\,1)$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

TABELLA 2: Tabella delle regole di derivazione e delle derivate delle principali funzioni. Si noti che la funzione $x \mapsto x^r$ con r non intero va considerata come definita per $x > 0$. La funzione $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ è definita per $x \geq 0$ quando n è pari, per ogni x quando n è dispari.

4 LIMITI

La nozione di limite che abbiamo dato non è sufficiente per rendere conto del comportamento delle funzioni in casi molto importanti. L'esempio tipico è $f(x) = 1/x^2$, che discuteremo per primo: vogliamo rendere preciso che cosa intendiamo per "avere limite infinito".

4.1 LIMITI INFINITI

Consideriamo la funzione $x \mapsto 1/x^2$ che è definita per $x \neq 0$. Il punto 0 è un punto di accumulazione del dominio ed è sensato domandarsi se esista

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Se però facciamo tracciare la curva a GeoGebra, ci accorgiamo che più la x si avvicina a 0, più $1/x^2$ diventa grande. Del resto è evidente che, quando $x = 10^{-15}$ (poco più del raggio di un protone in metri), $1/x^2 = 10^{30}$ (il numero stimato di batteri sulla terra) e che se facciamo diminuire il valore di x quello di $1/x^2$ crescerà senza alcuna limitazione.

Come possiamo esprimere precisamente questa nozione? Non è così complicato, dopo tutto: $1/x^2$ è il reciproco di x^2. L'idea è dunque questa e la possiamo rendere precisa così come abbiamo fatto per quella di limite *finito*. Fissiamo una *maggiorazione* M: allora esiste un intorno U di 0 tale che che, per $z \in U$, $z \neq 0$, si abbia $1/z^2 > M$. Qualsiasi maggiorazione fissiamo, la possiamo superare stando opportunamente vicino a 0. Diamo allora la definizione ufficiale.

DEFINIZIONE. *Sia x un punto di accumulazione del dominio di una funzione f. Diremo che $+\infty$ è* il limite di f per z che tende a x *se, data una qualsiasi maggiorazione M, esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap D(f)$, $z \neq x$, si abbia*

$$f(z) \geq M.$$

In tal caso la notazione usata sarà

$$\lim_{z\to x} f(z) = +\infty.$$

Il simbolo $+\infty$ si legge "più infinito".

Vediamo che la definizione si applica al caso in esame, cioè $x \mapsto 1/x^2$. Fissiamo M: dobbiamo risolvere la disequazione

$$\frac{1}{z^2} > M, \qquad z \neq 0$$

le cui soluzioni sono date, per $M > 0$ da

$$-\sqrt{\frac{1}{M}} < z < \sqrt{\frac{1}{M}}, \qquad z \neq 0$$

e l'insieme delle soluzioni, è proprio un intorno di 0, escluso 0. Se $M \leq 0$ il problema non si pone nemmeno: tutti i numeri non nulli sono soluzione. Anche qui, come nel caso delle tolleranze che possono essere limitate verso l'alto, possiamo fissare un minorante delle maggiorazioni richieste: se riusciamo a soddisfare il problema per maggiorazioni più grandi di 1, per esempio, lo riusciamo a soddisfare per maggiorazioni qualsiasi.

Nel caso della funzione $f(x) = 1/x$ non possiamo dire la stessa cosa: per $x < 0$ si ha $1/x < 0$ e quindi la funzione non è positiva in $U \cap D(f)$, per qualsiasi intorno U di 0. Tuttavia è chiaro che per la funzione ristretta all'intervallo $(0 \mathinner{..} \to)$ il limite è $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Infatti per $z \in (-1/M \mathinner{..} 1/M) \cap D(f_{0,+})$ si ha effettivamente $f(z) \geq M$, quando $M > 0$.

Non dovrebbe sorprendere la seguente definizione.

DEFINIZIONE. *Sia x un punto di accumulazione del dominio di una funzione f. Diremo che $-\infty$ è* il limite di f per z che tende a x *se, data una qualsiasi maggiorazione M, esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap D(f)$, $z \neq x$, si abbia*

$$f(z) \leq -M.$$

In tal caso la notazione usata sarà

$$\lim_{z \to x} f(z) = -\infty.$$

Il simbolo $-\infty$ si legge "più infinito".

Non dovrebbe sorprendere nemmeno che

$$\lim_{z \to 0} -\frac{1}{z^2} = -\infty, \qquad \lim_{z \to 0-} \frac{1}{z} = -\infty.$$

Nella definizione si usa $-M$ perché così è chiaro che

$$\lim_{z \to x} f(z) = -\infty \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{z \to x} -f(z) = +\infty.$$

Un esempio importante è quello del logaritmo:

$$\lim_{x \to 0} \log x = -\infty.$$

Infatti, la disequazione

$$\log x \leq -M$$

è soddisfatta per $0 < x \leq \exp(-M)$ e questo insieme è

$$(-\exp(-M) \mathinner{..} \exp(M)) \cap D(\log).$$

Proviamo con qualcosa di più complicato:

$$\lim_{x \to 0+} \exp(1/x) = +\infty.$$

Per una maggiorazione $M > 1$, la disequazione

$$\exp(1/x) \geq M$$

diventa

$$\frac{1}{x} \geq \log M$$

cioè

$$0 < x \leq \frac{1}{\log M}.$$

Se poniamo $\delta = 1/\log M$ e $U = (-\delta \mathinner{..} \delta)$, abbiamo che la disequazione è soddisfatta per $x \in U$, $x > 0$, come richiesto.

Tanto per vedere che le funzioni possono essere bizzarre, dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0-} \exp(1/x) = 0.$$

Infatti, per la tolleranza $0 < \varepsilon < 1$, la disequazione

$$|\exp(1/x)| \le \varepsilon \qquad (x < 0),$$

diventa

$$\frac{1}{x} \le \log \varepsilon \qquad (x < 0)$$

che, essendo $x < 0$ e $\log \varepsilon < 0$, diventa

$$x \ge \frac{1}{\log \varepsilon} \qquad (x < 0).$$

Dunque tutti i numeri nell'insieme

$$\left(\frac{1}{\log \varepsilon} \,..\, -\frac{1}{\log \varepsilon}\right) \cap (\leftarrow ..\, 0)$$

sono soluzioni della disequazione e la tesi è provata.

Non preoccupiamoci troppo di questi conti: ci sono varie tecniche che permettono di evitarli. Vediamone una.

TEOREMA. *Sia x un punto di accumulazione del dominio di f. Allora*

$$\lim_{z\to x} f(z) = +\infty$$

se e solo se esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U \cap D(f)$, $z \ne x$ si abbia $f(z) > 0$ e, inoltre,

$$\lim_{z\to x} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Nel caso, utile, di limiti da destra e da sinistra, si può operare in modo analogo. Lo enunceremo solo per funzioni definite in un intorno di x, escluso x, che è il caso in cui si può parlare di limiti da destra e da sinistra.

TEOREMA. *Sia f definita in un intorno W di x, escluso x. Allora*

$$\lim_{z\to x+} f(z) = +\infty$$

se e solo se esiste un intorno U di x tale che, per $z \in U$, $z > x$, si abbia $f(z) > 0$ e, inoltre,

$$\lim_{z\to x+} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Le versioni di questi teoremi per il limite $-\infty$ sono ovvie e anche le dimostrazioni lo sono. Si noti però che non ci basta sapere che $\lim_{z\to x} 1/f(z) = 0$ per concludere qualcosa su $\lim_{z\to x} f(z)$.

Vediamo un'applicazione al caso delle frazioni algebriche. Siano P e Q polinomi. Allora sappiamo che la funzione

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

è continua ovunque sia definita. Il suo dominio è costituito da tutti i numeri reali escluse le radici di Q. Supponiamo che c sia una radice di Q di molteplicità d.

Primo caso: c è una radice anche di P, di molteplicità $n \geq d$. In questo caso possiamo scrivere, per $x \neq c$,

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \frac{(x-c)^n}{(x-c)^d} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}(x-c)^{n-d}$$

dove c non è una radice né di P_1 né di Q_1; quindi avremo, evidentemente

$$\lim_{x \to c} f(x) = \begin{cases} \dfrac{P_1(c)}{Q_1(c)} & \text{se } n = d, \\ 0 & \text{se } n > d. \end{cases}$$

Secondo caso: c è una radice di P di molteplicità $n < d$ (non escludiamo il caso di $n = 0$, cioè che c non è radice di P). In questo caso possiamo scrivere, per $x \neq c$,

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \frac{1}{(x-c)^{d-n}}$$

dove c non è una radice né di P_1 né di Q_1. Ci siamo dunque ridotti a considerare il seguente caso:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-c)^m},$$

dove g è una funzione definita e continua in un intorno di c, con $g(c) \neq 0$, e $m > 0$ (intero). È del tutto ovvio che

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x-c)^m}{g(x)} = 0.$$

perché la funzione $x \mapsto (x-c)^m / g(x)$ è certamente continua in un intorno di c.

Poniamo adesso $K = g(c)$ e consideriamo dapprima quando $K > 0$. Per $x > c$, abbiamo $(x-c)^m > 0$ e dunque $f(x) > 0$. Dal teorema precedente segue che

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

Il limite è $-\infty$ se $K < 0$.

La faccenda è più complicata per il limite da sinistra. Se m è pari, si ha, per $x < c$, $(x-c)^m > 0$; se m è dispari, si ha, per $x < c$, $(x-c)^m < 0$. Da questo, mettendo insieme con il valore di K, si ottiene applicando il teorema, il limite da sinistra.

Imparare a memoria la casistica è del tutto inutile. Meglio dare un criterio più maneggevole, che troviamo nella tabella 3, nella quale le notazioni formali "$+\infty \cdot K$" e "$-\infty \cdot K$" stanno per: non si cambia segno davanti a ∞ se $K > 0$, si cambia se $K < 0$. Useremo ancora questa notazione.

Vediamo qualche esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$$

che si può scrivere come

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \frac{x - 1}{x - 1}$$

e quindi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1^2 - 1 - 2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Consideriamo invece

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x^4 - 2x^2 + 1)^2}$$

Sia c una radice del polinomio Q e si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P è un altro polinomio. Si vogliono calcolare

$$\lim_{x \to c+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c-} f(x).$$

1. Si scrive la funzione nella forma

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \frac{(x-c)^n}{(x-c)^d}$$

dove c non è radice né di P_1 né di Q_1 (può essere $n = 0$).

2. Se $n = d$, il limite è $P_1(c)/Q_1(c)$.

3. Se $n > d$, il limite è 0.

4. Se $n < d$, si pone $m = d - n$ e si calcola $K = P_1(c)/Q_1(c)$;

    4.1. se m è pari, f si comporta come la funzione $x \mapsto K/x^2$ in 0;

    4.2. se m è dispari, f si comporta come la funzione $x \mapsto K/x$ in 0.

Valgono inoltre i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{K}{x^2} = +\infty \cdot K$$
$$\lim_{x \to 0+} \frac{K}{x} = +\infty \cdot K$$
$$\lim_{x \to 0-} \frac{K}{x} = -\infty \cdot K$$

Si noti che è sufficiente decidere se $K > 0$ o $K < 0$ e non serve calcolarlo esplicitamente, tranne ovviamente nel passo 2.

TABELLA 3: Procedura per il calcolo del limite di una frazione algebrica a una radice del denominatore che si può scrivere come

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)^4}\frac{x-1}{(x-1)^4} = \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)^4}\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Nelle notazioni precedenti, si ha

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)^4}$$

e quindi $K = g(1) = -2/16 = -1/8 < 0$. Con le notazioni della tabella, si ha $m = 3$ che è dispari. Quindi

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty \cdot (-1/8) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty \cdot (-1/8) = +\infty.$$

Vogliamo in effetti definire risultati di "operazioni" dove compaiano questi nuovi simboli. Ciò non significa che $+\infty$ e $-\infty$ siano da considerare numeri reali; di fatto queste "operazioni" saranno solo scorciatoie mnemoniche per ricordarsi le regole di calcolo dei limiti che enunceremo più avanti; nella tabella a e b denotano numeri.

	$a + (+\infty) = +\infty$	$a - (+\infty) = -\infty$
	$a + (-\infty) = -\infty$	$a - (-\infty) = +\infty$
$b > 0$	$b \cdot (+\infty) = +\infty$	$b \cdot (-\infty) = -\infty$
$b < 0$	$b \cdot (+\infty) = -\infty$	$b \cdot (-\infty) = +\infty$
	$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$
	$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$	$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
	$-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$	$-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$
	$a/(+\infty) = 0$	$a/(-\infty) = 0$

Vanno ovviamente comprese quelle che si ottengono permutando i termini. Notiamo che mancano alcuni casi: *non daremo alcun significato alle espressioni formali* $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$, $+\infty + (-\infty)$ *e* $+\infty - (+\infty)$. Di fatto quelle che ci sono non sono poi così complicate da ricostruire: *moltiplicare un numero positivo per un numero grande dà un numero grande* è la traduzione intuitiva di $b \cdot (+\infty) = +\infty$ per $b > 0$. Se si ricordano le 'regole dei segni', non ci si può sbagliare e quindi basta dare una forma intuitiva solo alle regolette che coinvolgono $+\infty$:

- sommare a un numero un numero grande dà un numero grande;
- moltiplicare un numero positivo per un numero grande dà un numero grande;
- sommare o moltiplicare due numeri grandi dà un numero grande.

I teoremi sulle operazioni sui limiti già visti si estendono ai casi in cui il limite di una o entrambe le funzioni siano $+\infty$ o $-\infty$ e le "operazioni" relative compaiano nella tabella.

Dunque, per esempio,

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -\infty$$

perché

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x+1} = 1$$

e $-\infty - 1 = -\infty$.

Viceversa non possiamo usare la tabella per valutare un limite come

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

che corrisponderebbe a una non definita operazione $+\infty - \infty$. Per calcolare questo limite occorre procedere come delineato per le frazioni algebriche:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} = \frac{x-1}{1}\frac{1}{x^2}$$

Qui $K = (0-1)/1 = -1$ e quindi possiamo applicare $-1 \cdot (+\infty) = -\infty$. Si noti che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

corrisponderebbe alla stessa espressione $+\infty - \infty$ e il limite è esattamente l'opposto di prima, cioè $+\infty$. È proprio per questo che non è possibile dare un senso a quella espressione.

Un altro esempio di $+\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

che quindi non si può trattare senza qualche manipolazione: ma

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$$

e quindi il limite richiesto vale 0. Diremo che un limite che si presenti in questo modo è della *forma indeterminata* $[\![+\infty - \infty]\!]$; ne troveremo altre. Il nome è tradizionale e non significa affatto che il limite non si può calcolare, ma solo che, così com'è scritta la funzione (in questo caso come somma), non abbiamo elementi per dedurre il limite da quello degli addendi. Ciò non esclude che con opportune trasformazioni si possa arrivare a un calcolo esplicito.

4.2 limiti all'infinito

Risulta spesso utile capire il comportamento di una funzione quando diamo alla variabile valori sempre più grandi. Un esempio ovvio è quello di $f(x) = 1/\log x$ che quando x diventa sempre più grande assume valori sempre più vicini a 0. Come facciamo a dirlo con precisione? Al solito, andiamo a rovescio e cerchiamo di risolvere la disequazione $|1/\log x| \le \varepsilon$ dove $\varepsilon > 0$ è una tolleranza. Troviamo le soluzioni, distinguendo prima il caso di $x > 1$:

$$\begin{gathered} -\varepsilon \le \frac{1}{\log x} \le \varepsilon, \\ \log x \ge \frac{1}{\varepsilon}, \\ x \ge \exp(1/\varepsilon). \end{gathered}$$

Non è restrittivo prendere $0 < \varepsilon < 1$. Nel caso di $0 < x < 1$ la disequazione diventa

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\varepsilon} \ge \log x, \\ x \ge \exp(-1/\varepsilon). \end{gathered}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni è

$$(\exp(-1/\varepsilon) \mathrel{..} 1) \cup (\exp(1/\varepsilon) \mathrel{..} \rightarrow)$$

che è un insieme contenente numeri "arbitrariamente grandi". In altre parole riusciamo a soddisfare la tolleranza prendendo numeri più grandi di un numero fissato, in questo caso $\exp(1/\varepsilon)$.

Un *intorno di* $+\infty$ è un insieme che include un intervallo aperto della forma $(a\,..\,\rightarrow)$. Diremo che $+\infty$ è un punto di accumulazione di un insieme S se, per ogni M esiste un punto $x \in S$ con $x > M$. Ciò non significa che $+\infty$ sia un elemento dei numeri reali: stiamo solo descrivendo una proprietà dell'insieme S.

DEFINIZIONE. *Supponiamo che $+\infty$ sia un punto di accumulazione di $D(f)$. Allora il numero l è il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$ se, per ogni tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di $+\infty$ tale che, per $x \in U \cap D(f)$ si abbia*

$$|f(x) - l| \le \varepsilon.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Lasciamo come esercizio scrivere la definizione di intorno di $-\infty$ e quella di limite a $-\infty$. Possiamo scrivere facilmente che cosa intendiamo per limite infinito a infinito, modificando una definizione precedente.

DEFINIZIONE. *Supponiamo che $+\infty$ sia un punto di accumulazione di $D(f)$. Allora $+\infty$ è il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$ se, per ogni maggiorazione M, esiste un intorno U di $+\infty$ tale che, per $x \in U \cap D(f)$ si abbia*

$$f(x) \ge M.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Altre definizioni simili sono facili da scrivere.

Occorre dare qualche altro esempio e dimostriamo subito alcune uguaglianze fondamentali:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0.$$

La disuguaglianza da risolvere per la seconda, data la tolleranza ε, è

$$|\exp x| \le \varepsilon$$

che equivale a $x < \log\varepsilon$, cioè l'intervallo $(\leftarrow\,..\,\log\varepsilon)$ che è un intorno di $-\infty$. Per la prima dobbiamo risolvere, data la maggiorazione $M > 0$,

$$\exp x \ge M$$

che equivale a $x \ge \log M$ e l'intervallo $(\log M\,..\,\rightarrow)$ è un intorno di $+\infty$.

Verifichiamo un altro limite molto importante:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$$

prendendolo piuttosto alla larga. Sappiamo che

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + b$$

dove b è un certo numero positivo, quando $a > 0$. Se dividiamo per n otteniamo

$$\frac{(1+a)^n}{n} = \frac{1}{n} + a + \frac{n-1}{2}a + \frac{b}{n}.$$

La funzione $g\colon n \mapsto (1+a)^n/n$ è definita sui numeri interi positivi e quindi $+\infty$ è un punto di accumulazione di $D(g)$. Applicando le proprietà dei limiti possiamo dire che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+a+\frac{n-1}{2}a\right)=0+a+\infty=+\infty$$

e quindi lo stesso possiamo dire per g, visto che per ottenerla sommiamo b/n all'espressione precedente e $b/n>0$.

Ora poniamo $1+a=e=\exp 1$ e possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty.$$

Consideriamo ora la funzione

$$f(x)=\frac{\exp x}{x}$$

la cui derivata è

$$f'(x)=\frac{x\exp' x-1\exp x}{x^2}=\frac{\exp x}{x^2}(x-1).$$

Dunque f è crescente per $x>1$. Se calcoliamo $f(n)$, con n intero, abbiamo $f(n)=e^n/n=g(n)$.

Se fissiamo una maggiorazione M, sappiamo che esiste un intervallo $I=(k\mathinner{..}\to)$ tale che, per $n\in I$, si abbia $g(n)\ge M$. Se n è il minimo intero maggiore di k e di 1, abbiamo che $g(n)\ge M$. Adesso, se $x>n$, abbiamo evidentemente $f(x)>f(n)=g(n)\ge M$. Dunque, per $x\in(n\mathinner{..}\to)$, si ha $f(x)\ge M$, come richiesto.

Siccome tra le funzioni importanti ci sono le frazioni algebriche, vediamo subito come trattarle. Il caso più semplice è quello in cui numeratore e denominatore hanno lo stesso grado m:

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m}{b_0+b_1x+\dots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}$$

con $a_m\ne 0$, $b_m\ne 0$. Vogliamo calcolare $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Ovviamente possiamo restringere x in un intorno di $+\infty$, per esempio $I=(0\mathinner{..}\to)$; dunque possiamo supporre $x\ne 0$ e scrivere, per $x\in I$,

$$f(x)=\frac{\dfrac{a_0}{x^m}+\dfrac{a_1}{x^{m-1}}+\dots+\dfrac{a_{m-1}}{x}+a_m}{\dfrac{b_0}{x^m}+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dots+\dfrac{b_{m-1}}{x}+b_m}$$

ed è evidente, dal fatto che $\lim_{x\to+\infty}1/x=0$, che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0}{x^m}+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\dots+\frac{a_{m-1}}{x}+a_m=a_m$$

e, analogamente, il limite del denominatore è b_m. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+\dots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m}{b_0+b_1x+\dots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}=\frac{a_m}{b_m}.$$

Si verifichi che vale anche

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_0+a_1x+\dots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m}{b_0+b_1x+\dots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}=\frac{a_m}{b_m}.$$

Vediamo ora il caso generale in cui $f(x)=P(x)/Q(x)$. Chiamiamo m il grado di P e n il grado di Q, a_m e b_n i rispettivi coefficienti principali.

Primo caso: $m<n$. Allora possiamo scrivere

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^{n-m}P(x)}{Q(x)}\frac{1}{x^{n-m}}.$$

Nel primo fattore numeratore e denominatore hanno lo stesso grado e coefficienti principali a_m e b_n; quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-m}P(x)}{Q(x)}\right)\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-m}}\right) = \frac{a_m}{b_n} 0 = 0$$

Lo stesso per il limite a $-\infty$.

Secondo caso: $m > n$. Possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{x^{m-n}Q(x)} \frac{x^{m-n}}{1}$$

e, ragionando come prima,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_n} \cdot (+\infty).$$

Lo stesso per il limite a $-\infty$. Non è importante ricordare a memoria la tabellina: quello che conta di più è il trucco "dividere per la potenza di x di grado massimo", che funziona anche in altre situazioni. Consideriamo, per esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x}}{x}.$$

Come prima, possiamo maneggiare l'espressione supponendo la funzione definita per $x > 0$, visto che ci interessa rispettare una tolleranza (se il limite è finito) o una maggiorazione (se il limite è infinito) solo in un intorno di $+\infty$. Dunque possiamo supporre $x > 0$ e portarlo dentro la radice quadrata:

$$\frac{\sqrt{4x^2+2x}}{x} = \sqrt{\frac{4x^2+2x}{x^2}} = \sqrt{4+\frac{2}{x}}.$$

Il limite è dunque $\sqrt{4} = 2$.

Diverso è il caso se ci interessa il limite a $-\infty$: non è restrittivo supporre $x \le -2$ (la funzione è definita per $x > 0$ e $x \le -2$); perciò la trasformazione è

$$\frac{\sqrt{4x^2+2x}}{x} = -\frac{\sqrt{4x^2+2x}}{|x|} = -\sqrt{\frac{4x^2+2x}{x^2}} = -\sqrt{4+\frac{2}{x}}.$$

e il limite è $-\sqrt{4} = -2$. Ci si deve ricordare che, se $t < 0$, vale l'identità

$$t = -\sqrt{t^2}$$

e non $t = \sqrt{t^2}$.

Abbiamo usato qui un risultato ancora non presentato ufficialmente.

TEOREMA. *Sia* $\lim_{z\to x} f(z) = l$, *con* l *finito o infinito. Se* g *è definita e continua in un intorno di* l, *allora*

$$\lim_{z\to x} g(f(z)) = g(l) \qquad \text{se } l \text{ è finito,}$$
$$\lim_{z\to x} g(f(z)) = \lim_{t\to l} g(t) \quad \text{se } l \text{ è infinito.}$$

La dimostrazione è un interessante esercizio. Vediamone un'applicazione per il calcolo di $\lim_{x\to0+} \exp(1/x)$. Siccome $\lim_{x\to0+} 1/x = +\infty$, il limite cercato coincide con $\lim_{t\to+\infty} \exp t = +\infty$. Nel caso di $\lim_{x\to0-} \exp(1/x)$, siccome $\lim_{x\to0-} 1/x = -\infty$, il limite è $\lim_{t\to-\infty} \exp t = 0$. Dunque

$$\lim_{x\to0+} \exp(1/x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to0-} \exp(1/x) = 0.$$

4.3 FORME INDETERMINATE

L'argomento delle forme indeterminate è temuto. Ma non c'è da prendere paura: si tratta di funzioni che molto spesso possono essere domate facilmente. L'esempio di $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}/x$, di cui volevamo calcolare il limite a $+\infty$ si presenta come un quoziente di due funzioni che vanno entrambe a $+\infty$. Già nel caso delle frazioni algebriche abbiamo visto che un limite di questo tipo dipende dal numeratore e dal denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+ax}{x} = a, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0.$$

Cambiando numeratore e denominatore, mantenendo il limite infinito per entrambi, il quoziente può avere un limite qualsiasi (o anche non averlo). Si noti che il primo è in forma indeterminata solo per $a \neq 0$.

Un'altra forma indeterminata l'abbiamo incontrata parlando di derivate! Il rapporto di Fermat è sempre una frazione in cui sia numeratore che denominatore hanno limite 0. Visto poi che una frazione del tipo ∞/∞ come le frazioni algebriche può sempre essere vista come un prodotto $0 \cdot \infty$, scrivendo $P(x)/Q(x) = P(x) \cdot (1/Q(x))$, abbiamo già un buon numero di *forme indeterminate*:

$$[\![0/0]\!], \qquad [\![\infty/\infty]\!], \qquad [\![0 \cdot \infty]\!], \qquad [\![+\infty - \infty]\!].$$

Ricordiamo che non sono operazioni tra numeri e per questo usiamo una notazione speciale: sono solo artifici mnemonici per ricordarci di non saltare a conclusioni avventate quando si deve calcolare un limite che si presenti in uno di questi tipi.

Alcuni testi ne menzionano altre due: $[\![0^0]\!]$ e $[\![1^\infty]\!]$. Si tratta di un inutile appesantimento perché una funzione del tipo

$$F(x) = (f(x))^{g(x)}$$

si tratta *sempre* scrivendola come $F(x) = \exp(g(x)\log f(x))$ e calcolando

$$\lim_{x\to c} g(x)\log f(x)$$

perché poi possiamo usare i noti fatti su exp e l'ultimo teorema enunciato. Se, secondo la terminologia appesantita, la forma originale è $[\![0^0]\!]$, il limite da calcolare è nella forma $[\![0 \cdot \infty]\!]$; se è della forma $[\![1^\infty]\!]$, lo si riduce a uno della stessa forma $[\![\infty \cdot 0]\!]$. Dunque le forme indeterminate che studieremo saranno solo le quattro già messe in evidenza.

Si faccia attenzione che questo ha solo una vaga connessione con il fatto che la divisione di 0 per 0 non è definita: qui non si sta parlando di operazioni su numeri, ma di limiti di funzioni. Le forme messe in evidenza sono quelle nelle quali non è possibile applicare alcuno dei teoremi generali sui limiti, senza trasformarle in qualche modo.

Uno degli strumenti fondamentali per affrontare le forme indeterminate è il teorema di l'Hôpital, che si può estendere in vari modi. Ma si badi bene a non abusarne e soprattutto a non continuare a derivare senza semplificare dove sia possibile.

Consideriamo per esempio $\lim_{x\to0} x\log x$ che si presenta come forma indeterminata $[\![0 \cdot \infty]\!]$; lo possiamo trasformare in modo da avere una forma $[\![0/0]\!]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} x\log x &= \lim_{x\to0} \frac{x}{1/\log x} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{1}{(-1/(\log x)^2)(1/x)} \\ &= \lim_{x\to0} -x(\log x)^2\end{aligned}$$

che è peggio di prima. Potremmo invece trasformarlo nella forma $[\![\infty/\infty]\!]$ come

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x\log x &= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x}\\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} -x = 0\end{aligned}$$

se non fosse che abbiamo applicato il teorema di l'Hôpital in un caso che non sarebbe ammesso. L'enunciato che segue, dove scriveremo $\pm\infty$ per indicare uno fra $+\infty$ e $-\infty$, ci dice proprio che invece si può.

TEOREMA DI L'HÔPITAL GENERALIZZATO. *Siano f e g derivabili in un intorno di c (finito o infinito), escluso al più c, con $g'(x) \neq 0$ in un intorno di c. Se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$$

ed esiste (finito o infinito)

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora si ha

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ecco l'esempio. Consideriamo $\lim_{x\to-\infty}(1/x)/\exp(x)$. Questo limite si presenta nella forma indeterminata $[\![0/0]\!]$; se applicassimo il teorema di l'Hôpital in modo avventato, avremmo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1/x}{\exp x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-1/x^2}{\exp x}$$

che è ancora nella forma $[\![0/0]\!]$; ma un'altra applicazione del teorema ci porterebbe a una situazione peggiore. Invece

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1/x}{\exp x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\exp(-x)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-\exp(-x)}{1} = -\infty.$$

Infatti $\lim_{x\to-\infty}\exp(-x) = \lim_{t\to+\infty}\exp t = +\infty$.

È facile allora calcolare, per $m \geq 0$ intero,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x^m}$$

riducendo via via il grado del denominatore: per $m = 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{1} = +\infty.$$

Per usare l'induzione scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x^{m+1}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{(m+1)x^m} = \frac{1}{m+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x^m}$$

Per ipotesi induttiva possiamo supporre che l'ultimo limite sia $+\infty$ e abbiamo dunque, per ogni $m \geq 0$ intero,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x^m} = +\infty.$$

Se ora $r > 0$ è un numero reale qualsiasi, sappiamo che $m \le r \le m+1$ per un opportuno $m \ge 0$ intero. Per $x > 1$ si ha allora

$$m \log x \le r \log x \le (m+1) \log x$$

e dunque $x^m \le x^r \le x^{m+1}$ e, finalmente,

$$\frac{\exp x}{x^{m+1}} \le \frac{\exp x}{x^r} \le \frac{\exp x}{x^m}$$

da cui possiamo dedurre per il teorema di confronto dei limiti (opportunamente, e facilmente, esteso) che, per $r \ge 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x^r} = +\infty.$$

Che c'è di scorretto nella seguente applicazione del teorema di l'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\exp x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp x}{1} = 0$$

nella quale si ottiene comunque il risultato corretto? Si verifichino per bene le ipotesi del teorema generalizzato.

Se consideriamo invece $\lim_{x\to 0} x(\log x)^n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x(\log x)^n &= \lim_{x\to 0} \frac{(\log x)^n}{1/x} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{n(\log x)^{n-1}/x}{-1/x^2} \\ &= -n \lim_{x\to 0} x(\log x)^{n-1}.\end{aligned}$$

Siccome sappiamo già che per $n = 1$ il limite è 0, per induzione abbiamo

$$\lim_{x\to 0} x(\log x)^n = 0.$$

Con la solita tecnica di prendere $n \le r \le n+1$ con n intero e il teorema del confronto, abbiamo $\lim_{x\to 0} x(\log x)^r = 0$ per ogni $r > 0$. Per $r \le 0$ vale la stessa cosa, ma non c'è bisogno di dimostrarlo con particolari tecniche.

Possiamo anche affrontare $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

e perciò $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$.

4.4 ORDINI DI INFINITESIMO

Quando si deve studiare un limite in 0 in cui ci sia un fattore $\sin x$ al denominatore o al numeratore, è sempre possibile sostituirlo con x: infatti, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

ammesso che quest'ultimo esista, per i teoremi sui limiti. Può essere più complicato se il denominatore è $\sin x - x\cos x$, che non appare così immediato. Ma ci viene in soccorso il teorema di l'Hôpital: proviamo a calcolare, se esiste, l'esponente k tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^k}$$

sia finito e non nullo. Trattandosi di una forma indeterminata, possiamo semplicemente derivare il numeratore un numero sufficiente di volte per togliere l'indeterminazione. Più precisamente, consideriamo il seguente schema:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^k} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{kx^{k-1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{kx^{k-1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{kx^{k-2}}\\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{k(k-2)x^{k-3}}\end{aligned}$$

dove, quando applichiamo il teorema di l'Hôpital, procediamo assumendo sempre che gli esponenti al denominatore diano una forma indeterminata. Al passo finale il numeratore ha come limite 1 e quindi, per $k = 3$ il limite vale $1/3$. In conclusione, ogni limite della forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x - x\cos x}$$

può essere trasformato come prima:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x - x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x\cos x}\,\frac{f(x)}{x^3} = 3\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}.$$

Qui abbiamo studiato limiti a 0, ma è irrilevante: per i limiti a c si useranno le potenze di $x - c$; si possono anche considerare limiti da destra e da sinistra.

Nel caso di $(\sin x - x\cos x)/x^k$ si può anche scrivere $\cos x(\tan x - x)/x^k$, perché la tangente è definita in un intorno di 0: il fattore $\cos x$ non influisce sul limite; perciò possiamo agire anche con

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^k} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{kx^{k-1}} = \frac{1}{3}$$

molto più brevemente.

Non sempre questa tecnica funziona. Se vogliamo studiare

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\exp(-1/x)}{x^k}$$

e cerchiamo un esponente k che lo renda finito e non nullo, facciamo una fatica inutile. Infatti, con la sostituzione $y = 1/x$, otteniamo

$$\lim_{y\to +\infty}\frac{y^k}{\exp y}$$

e, per quante volte applichiamo il teorema di l'Hôpital, questo limite è 0.

STUDI DI FUNZIONE

5

Che differenza c'è tra le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$? Più in generale, che informazioni si possono avere sulla variazione dei valori di una funzione quando variamo il punto in cui sono calcolate? Lo studio di funzione risponde a queste domande ed è essenziale per analizzare problemi dove i metodi puramente algebrici non arrivano.

5.1 EQUAZIONI NON ALGEBRICHE

Spesso è utile conoscere in dettaglio l'andamento di una funzione; per esempio, per trovare il numero di soluzioni di un'equazione.

Vediamo un caso curioso. Si vuole trovare, al variare di $a > 0$, il numero di soluzioni della bizzarra equazione $x^x = a$. Prima di tutto la si trasforma in

$$x \log x = \log a$$

e poi si considera la funzione

$$f(x) = x \log x - \log a$$

che è definita e continua nell'intervallo $(0\,..\,\rightarrow)$. Un utile punto di partenza è trovare i limiti nei punti di accumulazione del dominio che non appartengano al dominio stesso, in questo caso 0 e $+\infty$. Il limite a $+\infty$ non dà problemi, perché

$$\lim_{x\to+\infty} x \log x - \log a = (+\infty) \cdot (+\infty) - \log a = +\infty.$$

Si ricordi che queste operazioni hanno senso solo per esprimere applicazioni di teoremi sui limiti.

Il limite a 0 si presenta sotto la forma indeterminata $[\![0 \cdot \infty]\!]$; lo trasformiamo nella forma $[\![\infty/\infty]\!]$:

$$\lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = -\log a$.

Ora possiamo calcolare la derivata:

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1$$

che è negativa per $0 < x < 1/e$ e positiva per $x > 1/e$. Dunque f ha un minimo in $1/e$ dove vale

$$f(1/e) = \frac{1}{e} \log \frac{1}{e} - \log a = -\frac{1}{e} - \log a.$$

Se $f(1/e) > 0$, il grafico della funzione non incontra l'asse delle ascisse, e quindi l'equazione non ha soluzione. Dunque l'equazione non ha soluzione se

$$-\frac{1}{e} - \log a > 0$$

cioè $\log a < -1/e$, quindi, in definitiva

$$0 < a < \exp(-1/e).$$

Per $f(1/e) = 0$, cioè $a = \exp(-1/e)$, il grafico della funzione è tangente all'asse delle ascisse e quindi l'equazione ha una sola soluzione, precisamente $1/e$.

Per $f(1/e) > 0$ il grafico incontra l'asse delle ascisse una sola volta se $-\log a \le 0$, due volte se $-\log a > 0$; dunque, riassumendo,

$$\text{l'equazione } x^x = a \begin{cases} \text{non ha soluzione per } 0 < a < \exp(-1/e), \\ \text{ha una soluzione per } a = \exp(-1/e), \\ \text{ha due soluzioni per } \exp(-1/e) < a < 1, \\ \text{ha una soluzione per } a \ge 1. \end{cases}$$

In particolare, esiste un solo numero x tale che $x^x = 27$. Infatti $27 \ge 1$, quindi l'equazione ha una sola soluzione. Siccome $3^3 = 27$, 3 è l'unica soluzione. Non avremmo alcun metodo per determinarla "esattamente" se $a = 10$, per esempio.

Si può operare in modo diverso e considerare la funzione $g(x) = x \log x$. Come la precedente essa ha un minimo in $1/e$ e $g(1/e) = -1/e$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Possiamo interpretare l'equazione $x \log x = \log a$ come "intersecare il grafico di g con rette orizzontali $y = \log a$. Dall'andamento del grafico è chiaro che quando $\log a < g(1/e)$ non c'è alcuna intersezione, quando $\log a = g(1/e)$ la retta è tangente (una soluzione), quando $g(1/e) < \log a < 0$ ci sono due intersezioni, quando $\log a \ge 0$ c'è una sola intersezione. Ritroviamo quindi lo stesso risultato precedente, forse con meno fatica.

Consideriamo $f(x) = x \exp x$ e studiamone il comportamento. La funzione è definita ovunque, con

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\exp(-x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\exp(-x)} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata è $f'(x) = \exp x + x \exp x = (1+x)\exp x$ che è positiva per $x > -1$. Possiamo dunque invertire la funzione nell'intervallo $[-1 \mathrel{..} \to)$ e l'inversa si chiama tradizionalmente W; il primo a studiare questa funzione fu Johann Heinrich Lambert (1728–1777). La funzione W è definita dunque sull'intervallo $[-1/e \mathrel{..} \to)$ e soddisfa, per x in quell'intervallo, l'uguaglianza

$$W(x)\exp(W(x)) = x.$$

La derivata di W si calcola con il solito trucco di derivare ambo i membri:

$$W'(x)\exp(W(x)) + W(x)W'(x)\exp(W(x)) = 1$$

e quindi, raccogliendo,

$$W'(x) = \frac{1}{(1 + W(x))\exp(W(x))}.$$

Ritorniamo alla nostra equazione $x^x = a$ che abbiamo già modificato in $x \log x = \log a$. Se potessimo scrivere $x = \exp(W(t))$, avremmo

$$\log a = \exp(W(t)) \log \exp(W(t)) = W(t)\exp(W(t)) = t.$$

Dunque possiamo scrivere la "soluzione" della nostra equazione originale come

$$x = \exp(W(\log a))$$

ma solo per certi a. Si determini per quali valori di a questo è ammissibile.

Si può anche invertire la funzione f nell'intervallo $(\leftarrow \mathrel{..} -1]$, ottenendo una funzione W_1 che ha proprietà analoghe e ci può servire per scrivere formalmente le soluzioni dell'equazione $x^x = a$ per ogni $a \ge 1/e$.

Riprendiamo l'equazione $\exp x = mx + q$ che trasformiamo in $\exp x - mx = q$. Consideriamo quindi la funzione $f(x) = \exp x - mx$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$, avremo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } m < 0, \\ 0 & \text{se } m = 0, \\ -\infty & \text{se } m > 0. \end{cases}$$

Inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp x}{x} - m\right)x = (+\infty - m)\cdot(+\infty) = +\infty.$$
Calcoliamo la derivata:
$$f'(x) = \exp x - m$$
che è ovunque positiva per $m \le 0$. Per $m > 0$, la funzione è decrescente nell'intervallo $(\leftarrow .. \log m]$ e crescente in $[\log m .. \rightarrow)$. Il minimo di f vale $f(\log m) = m - m\log m = m(1 - \log m)$. Abbiamo tutti i dati e possiamo riassumerli così:

Soluzioni di $\exp x = mx + q$	
$m < 0$	una soluzione per q qualsiasi
$m = 0$	nessuna soluzione per $q \le 0$ una soluzione per $q > 0$
$m > 0$	nessuna soluzione per $q < m(1 - \log m)$ una soluzione per $q = m(1 - \log m)$ due soluzioni per $q > m(1 - \log m)$

Vogliamo studiare la disequazione $\sin x < x$. Ancora, consideriamo la funzione $f(x) = \sin x - x$ che però non ha limiti a $-\infty$ e $+\infty$. Poco male; la derivata è
$$f'(x) = \cos x - 1$$
che è negativa tranne per $x = 2k\pi$ (k intero), dove si annulla. Dunque f è decrescente e perciò si annulla in al più un punto; a sinistra di esso sarà positiva, a destra di esso sarà negativa. Siccome $\sin 0 = 0$, cioè $f(0) = 0$, abbiamo che $\sin x < x$ per $x > 0$.

Si provi in modo analogo che l'equazione $x = \tan x$ ha una e una sola soluzione in ciascuno degli intervalli $I_k = (-\pi/2 + k\pi .. \pi/2 + k\pi)$ (k intero). Se denotiamo con $c(k)$ la soluzione nell'intervallo I_k, si provi che $\lim_{k\to+\infty}(c(k) - k\pi) = \pi/2$.

Un altro problema interessante è quello di trovare le soluzioni negli interi positivi dell'equazione $y^x = x^y$ in cui sia $x \ne y$. È evidente che una soluzione è $x = 2$, $y = 4$ (o viceversa), non altrettanto ovvio è decidere se ce ne siano altre.

Decidiamo perciò di considerare $a > 0$ (anche non intero) e di trovare tutti i valori $x > a$ per i quali si abbia $a^x = x^a$. Ci basta porre $x > a$, perché evidentemente la situazione è del tutto simmetrica. L'equazione è equivalente a $x\log a = a\log x$ e dunque consideriamo la funzione
$$f(x) = x\log a - a\log x, \qquad x \in (a .. \rightarrow),$$
in modo da evitare gli esponenziali. Abbiamo
$$f'(x) = \log a - \frac{a}{x}$$
e l'espressione $x\log a - a$ si annulla per $x = a/\log a$. Dobbiamo domandarci quando questo valore appartiene al dominio, cioè quando $a/\log a > a$, che avviene per $\log a > 0$ e $\log a < 1$, quindi per $1 < a < e$.

Teniamo da parte questo caso ed esaminiamo gli altri. Siccome $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \log a$, nei casi in cui la derivata non si annulla nel dominio sappiamo che la funzione è crescente oppure decrescente. È crescente per $a \ge e$ e decrescente per $a < 1$; inoltre $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e perciò abbiamo $f(x) \ne 0$ per ogni $x > a$ quando $0 < a < 1$ oppure $a \ge e$. Nel caso di $a = 1$ l'equazione diventa $1^x = x^1$ che ha, evidentemente, l'unica soluzione $x = 1$.

Studiamo dunque il caso $1 < a < e$. La derivata $f'(x)$ è negativa per $0 < x < a/\log a$ e positiva per $x > a/\log a$, quindi $a/\log a$ è un punto di minimo. Sappiamo anche che $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e perciò questo limite è negativo; inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (verificarlo), dunque la funzione si annulla in un unico punto nell'intervallo $(a/\log a .. \rightarrow)$.

Le soluzioni intere non banali dell'equazione $a^x = x^a$ (con $x > a$) dunque possono esistere solo per a nell'intervallo $(1 \mathinner{..} e)$ e l'unico intero è 2. Perciò la soluzione $a = 2$, $x = 4$ è l'unica in numeri interi. Se $a > 2$ è intero, abbiamo anche $a > e$ e le considerazioni precedenti ci dicono che per $x > a$ si ha $f(x) > 0$, cioè $a^x > x^a$ (per esempio, $3^4 = 81 > 4^3 = 64$). Nel caso di $a = 2$, che è l'unico con incertezza, abbiamo $2^3 < 3^2$, $2^4 = 4^2$ e $2^x > x^2$, per $x > 4$. Il caso di $a = 1$ è del tutto banale.

Se esaminiamo invece l'analoga equazione $\sqrt[x]{a} = \sqrt[a]{x}$, siamo condotti a considerare l'equazione

$$\frac{1}{x}\log a = \frac{1}{a}\log x$$

cioè $x \log x = a \log a$. Per simmetria possiamo sempre assumere $x > a$, se vogliamo le soluzioni non banali. Consideriamo allora

$$f(x) = x\log x - a\log a,$$

la cui derivata è $f'(x) = 1 + \log x$ che si annulla solo, eventualmente, per $x = 1/e$. Per $a \ge 1/e$, abbiamo dunque $f'(x) > 0$ in $(a \mathinner{..} \to)$ e dunque f è crescente; essendo $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, possiamo dire che f non si annulla in alcun punto del dominio e l'equazione non ha soluzioni.

Per $0 < a < 1/e$ la situazione è diversa. La funzione è decrescente in $(a \mathinner{..} 1/e]$ e crescente in $[1/e \mathinner{..} \to)$ e il minimo è

$$f(1/e) = -\frac{1}{e} - a\log a.$$

Valgono ancora $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi c'è esattamente un punto interno al dominio in cui f si annulla. Non ci sono, naturalmente, soluzioni intere, perché nessun intero cade nell'intervallo $(0 \mathinner{..} 1/e)$.

5.2 PROCEDURA PER LO STUDIO DI UNA FUNZIONE

Come si imposta uno studio di funzione? È bene aver presente uno schema che ci ricordi quali sono i punti principali su cui fissare l'attenzione. Tuttavia non è sempre necessario o conveniente seguire tutti i passi: è uno schema generale che va adattato alle situazioni particolari.

PRIMO PASSO: determinare il dominio della funzione. Se il problema non ha imposizioni particolari, si considera come dominio il più grande insieme di numeri reali in cui l'espressione con cui è data la funzione ha senso.

SECONDO PASSO: decidere in quali punti del dominio la funzione è sicuramente continua.

TERZO PASSO: identificare i punti di accumulazione del dominio che non appartengono al dominio stesso (compresi, se il dominio è illimitato, $+\infty$ o $-\infty$).

QUARTO PASSO: calcolare il limite nei punti del dominio in cui non è sicuro che la funzione sia continua e nei punti determinati nel terzo passo, distinguendo, se necessario, fra limite da destra e limite da sinistra.

QUINTO PASSO: determinare gli asintoti.

SESTO PASSO: calcolare, dove esiste, la derivata della funzione e, se possibile, determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza; dedurre, da queste informazioni, i punti di massimo e di minimo.

SETTIMO PASSO: se le informazioni ottenute non sono sufficienti a tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione, determinare gli intervalli di concavità e convessità.

5.3 ASINTOTI

Nella lista della spesa precedente ci sono alcuni termini non ancora descritti con precisione. Il primo termine è *asintoto*, che però è già stato incontrato nel caso dell'iperbole.

Consideriamo l'iperbole di equazione $xy = 1$. La retta r di equazione $x = 0$ ha la proprietà che non incontra l'iperbole, ma la distanza dai punti dell'iperbole alla retta r può essere resa piccola quanto si vuole: data una tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un punto P dell'iperbole tale che la distanza di P da r è minore di ε. In effetti, il punto P di coordinate $(\varepsilon/2, 2/\varepsilon)$ ha questa proprietà, perché la distanza di P da r è il valore assoluto dell'ascissa di P.

Questo non succede per la retta s di equazione $x + y = 0$: il sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

ha come equazione risolvente

$$-x^2 = 1$$

e dunque il sistema non ha soluzioni, cioè la retta non incontra l'iperbole. Sia $(t, 1/t)$ un punto dell'iperbole e determiniamo la distanza di questo punto da s: il quadrato della distanza è

$$f(t) = \frac{(t + 1/t)^2}{1+1} = \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{2t^2} = \frac{t^2}{2} + 1 + \frac{1}{2t^2}$$

Si tratta di una funzione che vale la pena di studiare. Sappiamo che

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to 0} f(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$$

La derivata di f è

$$f'(t) = t - \frac{1}{t^3} = \frac{t^4 - 1}{t^3}$$

che è negativa nell'intervallo $(\leftarrow .. -1)$ e in $(0 .. 1)$, positiva in $(-1 .. 0)$ e in $(1 .. \to)$. Dunque f ha punti di minimo in -1 e 1, con $f(1) = f(-1) = 2$. Quindi esiste una minima distanza dei punti dell'iperbole dalla retta.

Se una retta incontra l'iperbole, evidentemente la minima distanza esiste ed è nulla. Si può verificare che le rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono le uniche che non incontrano l'iperbole e per le quali la distanza non abbia minimo. Queste rette sono dette *asintoti*.

L'unica retta verticale che non incontra il grafico dell'iperbole $xy = 1$ è l'asse delle ordinate, per il quale è evidente che la distanza non ha minimo. Discorso analogo vale per le rette orizzontali.

Supponiamo dunque che la retta abbia equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$. L'equazione risolvente del sistema con l'iperbole è

$$x(mx + q) = 1$$

che ha discriminante negativo per $q^2 + 4m < 0$. Quando infatti il discriminante è non negativo, la retta incontra l'iperbole e il minimo della distanza è zero. Per trovare il minimo della distanza, consideriamo dunque

$$f(t) = \left(\frac{1}{t} - mt - q\right)^2.$$

La distanza vera si otterrebbe dividendo per $1 + m^2$ e prendendo la radice quadrata, ma la radice quadrata è crescente e il divisore non può cambiare il punto di minimo. La derivata di f è

$$f'(t) = 2\left(\frac{1}{t} - mt - q\right)\left(-\frac{1}{t^2} - m\right).$$

Il primo fattore non si annulla perché, per ipotesi, $q^2 + 4m < 0$. Il secondo fattore si annulla per $mt^2 + 1 = 0$; si ottengono dunque due punti, entrambi di minimo, quando $m < 0$. In effetti abbiamo visto che le rette che non incontrano l'iperbole sono gli assi e quelle di equazione $y = mx + q$ con $4m < -q^2$.

Si ha, per questi punti,

$$f(-\sqrt{1/m}) = (-\sqrt{m} + \sqrt{m} - q)^2 = q^2, \quad f(\sqrt{1/m}) = (\sqrt{m} - \sqrt{m} - q)^2 = q^2,$$

e perciò la distanza minima è $|q|/\sqrt{1+m^2}$. Si noti che la condizione $q^2 + 4m = 0$ caratterizza le rette tangenti; se scriviamo la retta nella forma $ax + by + c = 0$, abbiamo $m = -a/b$, $q = -c/b$ e la condizione diventa $c^2 + 4ab = 0$: fra queste rette ci sono anche gli assi! Infatti per $a = c = 0$ e $b \neq 0$ otteniamo l'asse delle ascisse; per $b = c = 0$ e $a \neq 0$ otteniamo l'asse delle ordinate. Il discorso ci porterebbe troppo in là, ma da questo capiamo che non è così peregrino considerare gli asintoti come tangenti 'improprie' all'iperbole.

La nozione di asintoto si estende ai grafici di funzioni arbitrarie. Diremo che la retta $x = c$ è un *asintoto verticale* del grafico di f se vale almeno una delle condizioni seguenti:

- f è definita nell'intervallo $(c \mathinner{..} c + \delta)$, per un $\delta > 0$, e $\lim_{x \to c+} f(x) = \pm\infty$;
- f è definita nell'intervallo $(c - \delta \mathinner{..} c)$, per un $\delta > 0$, e $\lim_{x \to c-} f(x) = \pm\infty$.

Non facciamo alcuna richiesta che la retta non incontri il grafico della funzione in altri punti (succede se la funzione *è* definita in c).

Diremo che la retta $y = d$ è un *asintoto orizzontale* del grafico di f se vale almeno una delle condizioni seguenti:

- f è definita in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = d$;
- f è definita in un intorno di $-\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = d$.

Anche qui non chiediamo che il grafico di f non incontri la retta.

Esiste un terzo tipo di asintoto. Consideriamo la funzione

$$f(x) = 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$$

che consideriamo definita per $x > 0$. Cerchiamo un'equazione che sia soddisfatta da tutti i punti del grafico di f: l'equazione ovvia

$$y = 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$$

può essere manipolata liberamente; scegliamo di portare il termine noto a sinistra e di elevare al quadrato:

$$(y - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

e quindi i punti del grafico di f appartengono tutti all'iperbole di equazione

$$(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 1$$

i cui asintoti sono $(x + 1) = (y - 1)$ e $(x + 1) = -(y - 1)$. Quello che ci interessa è il primo, come si vede chiaramente facendo tracciare il grafico di f a un programma come GeoGebra. Ci si accorge che più x diventa grande, più la distanza del punto di coordinate $(x, f(x))$ dalla retta r di equazione $x - y + 2 = 0$ diventa piccola.

Proviamo a vederlo senza calcolare effettivamente la distanza: invece calcoleremo le distanze in orizzontale e verticale; se queste diventano piccole, anche la distanza effettiva diventa piccola, e viceversa.

Consideriamo dunque il punto di coordinate $(t, f(t))$; la distanza in orizzontale d_x da questo punto alla retta è il valore assoluto della differenza delle ascisse tra i punti $(t, (f(t))$ e $(f(t)+2, f(t))$, mentre la distanza in verticale d_y è il valore assoluto della differenza delle ordinate tra i punti $(t, f(t))$ e $(t, t+2)$. Dunque

$$d_x = |t - (f(t) + 2)|, \qquad d_y = |f(t) - (t+2)|.$$

Quindi $d_x = d_y$. Poniamo $d(t) = f(t) - t - 2 = \sqrt{t^2+2t} - t - 1$ e calcoliamo $\lim_{t\to+\infty} d(t)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t^2+2t} - t - 1 &= \lim_{t\to+\infty} \frac{(t^2+2t) - (t+1)^2}{\sqrt{t^2+2t}+t+1} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{t^2+2t}+t+1} \\
&= \frac{-1}{+\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Perciò anche $\lim_{t\to+\infty}|d(t)| = 0$, proprio come ci aspettavamo.

Il calcolo è esattamente lo stesso anche in altre situazioni: il rapporto tra la distanza in verticale e quella in orizzontale è fisso (due opportuni triangoli sono simili) e quindi una tende a 0 se e solo se tende a 0 l'altra. Dunque possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE. *La retta di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, si dice un asintoto obliquo del grafico di f se è soddisfatta almeno una delle seguenti condizioni:*

- *$+\infty$ è un punto di accumulazione del dominio di f e*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0;$$

- *$-\infty$ è un punto di accumulazione del dominio di f e*

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx - q) = 0.$$

Data la definizione, occorre un metodo per calcolare m e q. Vediamo nel caso di $+\infty$, in quello di $-\infty$ si opera allo stesso modo. Supponiamo dunque che la retta di equazione $y = mx + q$ sia un asintoto obliquo a $+\infty$. Allora, per ipotesi, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - q) = 0$, e quindi anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0.$$

Siccome $\lim_{x\to+\infty} q/x = 0$, avremo anche

$$\begin{aligned}
m &= m + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{q}{x} \\
&= m + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}
\end{aligned}$$

Questo determina, se esiste, il coefficiente angolare m. A questo punto abbiamo

$$q = q + \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

e questo determina q. Se uno dei due limiti non esiste o è infinito, l'asintoto obliquo non c'è. Non c'è nemmeno se $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$, perché in tal caso l'asintoto dovrebbe essere orizzontale e l'abbiamo già escluso.

Per esempio, con $f(x) = x - \log x$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\log x}{x} = 1 - 0 = 1,$$

ma passando al calcolo di q si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \log x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\log x = -\infty,$$

e quindi il grafico di f non ha asintoti obliqui.

Verifichiamo che nel caso del ramo di iperbole di prima i conti danno effettivamente l'asintoto obliquo previsto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{2}{x}} = 0 + 1 = 1,$$

e perciò $m = 1$; abbiamo poi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{x^2+2x} - x && [\![\infty - \infty]\!] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x) - (x-1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + (x-1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2x} + (x-1)} && [\![\infty/\infty]\!] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4 - \dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{1}+1} = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

e dunque l'asintoto ha equazione $y = x + 2$.

Si consideri ora la funzione $f(x) = 1 + \sqrt{x^2+2x}$ definita anche per $x \le -2$ e si determini l'eventuale asintoto obliquo a $-\infty$.

5.4 ESEMPI

Diamo ora qualche esempio di studio di funzione, lasciando da parte, per ora, la questione sulla concavità e convessità.

Sia $f(x) = \exp(-x^2)$.

PRIMO PASSO: la funzione f è definita ovunque.

SECONDO PASSO: la funzione f è continua su tutto il dominio, essendo composizione di due funzioni continue. Notiamo poi che $f(-x) = f(x)$ e che $f(x) > 0$, per ogni x.

TERZO PASSO: i punti di accumulazione del dominio da considerare sono solo $-\infty$ e $+\infty$.

QUARTO PASSO: Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Siccome $\lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$, avremo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to-\infty} \exp t = 0$$

e, dal fatto che $f(-x) = f(x)$, deduciamo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

QUINTO PASSO: l'unico asintoto è la retta di equazione $y = 0$.

SESTO PASSO: la derivata è

$$f'(x) = \exp(-x^2)(-2x) = -2x\exp(-x^2)$$

che è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$. Dunque f ha un massimo (assoluto) in 0 e $f(0) = \exp 0 = 1$.

Gli elementi necessari per avere un'idea del grafico ci sono tutti. Manca qualche dettaglio, perché è evidente che nel procedere da 0 verso destra la 'curvatura' del grafico deve cambiare.

Vediamo la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$.

PRIMO PASSO: il dominio $D(f)$ è l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - x^3 \geq 0$, cioè l'intervallo $(\leftarrow .. 1]$.

SECONDO PASSO: la funzione è continua in tutto il dominio e $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in D(f)$.

TERZO PASSO: l'unico punto di accumulazione del dominio da considerare è $-\infty$.

QUARTO PASSO: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

QUINTO PASSO: Vediamo se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2 - x^3}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-x} = -\infty.$$

Il grafico della funzione non ha asintoti.

SESTO PASSO: calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^3}}(2x - 3x^2).$$

La funzione non è derivabile in 0 e in 1 (si veda un esempio già svolto):

$$\lim_{x\to0-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to0+} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to1} f'(x) = -\infty.$$

La derivata è negativa nell'intervallo $(\leftarrow .. 0)$, positiva in $(0 .. 2/3)$, negativa in $(2/3 .. 1)$.

Dunque abbiamo le seguenti informazioni:

f è decrescente in $(\leftarrow .. 0]$;
0 è un punto di minimo, $f(0) = 0$;
f è crescente in $[0 .. 2/3]$;
$2/3$ è un punto di massimo, $f(2/3) = 2/(3\sqrt{3})$;
f è decrescente in $[2/3 .. 1]$;
1 è un punto di minimo, $f(1) = 0$.

Si faccia attenzione a non scrivere $\sqrt{x^2 - x^3} = x\sqrt{1-x}$, perché questa uguaglianza vale solo per $0 \leq x \leq 1$. Infatti la funzione $g(x) = x\sqrt{1-x}$ ha un grafico molto diverso da quello di f. Molto diverso?

5.5 UN'APPLICAZIONE

Dati due numeri positivi a e b, le loro *media aritmetica* e *media geometrica* sono definite rispettivamente come

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \sqrt{ab}.$$

È piuttosto facile verificare che $\gamma \le \alpha$ e che si ha l'uguaglianza se e solo se $a = b$. Infatti possiamo impostare una catena di disuguglianze equivalenti fra loro

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &\mathrel{?} \frac{a+b}{2} \\ 4ab &\mathrel{?} (a+b)^2 \\ 0 &\mathrel{?} a^2 - 2ab + b^2 \\ 0 &\le (a-b)^2 \end{aligned}$$

e perciò lo stesso verso di disuguaglianza vale anche nelle precedenti. L'uguaglianza si ha appunto solo quando $a - b = 0$.

Si può generalizzare il concetto a più numeri positivi: la *media aritmetica* di x_1, x_2, …, x_n è

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

mentre la loro *media geometrica* è

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}.$$

Possiamo usare i metodi dello studio di funzione per dimostrare, attraverso l'induzione, che vale la disuguaglianza

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Nel caso di $n = 1$ si pone, ovviamente, $\alpha(x_1) = \gamma(x_1) = x_1$ e la disuguaglianza è evidente. Supponiamo dunque di sapere che questa disuguaglianza vale per n numeri. Dobbiamo perciò ricavare da questa ipotesi la disuguaglianza per $n + 1$ numeri che scriveremo

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n, x) \le \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, x)$$

e che possiamo trasformare in quella equivalente

$$(n+1)^{n+1}\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n, x)^{n+1} \le \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, x)^{n+1}.$$

Per semplificare la notazione scriviamo $P = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$ e $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, in modo che la tesi diventa

$$(n+1)^{n+1} P^n x \le (S + x)^{n+1}.$$

e l'ipotesi induttiva è $nP^n \le S$. Consideriamo dunque la funzione, definita in $(0 \mathinner{..} \rightarrow)$,

$$f(x) = (S + x)^{n+1} - (n+1)^{n+1} P^n x.$$

Per i risultati che conosciamo sui polinomi, abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to0+} f(x) = S^{n+1} > 0$. Ne segue che f ha almeno un punto di minimo. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = (n+1)(S + x)^n - (n+1)^{n+1} P^n$$

che si annulla solo per $S + x = (n+1)P$, cioè in $(n+1)P - S$. Se $(n+1)P - S \leq 0$, la funzione f è crescente, quindi ovunque positiva. Supponiamo dunque $(n+1)P - S > 0$: questo sarà il punto di minimo. Calcoliamo il valore minimo:

$$\begin{aligned} f((n+1)P - S) &= (n+1)^{n+1}P^{n+1} - (n+1)^{n+1}P^n(nP + P - S) \\ &= (n+1)^{n+1}P^n(P - nP - P + S) \\ &= (n+1)^{n+1}P^n(S - nP) \geq 0 \end{aligned}$$

perché il fattore $S - nP$ è non negativo per ipotesi. Siccome il valore minimo non è negativo, abbiamo $f(x) \geq 0$ per ogni x, come richiesto.

Ci domandiamo ora quando può valere l'uguaglianza e procediamo di nuovo per induzione: il caso $n = 1$ è ovvio, perché l'uguaglianza c'è per definizione. La nostra ipotesi induttiva è allora

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{se e solo se} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

cioè, nelle notazioni precedenti, $S = nP$.

Nel caso di $n+1$ numeri x_1, x_2, …, x_n, x, possiamo avere l'uguaglianza solo se f si annulla. Ma naturalmente questo può avvenire solo se il valore minimo di f è 0, cioè $S - nP = 0$ (con $(n+1)P - S > 0$). L'ipotesi induttiva dice allora che $x_1 = \dots = x_n$ e che $x = (n+1)P - S = nP + P - S = P$; ma, essendo $P = x_1$, si ha anche $x = x_1$ e la tesi è dimostrata.

Esiste anche un terzo tipo di media, la *media armonica*. Per due numeri positivi a e b si definisce la media armonica η con la formula

$$\frac{2}{\eta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Con un po' di attenzione, si vede che il reciproco della media armonica è la media aritmetica dei reciproci dei numeri. Siccome prendere il reciproco rovescia il verso delle disuguaglianze (stiamo parlando di numeri positivi), viene il sospetto che la media armonica sia in generale minore della media geometrica. Proviamolo con la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} \eta &\mathrel{?} \sqrt{ab} \\ \frac{2ab}{a+b} &\mathrel{?} \sqrt{ab} \\ 4ab &\mathrel{?} (a+b)^2 \\ 0 &\mathrel{?} a^2 - 2ab + b^2 \\ 0 &\leq (a-b)^2 \end{aligned}$$

e la tesi è dimostrata. Di nuovo, si ha l'uguaglianza fra le medie se e solo se $a = b$.

In generale definiamo la media armonica dei numeri positivi x_1, x_2, …, x_n con

$$\frac{n}{\eta(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}.$$

La disuguaglianza da dimostrare è allora

$$n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1} \leq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}.$$

Se poniamo $y_k = 1/x_k$ (per $k = 1, 2, \dots, n$), possiamo scriverla come

$$n(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^{-1} \leq \frac{1}{(y_1 y_2 \dots y_n)^{1/n}}$$

cioè

$$\frac{1}{\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n)} \leq \frac{1}{\gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

che equivale alla

$$\gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

appena dimostrata. Si ha l'uguaglianza solo quando $y_1 = y_2 = \dots = y_n$, cioè $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Le tre medie che abbiamo introdotto possono essere viste come casi particolari di una forma generale di 'media'. Consideriamo due numeri positivi a e b e la funzione

$$\mu(a,b;x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}.$$

Indichiamo anche i due parametri a e b per motivi che diventeranno chiari più avanti. La funzione è definita e continua per $x \neq 0$ e perciò ci interessano i limiti nei punti di accumulazione del dominio. Cominciamo con $+\infty$, dove abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$$

che non è necessariamente una forma indeterminata e dovremmo esaminare i vari casi con $a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ e $b < 1$, $b = 1$ e $b > 1$. Si può fare di meglio supponendo che $a \leq b$ e perciò $b/a \geq 1$. Scriviamo allora

$$a^x + b^x = a^x(1 + (b/a)^x)$$

e poniamo, per semplicità, $b/a = c$: il nostro limite diventa allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log a + \log(1 + c^x) - \log 2}{x} \\
&= \log a + \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1 + c^x) - \log 2}{x} \\
&\overset{\text{H}}{=} \log a + \lim_{x\to+\infty} \frac{c^x \log c}{1 + c^x} \\
&= \log a + \log c = \log(ac) = \log b
\end{aligned}$$

e dunque $\lim_{x\to+\infty} \mu(a,b;x) = b$. Se invece $a > b$, il limite è a: infatti $\mu(a,b;x) = \mu(b,a;x)$. In generale, dunque,

$$\lim_{x\to+\infty} \mu(a,b;x) = \max(a,b).$$

Per il limite a 0 consideriamo sempre $\log\mu(a,b;x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

e perciò

$$\lim_{x\to 0} \mu(a,b;x) = \exp\left(\frac{\log a + \log b}{2}\right) = \sqrt{ab}.$$

Possiamo allora estendere per continuità la definizione di μ:

$$\mu(a,b;x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} & \text{se } x \neq 0, \\[2ex] \sqrt{ab} & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ottenendo così che $\mu(a,b;1)$, $\mu(a,b;0)$ e $\mu(a,b;-1)$ sono rispettivamente la media aritmetica, geometrica e armonica di a e b.

Non occorre calcolare il limite a $-\infty$; infatti

$$\mu(a,b;-x) = \left(\frac{a^{-x} + b^{-x}}{2}\right)^{-1/x} = \left(\frac{(1/a)^x + (1/b)^x}{2}\right)^{-1/x} = (\mu(1/a,1/b;x))^{-1}$$

e dunque

$$\lim_{x\to-\infty} \mu(a,b;x) = \lim_{x\to+\infty} \mu(1/a,1/b;x)^{-1} = (\max(1/a,1/b))^{-1} = \min(a,b).$$

Tutto quanto fatto per due numeri si può estendere a n numeri positivi, definendo

$$\mu(a_1,a_2,\dots,a_n;x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}$$

per $x \neq 0$ e $\mu(a_1,a_2,\dots,a_n;x) = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$.

5.6 CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA

Supponiamo che f sia definita in un intervallo aperto $(p \mathrel{..} q)$. Diremo che f è *convessa* in $(p \mathrel{..} q)$ se, per ogni $a, b \in (p \mathrel{..} q)$, con $a < b$, quando consideriamo la retta r passante per i punti A e B di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, diciamo $y = mx + k$, si ha, per ogni t con $a < t < b$, $f(t) \leq mt + k$. Quando, con le stesse notazioni, vale $f(t) \geq mt + k$ la funzione si dirà *concava*. In qualche testo si dice, con linguaggio poco felice, che f ha la concavità rivolta verso l'alto quando è convessa, e verso il basso quando è concava.

La definizione sembra di quelle fatte apposta per intimidire. Ma se facciamo un disegno, ci rendiamo conto che significa una cosa semplice: il grafico di f sta tutto sotto il segmento AB.

Vediamo il caso più facile, $f(x) = x^2$. La retta che passa per (a, a^2), (b, b^2) ha equazione

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$$

cioè

$$y - a^2 = (b + a)(x - a)$$

che diventa $y = (a + b)x - ab$. Se $a < t < b$, dobbiamo verificare che

$$t^2 \leq (a + b)t - ab$$

cioè

$$t^2 - (a + b)t + ab \leq 0$$

che diventa

$$(t - a)(t - b) \leq 0$$

che è, effettivamente, soddisfatta.

Consideriamo invece $f(x) = x^3$; prendiamo $b > 0$. La retta che ci interessa ha equazione

$$y - a^3 = \frac{b^3 - a^3}{b - a}(x - a)$$

che diventa

$$y = (a^2 + ab + b^2)x - ab(a + b).$$

Per $a < t < b$ dobbiamo vedere se

$$t^3 \leq (a^2 + ab + b^2)t - ab(a + b).$$

Poniamo, per fare i conti, $s = a+b$, $p = ab$; allora $a^2+ab+b^2 = s^2-p$ e la disequazione è

$$t^3 - (s^2 - p)t + sp \leq 0.$$

Si vede subito che $t = -s$ è una radice e quindi

$$t^3 - (s^2 - p)t + sp = (t + s)(t^2 - st + p) = (t + s)(t - a)(t - b).$$

Siccome $(t - a)(t - b) < 0$, la nostra disequazione sarà soddisfatta per $t + a + b \geq 0$. Se $a \geq 0$, la condizione è certamente soddisfatta: $t > a \geq 0$ e $-(a + b) < 0$. Dunque la funzione è convessa nell'intervallo $(0 \mathrel{..} \rightarrow)$. Se invece $a = -1$ e $b = 4$, la disequazione è $t > -1 + 3 = 2$, che non è soddisfatta per ogni $t \in (-1 \mathrel{..} 4)$. Perciò la funzione non è convessa su tutto il dominio.

La convessità è una proprietà molto forte; per esempio, se f è convessa nell'intervallo aperto $(p \mathrel{..} q)$, allora f è continua.

Dato $x \in (p \mathrel{..} q)$, prendiamo $h > 0$ tale che $x - h > p$ e $x + h < q$. Se $x - h < z < x$, dalle disuguaglianze della convessità otteniamo

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{x - (x-h)} \le \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

e analogamente se prendiamo $x < z < x + h$. Se C è il massimo tra

$$\left|\frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right| \quad \text{e} \quad \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|,$$

abbiamo allora che

$$\left|\frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right| \le C$$

e perciò che

$$|f(z) - f(x)| \le C|z - x|$$

per $z \in (x - h \mathrel{..} x + h)$. Ora la continuità in x è evidente: se prendiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$, ci basterà prendere

$$\delta = \min\left\{h, \frac{\varepsilon}{C}\right\}$$

e, se $|z - x| < \delta$, avremo

$$|f(z) - f(x)| \le C|z - x| \le C\delta \le C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

cioè la continuità in x.

Se f è definita e convessa in un intervallo chiuso, non è detto che sia continua agli estremi: basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x = -1, \\ x^2 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 4 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La funzione è evidentemente convessa, ma non è continua in -1 e in 1.

Vediamo ora più in dettaglio come si può caratterizzare la convessità nel caso in cui la funzione f sia derivabile nell'intervallo $(p \mathrel{..} q)$.

Prima di tutto scriviamo l'equazione della retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, dove $p < a < b < q$; ci sono due modi equivalenti e ci serviranno entrambi:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Siccome la funzione f è per ipotesi una funzione di Lagrange in $[a \mathrel{..} b]$, possiamo scrivere il coefficiente angolare come $f'(c)$ per un opportuno $c \in (a \mathrel{..} b)$. Allora la condizione di convessità si scrive

$$f(t) \le f'(c)(t - a) + f(a)$$

ma anche

$$f(t) \le f'(c)(t - b) + f(b).$$

La relazione è la stessa, sia chiaro; ma da queste ricaviamo

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \le f'(c),$$
$$\frac{f(t) - f(b)}{t - b} \ge f'(c),$$

per ogni $t \in (a \mathinner{\ldotp\ldotp} b)$, quindi

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \le \frac{f(t) - f(b)}{t - b}.$$

Se prendiamo il limite per $t \to a$, otteniamo, per il teorema della permanenza del segno,

$$f'(a) \le \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Se invece prendiamo il limite per $t \to b$, otteniamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le f'(b)$$

e dunque $f'(a) \le f'(b)$.

Viceversa, supponiamo che per $a, b \in (p \mathinner{\ldotp\ldotp} q)$, $a < b$, si abbia $f'(a) \le f'(b)$. Vogliamo dimostrare che f è convessa. Di nuovo, dati a e b con $a < b$, per il teorema di Lagrange si ha

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

con $a < c < b$. Prendiamo $t \in (a \mathinner{\ldotp\ldotp} b)$: dobbiamo verificare la condizione di convessità. I casi sono due: $t \le c$ oppure $c < t$. Nel primo caso scriviamo la condizione di convessità come

$$f(t) \le f'(c)(t - a) + f(a)$$

che equivale a

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \le f'(c).$$

Ma f è una funzione di Lagrange in $[a \mathinner{\ldotp\ldotp} t]$ e quindi il primo membro si scrive come $f'(\gamma)$ per un $\gamma \in (a \mathinner{\ldotp\ldotp} t)$. Siccome $\gamma < t \le c$, avremo per ipotesi $f'(\gamma) \le f'(c)$ e quindi la disuguaglianza di convessità è soddisfatta.

Nel secondo caso scriviamo la condizione di convessità come

$$f(t) \le f'(c)(t - b) + f(b)$$

che equivale a

$$f'(c) \le \frac{f(b) - f(t)}{b - t}.$$

Applicando di nuovo il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $(t \mathinner{\ldotp\ldotp} b)$, il secondo membro si scrive $f'(\delta)$, con $\delta \in (t \mathinner{\ldotp\ldotp} b)$. Ora però $c < t < \delta$ e quindi $f'(c) \le f'(\delta)$ e la disuguaglianza è ancora soddisfatta.

In definitiva abbiamo dimostrato il seguente teorema.

TEOREMA. *La funzione f, definita e derivabile su $(p \mathinner{\ldotp\ldotp} q)$, è convessa se e solo se la funzione $x \mapsto f'(x)$ è crescente.*

La funzione $x \mapsto f'(x)$ si chiama *la funzione derivata di f* e si denota, ovviamente, con f'. Questa funzione potrà ancora essere derivabile; diamo un nome a questa "derivata della derivata".

DEFINIZIONE. *Se x è un punto del dominio di f e ha senso scrivere*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} = l,$$

con l finito, diremo che l è la derivata seconda di f in x e scriveremo $l = f''(x)$.

Diremo che f è *derivabile due volte* in un certo insieme S se in ogni punto di S esiste la derivata seconda di f.

TEOREMA. *Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo $(p \mathinner{..} q)$. Allora f è convessa in $(p \mathinner{..} q)$ se e solo se $f''(x) \ge 0$ per ogni $x \in (p \mathinner{..} q)$.*

▶ Sappiamo che una funzione derivabile, definita su un intervallo, è crescente se e solo se la sua derivata è non negativa. La funzione che ci interessa è, in questo caso, f'. ◀

Questo è lo strumento principale per trovare gli intervalli di convessità e quelli di *concavità*, che è esattamente il contrario: una funzione f si dice *concava* se $-f$ è convessa.

L'esempio è quello di $f \colon x \mapsto x^3$; la derivata è $f'(x) = 3x^2$, mentre $f''(x) = 6x$. Dunque la derivata seconda è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$: la funzione è concava in $(\leftarrow \mathinner{..} 0]$ e convessa in $[0 \mathinner{..} \rightarrow)$.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^x = \exp(x \log x)$, la cui derivata è

$$f'(x) = \exp(x \log x)(\log x + x \log' x) = (\log x + 1)f(x).$$

Dunque possiamo scrivere

$$f''(x) = \frac{1}{x}f(x) + (\log x + 1)f'(x) = \frac{1}{x}f(x) + (\log x + 1)^2 f(x).$$

Ne segue che $f''(x) > 0$, per $x \in D(f)$ e quindi f è convessa.

Torniamo alla funzione $f(x) = \exp(-x^2)$; si ha $f'(x) = -2x\exp(-x^2)$ e quindi

$$f''(x) = -2\exp(-x^2) + 4x^2\exp(-x^2) = 2(2x^2 - 1)\exp(-x^2),$$

che è negativa in $(-1/\sqrt{2} \mathinner{..} 1/\sqrt{2})$ e positiva in $(\leftarrow \mathinner{..} -1/\sqrt{2})$ e $(1/\sqrt{2} \mathinner{..} \rightarrow)$. Questo determina gli intervalli di concavità e convessità.

I punti che separano un intervallo di concavità da uno di convessità e in cui la curva ha tangente si chiamano *punti di flesso*: in essi, intuitivamente, la tangente attraversa il grafico. Lo studio della derivata seconda dà informazioni molto utili per tracciare il grafico, ma non sempre è agevole. La funzione appena studiata ha perciò due punti di flesso; analogamente la funzione $x \mapsto x^3$ ha un punto di flesso.

Consideriamo una funzione più complicata, $f(x) = x^{1/x} = \exp((\log x)/x)$. Il dominio è $D(f) = (0 \mathinner{..} \rightarrow)$. Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Inoltre

$$f'(x) = f(x)\frac{x \cdot (1/x) - \log x}{x^2} = f(x)\frac{1 - \log x}{x^2}.$$

La funzione è crescente in $(0 \mathinner{..} e]$ e decrescente in $[e \mathinner{..} \rightarrow)$. C'è un punto di massimo in e e $f(e) = e^{1/e} \approx 1{,}44467$. Dal fatto che il grafico ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$, sembra evidente che ci deve essere un punto di flesso c con $c > e$.

Proviamo a calcolare la derivata seconda:

$$f''(x) = f'(x)\frac{1 - \log x}{x^2} + f(x)\frac{x^2 \cdot (-1/x) - 2x(1 - \log x)}{x^4}$$

che, semplificando, diventa

$$f''(x) = f(x)\frac{1 - 2\log x + (\log x)^2 - 3x + 2x\log x}{x^4}.$$

Come fare? L'espressione sembra intrattabile. Siccome però il segno di $f''(x)$ dipende solo dal numeratore della frazione, poniamo

$$g(x) = (\log x)^2 - 2(1-x)\log x - 3x + 1.$$

Abbiamo $g(1) = 1-3 = -2 < 0$; inoltre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, il teorema sugli zeri dice che esiste (almeno) un punto $c > 1$ in cui $g(c) = 0$ che corrisponderà al flesso cercato. Analogamente, siccome $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, ci sarà (almeno) un flesso anche tra 0 e 1. Proviamo a scrivere $g(x) = 0$ e poniamo $y = \log x$, ottenendo la curva di equazione

$$y^2 - 2(1-x)y - 3x + 1 = 0$$

che rappresenta un'iperbole. Se la si disegna e si cercano le intersezioni con la curva $y = \log x$, si vede che le intersezioni sono esattamente due: $0{,}47 < x_1 < 0{,}48$ e $31 < x_2 < 32$.

È immediato vedere che $f(x) = \sin x$ è concava dove $\sin x > 0$ e convessa dove $\sin x < 0$, dal momento che $f''(x) = -\sin x$.

Si può dimostrare che una funzione f definita ovunque, derivabile due volte, strettamente crescente, per la quale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, non può essere convessa? (E nemmeno concava.) Rimane solo da sottolineare che occorre molta cautela quando la funzione non sia derivabile due volte in tutto il dominio.

Le funzioni convesse danno origine a molte disuguaglianze che possono essere adoperate al posto di calcoli più complicati. Torniamo alle funzioni $x \mapsto \mu(a,b;x)$ (ce n'è una per ogni paio di numeri $a, b > 0$), dove

$$\mu(a,b;x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \quad (x \neq 0), \quad \mu(a,b;0) = \sqrt{ab},$$

per dimostrare che sono crescenti. Provando a calcolare la derivata ci si accorge che il problema sembra piuttosto arduo. Tuttavia il nostro scopo è dimostrare che, se $p < q$, allora $\mu(a,b;p) \le \mu(a,b;q)$. Ci limitiamo per il momento a $0 < p < q$; in tal caso la disuguaglianza voluta, cioè

$$\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} \le \left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{1/q},$$

si può scrivere, elevando alla q, come

$$\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{q/p} \le \frac{a^q + b^q}{2}.$$

Se poniamo $a^p = u$ e $b^p = v$, abbiamo $a^q = u^{q/p}$ e $b^q = v^{q/p}$; se consideriamo la funzione $f(x) = x^{q/p}$, la disuguaglianza diventa allora

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

che è *vera*, perché $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e la funzione $x \mapsto f(x) = x^{q/p}$ (definita per $x > 0$) è convessa. Infatti la sua derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right)x^{\frac{q}{p}-2}$$

che è positiva, essendo per ipotesi $q > p > 0$.

Questa dimostra la crescenza su $(0 \mathrel{..} \to)$. Non c'è bisogno però di altro, perché, quando $p < q < 0$ possiamo usare il trucco

$$\mu(a,b;x) = \mu\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; -x\right)^{-1}$$

e la crescenza già dimostrata, insieme al fatto che $0 < -q < -p$, dice che

$$\mu\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; -q\right) \le \mu\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; -p\right)$$

da cui, prendendo i reciproci, si ottiene la disuguaglianza cercata. Dal momento poi che μ è continua in 0, abbiamo provato che, per ogni p e q, da $p < q$ segue che

$$\mu(a, b; p) \le \mu(a, b; q).$$

Si provi a verificare che l'uguaglianza vale solo se $a = b$: si torni alla disuguaglianza della convessità, per stabilire quando può valere l'uguaglianza.

Vediamo una funzione periodica: $f(x) = \arctan\sin x$; siccome $\sin x \in [-1 \mathrel{..} 1]$, avremo $f(x) \in [-\pi/4 \mathrel{..} \pi/4]$. Il dominio di f è tutto l'insieme dei reali e la periodicità impedisce che ci siano asintoti. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$$

che è positiva esattamente dove è positivo il coseno. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x) - 2\sin x\cos^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-\sin x(3 - \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2}.$$

Il segno di $f''(x)$ è lo stesso di quello di $-\sin x$; in conclusione il grafico di f è molto simile a quello di $\sin x$, avendo gli stessi massimi e minimi e gli stessi intervalli di convessità e concavità. La disuguaglianza della concavità in $[0 \mathrel{..} \pi]$ dice che, per $0 \le a < t < b \le \pi$,

$$\arctan\sin t - \arctan\sin a \ge \frac{\arctan\sin b - \arctan\sin a}{b - a} t$$

Ora possiamo dire che $(\arctan\sin b - \arctan\sin a) \in (-\pi/2 \mathrel{..} \pi/2)$, dal momento che $\arctan\sin x \in (-\pi/4 \mathrel{..} \pi/4)$, e perciò

$$\arctan\sin b - \arctan\sin a = \frac{\sin b - \sin a}{1 + \sin b\sin a}.$$

Dunque otteniamo

$$\frac{\sin t - \sin a}{1 + \sin t\sin a} \ge \frac{\sin b - \sin a}{1 + \sin b\sin a}\frac{1}{b - a}.$$

Nel caso $a = 0$, questa diventa

$$\sin t \le \frac{\sin b}{b}$$

che conosciamo già.

5.7 SUCCESSIONI

Una successione è, per definizione, una funzione il cui dominio sia l'insieme dei numeri naturali. Dal momento che il dominio è costituito di punti isolati, è evidente che la continuità e la derivabilità di una successione sono fuori discussione: la continuità è automatica, la derivabilità non ha senso. Tuttavia il dominio ha un punto di accumulazione, secondo il nostro linguaggio; più propriamente, è sensato domandarsi il limite a $+\infty$.

Parlando di successioni è tradizionale scrivere il valore in n con a_n invece che $a(n)$, se a è il nome della funzione. Esplicitiamo allora la definizione, che però è solo l'applicazione al caso particolare della definizione più generale già data.

DEFINIZIONE. *Se a è una successione e l un numero, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

quando, per ogni tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un naturale k tale che, per $n > k$, si abbia $|a_n - l| \le \varepsilon$. Analogamente,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

quando, per ogni maggiorazione M, esiste un naturale k tale che, per $n > k$, si abbia $a_n \ge M$.

Dovrebbe essere ovvio il significato di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.
Naturalmente non è detto che ogni successione abbia limite: se consideriamo

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

il limite non esiste. Secondo una terminologia abbastanza diffusa, una successione a è

- *convergente a l* (dove l è finito) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$;
- *divergente* se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (o $-\infty$);
- *oscillante* se il limite non esiste, né finito né infinito.

Possiamo adoperare il teorema del confronto di limiti per calcolare un paio di limiti importanti. Se $0 < t < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} t^n = 0.$$

Infatti la disuguaglianza di Bernoulli ci dice che

$$0 < t^n < \frac{t}{1 + n(t-1)}$$

ma sappiamo già che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{t}{1 + x(t-1)} = 0$$

e quindi abbiamo la tesi. Se non ci si fida, si verifichi l'asserzione con le disuguaglianze e $\varepsilon > 0$. Analogamente, per $t > 1$, da

$$t^n > 1 + n(t-1)$$

ricaviamo

$$\lim_{n\to+\infty} t^n = +\infty.$$

perché $\lim_{x\to+\infty} x(t-1) = +\infty$.

Si tratta di un'osservazione importante: se una successione può essere vista come la restrizione ai naturali di una funzione definita su un opportuno insieme di numeri reali, della quale si conosce il limite a $+\infty$, lo stesso sarà il limite della successione.

Vediamo la successione $a_n = \sqrt[n]{n}$. Se ricordiamo che $\lim_{x\to 0} x \log x = 0$, abbiamo anche (con la sostituzione $x \to 1/x$)

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} \log x = 0$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log n = 0$$

cioè $\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n} = 0$, quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

L'utilità principale delle successioni risiede nel seguente risultato.

TEOREMA. *Se la successione a è crescente e limitata, allora è convergente.*

▶ Poniamo $l = \sup\{\, a_n : n \in \mathbb{N} \,\}$: l è l'estremo superiore dei valori della funzione a; siccome, per ipotesi, a è limitata, l'estremo superiore esiste. Fissiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$: per definizione di estremo superiore, esiste k tale che $a_k \geq l - \varepsilon$. Ma la successione a è crescente, quindi $l - \varepsilon \leq a_n$ anche per ogni $n > k$ e quindi vale anche $|a_n - l| \leq \varepsilon$, come richiesto. ◀

Ovviamente vale anche l'asserzione analoga per successioni decrescenti: se $n \mapsto a_n$ è decrescente e limitata, allora $n \mapsto -a_n$ è crescente e limitata.

Come si può usare questo risultato? A volte si riesce a dimostrare che un certo limite esiste, senza però poterlo esprimere in termini "espliciti". Se si riesce a trovare una successione che converge a quel limite, potremo dare approssimazioni del valore.

Come esempio, consideriamo la successione così definita:

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$$

e dimostriamo che è crescente e limitata. Per la crescenza basta ovviamente vedere che $a_n \leq a_{n+1}$, per ogni n. Maneggiamo come sempre le disuguaglianze, tenendo conto che per definizione $a_n > 0$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}, \\ 2a_n^2 + 3a_n &\leq 3a_n + 4, \\ a_n^2 &\leq 2. \end{aligned}$$

Dunque, per verificare la disuguaglianza iniziale, ci basta dimostrare l'ultima e lo facciamo per induzione. È evidente che $a_0^2 \leq 2$. Supponiamo che $a_n^2 \leq 2$ e vediamo come si trasforma la disuguaglianza $a_{n+1}^2 \leq 2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}\right)^2 &\leq 2, \\ 9a_n^2 + 24a_n + 16 &\leq 8a_n^2 + 24a_n + 18, \\ a_n^2 &\leq 2. \end{aligned}$$

Ne segue che la tesi è verificata. Dunque la successione a converge; come possiamo calcolare il limite? Facile: se l è questo limite, possiamo partire dall'ovvia uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

e quindi

$$l = \frac{3l + 4}{2l + 3}$$

che dà, facilmente, $l^2 = 2$ e dunque, essendo $l > 0$ perché certamente $l > a_0$, $l = \sqrt{2}$.

Per essere pedanti, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$ andrebbe scritto come $\lim_{n\to+\infty} b_n$ dove si sia definito $b_n = a_{n+1}$. Non ci preoccuperemo più di questi problemini.

Siamo in una situazione in cui il limite può essere espresso in “termini espliciti” e con la successione possiamo ottenere valori approssimati sempre meglio, più grande prendiamo n. Vediamo i primi termini:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{7}{5},$$
$$a_2 = \frac{3 \cdot (7/5) + 4}{2 \cdot (7/5) + 3} = \frac{41}{29}, \quad a_3 = \frac{3 \cdot (41/29) + 4}{2 \cdot (41/29) + 3} = \frac{239}{169}.$$

Se calcoliamo i valori approssimati, abbiamo

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1{,}4 \\ a_2 &\approx 1{,}413793 \\ a_3 &\approx 1{,}414201 \end{aligned}$$

e vediamo che già a_3 è una buona approssimazione di $\sqrt{2}$, con quattro cifre decimali esatte.

Resta da capire come abbiamo ottenuto la successione. Si parte dall’uguaglianza

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \quad \text{o} \quad \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + 1$$

e si avvia un procedimento iterativo: si pone

$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n + 1} + 1 = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}$$

partendo da $c_0 = 1$. Tuttavia ci si accorge che la successione che si ottiene non è crescente:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}, \; c_2 = \frac{3/2 + 2}{3/2 + 1} = \frac{7}{5},$$
$$c_3 = \frac{7/5 + 2}{7/5 + 1} = \frac{17}{12}, \; c_4 = \frac{17/12 + 2}{17/12 + 1} = \frac{41}{29}$$

e viene l’idea di considerare $a_n = c_{2n}$ che dà effettivamente la successione crescente da cui siamo partiti:

$$a_{n+1} = c_{2n+2} = \frac{c_{2n+1} + 2}{c_{2n+1} + 1} = \frac{\dfrac{c_{2n} + 2}{c_{2n} + 1} + 2}{\dfrac{c_{2n} + 2}{c_{2n} + 1} + 1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}.$$

Si provi, con un metodo analogo, a determinare una successione crescente che converge a $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$.

Quello che occorrerebbe è una stima dell’errore che si commette arrestando i calcoli a un certo termine. Se consideriamo la successione con termini $b_n = c_{2n+1}$, si può vedere che è decrescente e che converge a $\sqrt{2}$, con calcoli del tutto analoghi. Allora abbiamo $a_3 \le \sqrt{2} \le b_3$, perciò l’errore sarà inferiore a $b_3 - a_3 = c_7 - c_6$:

$$c_7 - c_6 = \frac{577}{408} - \frac{239}{169} = \frac{1}{68592} < 0{,}000015$$

e quindi siamo sicuri di avere tre cifre decimali esatte, anche senza conoscere in anticipo (con la calcolatrice) un valore approssimato di $\sqrt{2}$. Ai tempi in cui le calcolatrici non esistevano, le tavole numeriche si compilavano con metodi analoghi a questi.

Vediamo un altro esempio per il calcolo di $\log t$, con $t > 1$. Dividiamo l'intervallo $[1 \mathinner{..} t]$ in n parti in progressione geometrica: i punti di suddivisione saranno

$$1 = \sqrt[n]{t^0}, \quad \sqrt[n]{t^1}, \quad \sqrt[n]{t^2}, \quad \dots, \quad \sqrt[n]{t^{n-1}}, \quad \sqrt[n]{t^n} = a.$$

Per semplicità poniamo $r = \sqrt[n]{t}$. L'area che dà il logaritmo sarà maggiore della somma delle aree dei rettangoli inscritti che si ottengono a partire dalla suddivisione; l'area del rettangolo con base l'intervallo $[r^k \mathinner{..} r^{k+1}]$ e altezza $1/r^{k+1}$ è:

$$(r^{k+1} - r^k)\frac{1}{r^{k+1}} = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{t}}.$$

Quindi tutti i rettangoli hanno la stessa area e dunque

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{t}}\right) < \log a.$$

Non occorre fare i conti per verificare che la successione

$$a_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{t}}\right)$$

è crescente. Perché?

Cerchiamo ora di maggiorare $\log a$. Siccome $f(x) = 1/x$ è convessa, possiamo considerare la stessa suddivisione e i trapezi che si ottengono congiungendo uno con il successivo i punti del grafico di $f(x) = 1/x$ corrispondenti a quelle ascisse. L'area del trapezio con altezza corrispondente all'intervallo $[r^k \mathinner{..} r^{k+1}]$ è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^k} + \frac{1}{r^{k+1}}\right)(r^{k+1} - r^k) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{r}\right)(r - 1) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

e quindi anche qui tutti i trapezi hanno la stessa area. La successione

$$b_n = \frac{n}{2}\left(\sqrt[n]{t} - \frac{1}{\sqrt[n]{t}}\right)$$

è decrescente e abbiamo, per ogni $n \geq 1$,

$$a_n < \log t < b_n$$

e quindi $b_n - a_n$ dà una stima dell'errore commesso quando si prenda a_n oppure b_n come valore approssimato di $\log t$:

$$b_n - a_n = \frac{n}{2\sqrt[n]{t}}(\sqrt[n]{t} - 1)^2.$$

Possiamo scrivere una tabella dei valori approssimati quando $t = 2$.

n	a_n	b_n	$b_n - a_n$
1	0,500000000000000	0,750000000000000	0,250000000000000
2	0,585786437626904	0,707106781186547	0,121320343559642
4	0,636414338985141	0,696621399498013	0,060207060512871
8	0,663967654362630	0,694014757842345	0,030047103479715
16	0,678347508822821	0,693364013830721	0,015016505007899
32	0,685694013193595	0,693201385062664	0,007507371869069
64	0,689407155585569	0,693160731447199	0,003753575861630
128	0,691273794094953	0,693150568266857	0,001876774171903
256	0,692209642119647	0,693148027485741	0,000938385366094
512	0,692678199823271	0,693147392291336	0,000469192468065

Non è granché come velocità di convergenza, ma il valore, almeno per le prime due cifre decimali, è esatto: infatti $\log 2 \approx 0{,}693147180559945$. Il metodo non è certamente il migliore possibile, ma come primo tentativo non possiamo lamentarci. Notiamo che ci occorre solo calcolare radici quadrate successive se, come valori di n, prendiamo potenze di 2. È evidente anche geometricamente che i valori b_n sono approssimazioni migliori: b_{512} ha la sesta cifra decimale esatta. In effetti è la stima dell'errore il punto più debole.

Come potremmo calcolare il valore di e, cioè del numero tale che $\log e = 1$?

Napier definì inizialmente i logaritmi considerando un numero molto vicino a 1 che possiamo scrivere come $b = 1 + 1/k$ (con k abbastanza grande). Dato un numero x cercava allora un esponente $g(x)$ tale che

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{g(x)} \approx x$$

e chiamava $l(x) = g(x)/k$ il logaritmo di x. Il suo ragionamento era che

$$x_1 x_2 = b^{g(x_1)} b^{g(x_2)} = b^{g(x_1)+g(x_2)}$$

e dunque $l(xy) = l(x) + l(y)$, almeno approssimativamente. Con una base vicina a 1 le potenze successive non sono troppo lontane l'una dall'altra e si poteva così interpolare ottenendo una discreta precisione. Per essere rigorosi dal punto di vista storico, Napier usava una base leggermente più piccola di 1, che non cambia sostanzialmente le cose.

Aumentando k si dovrebbe ottenere un valore sempre più preciso del logaritmo; ma è davvero così? Chiamiamo $l_k(x)$ il valore che si ottiene usando k; dovremmo avere

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kl_k(x)} = x.$$

Prendiamo il vero logaritmo:

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kl_k(x)} = \log x$$

da cui otteniamo che

$$\frac{\log x}{l_k(x)} = k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

e quindi la nostra asserzione è equivalente a

$$\lim_{k\to+\infty} k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Eseguiamo la sostituzione $k = 1/h$:

$$\lim_{k\to+\infty} k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{h\to 0+} \frac{\log(1+h)}{h} = \log' 1 = 1.$$

L'asserzione è dunque vera! I numeri di Napier sono una buona approssimazione del logaritmo naturale. Ovviamente la definizione moderna è più rigorosa; più avanti daremo quella 'ufficiale' che non richiede il concetto intuitivo di area. Ma lo scopo di Napier era di evitare le moltiplicazioni nei calcoli approssimati e lo raggiunse con successo.

Conseguenza del limite che abbiamo scritto è che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

cioè la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ converge a e. Possiamo usarla per ottenere un'approssimazione di e? Non precisamente: se calcoliamo, con *molta* pazienza, $a_{10\,000}$, otteniamo il valore 2,71814 che ha solo tre cifre decimali esatte. Vedremo più avanti che la successione crescente definita da

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

converge proprio a e.

5.8 LA FORMULA DI TAYLOR

La nostra definizione di derivata è, sostanzialmente, il coefficiente angolare della retta per $(x, f(x))$ che meglio approssima il grafico di f vicino al punto dato. Che succederebbe se volessimo approssimare il grafico con una parabola? Ci servirebbe determinare due coefficienti a e b in modo che

$$f(x+h) = f(x) + ah + bh^2 + h^2\psi(h)$$

dove $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$, in analogia a quanto fatto per la tangente. Vediamo un po', usando il teorema di l'Hôpital senza preoccuparci dei dettagli che sistemeremo in seguito:

$$\lim_{h\to 0} \psi(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah - bh^2}{h^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - a - 2bh}{2h}$$

e, affinché il limite sia nella forma indeterminata $[\![0/0]\!]$, dobbiamo avere $a = f'(x)$, e dunque possiamo procedere:

$$\lim_{h\to 0} \psi(h) \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - 2bh}{2h} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - 2b}{2}$$

e l'ultimo limite è 0 quando $b = f''(x)/2$.

Ora occupiamoci del rigore: stiamo evidentemente supponendo che non solo f sia derivabile due volte in un intorno di x, ma anche che la derivata seconda sia continua. In effetti, come abbiamo definito la funzione derivata, possiamo anche definire la funzione derivata seconda e così via. Diremo che f è *derivabile n volte con continuità* in un intorno di x se la funzione derivata n-esima esiste in un intorno di x ed è continua in x. Siccome ogni funzione derivabile è continua, avremo in particolare che, in un intorno di x, le funzioni derivate fino a quella di ordine $n-1$ sono continue.

Per avere una notazione uniforme, la derivata n-esima in x di f si denota con $f^{(n)}(x)$, così che $f'(x) = f^{(1)}(x)$ e $f''(x) = f^{(2)}(x)$. Poniamo anche, per estensione, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

TEOREMA DI TAYLOR. *Se la funzione f è derivabile n volte con continuità in x, allora esiste un intorno U di 0 tale che, se $h \in U$,*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \varphi_n(h)h^n$$

dove $\lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = 0$.

▶ La tesi è vera per $n = 1$. Supponiamo di averla dimostrata per $n-1$. Per brevità, poniamo $a_k = f^{(k)}(x)/k!$ e cerchiamo di vedere che $a_n = f^{(n)}/n!$ è proprio il coefficiente giusto in modo che

$$f(x+h) = f(x) + a_1h + \dots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n + h^n\varphi_n(h)$$

e $\lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = 0$. Possiamo applicare il teorema di l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \varphi_n(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n)}{h^n} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - (a_1 + 2a_2h + \dots + (n-1)a_{n-1}h^{n-2} + na_nh^{n-1})}{nh^{n-1}}.\end{aligned}$$

Ma la funzione $g = f'$ soddisfa l'ipotesi del teorema per $n-1$, quindi per essa possiamo dare per valida la tesi:

$$g(x+h) = g(x) + h\frac{g'(x)}{1!} + h^2\frac{g''(x)}{2!} + \dots + h^{n-1}\frac{g^{n-1}(x)}{(n-1)!} + h^{n-1}\psi(h)$$

con $\lim_{h\to 0}\psi(h) = 0$. Ma allora

$$\frac{g^{(k-1)}(x)}{(k-1)!} = \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} = k\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = ka_k$$

e quindi

$$f'(x+h) - (a_1 + 2a_2h + \dots + (n-1)a_{n-1}h^{n-2} + na_nh^{n-1}) = h^{n-1}\psi(h).$$

Perciò, tornando al limite di partenza,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\varphi_n(h) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - (f(x) + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n)}{h^n} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - (a_1 + 2a_2h + \dots + (n-1)a_{n-1}h^{n-2} + na_nh^{n-1})}{nh^{n-1}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^{n-1}\psi(h)}{nh^{n-1}} = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)}{n} = 0\end{aligned}$$

esattamente come richiesto. ◀

Vediamo una possibile applicazione di questo teorema. Vogliamo calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$$

senza usare il teorema di l'Hôpital. Scriviamo lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ con $n = 3$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(0+x) \\ &= \sin 0 + x\frac{\sin' 0}{1!} + x^2\frac{\sin'' 0}{2!} + x^3\frac{\sin''' 0}{3!} + x^3\varphi_3(x) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varphi_3(x)\end{aligned}$$

e dunque il nostro limite è

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x + x^3/6 - x^3\varphi_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{6} - \varphi_3(x) = \frac{1}{6}.$$

Con il teorema di l'Hôpital avremmo dovuto operare due volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Molto spesso il teorema di Taylor evita l'applicazione ripetuta del teorema di l'Hôpital; per meglio dire, è una conseguenza del teorema di l'Hôpital e ne semplifica l'applicazione.

La funzione che ha lo sviluppo di Taylor più semplice, a parte i polinomi, è l'esponenziale:

$$\begin{aligned}\exp x &= \exp 0 + x\frac{\exp' 0}{1!} + x^2\frac{\exp'' 0}{2!} + \dots + x^n\frac{\exp^{(n)} 0}{n!} + x^n\varphi_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varphi_n(x).\end{aligned}$$

(Notiamo che qui c'è x dove prima abbiamo usato h, ovviamente non cambia nulla.)

Ci interessa, almeno in qualche caso particolare, studiare il comportamento di $\varphi_n(x)$.

TEOREMA DI TAYLOR-LAGRANGE. *Supponiamo che la funzione f sia derivabile $n+1$ volte con continuità in un intervallo I. Allora, se $x, x+h \in I$, si ha*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

per un opportuno c tra x e $x+h$.

▶ Poniamo

$$p(h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

Allora $p(0) = f(x)$ e, se deriviamo (rispetto a h), scopriamo che $p'(0) = f'(x)$, $p''(0) = f''(x)$, e così via. Se poniamo

$$g(h) = f(x+h) - p(h),$$

per la funzione g vale

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$$

e ognuna delle funzioni g, g', g'', …, $g^{(n)}$ è una funzione di Lagrange.

Lo stesso possiamo dire della funzione $G(h) = h^{n+1}$:

$$G(0) = G'(0) = G''(0) = \dots = G^{(n)}(0) = 0$$

e, inoltre, queste funzioni si annullano solo in 0. Perciò possiamo applicare il teorema di Cauchy:

$$\frac{g(h)}{G(h)} = \frac{g(h) - g(0)}{G(h) - G(0)} = \frac{g'(h_1)}{G(h_1)}$$

per un opportuno h_1 tra 0 e h. Ma possiamo andare avanti:

$$\frac{g'(h_1)}{G(h_1)} = \frac{g'(h_1) - g'(0)}{G(h_1) - G'(0)} = \frac{g''(h_2)}{G(h_2)}$$

per un opportuno h_2 tra 0 e h_1 e così via, fino a

$$\frac{g^{(n)}(h_n)}{G^{(n)}(h_n)} = \frac{g^{(n)}(h_n) - g^{(n)}(0)}{G^{(n)}(h_n) - G^{(n)}(0)} = \frac{g^{(n+1)}(h_{n+1})}{G^{(n+1)}(h_{n+1})}$$

per un opportuno h_{n+1} tra 0 e h_n. Ora $G^{(n)}(h_{n+1}) = (n+1)!$, mentre $g^{(n+1)}(h_{n+1}) = f^{(n+1)}(x + h_{n+1})$, dunque, per $c = x + h_{n+1}$ abbiamo proprio

$$f(x+h) = p(h) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$ ◀

In certi casi questo teorema ci dà informazioni molto utili sulla funzione f; per esempio, per l'esponenziale abbiamo

$$\exp^{(n+1)} c = \exp c < 3^c$$

e dunque, prendendo $x = 0$ e $h = 1$,

$$e = \exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\exp c}{(n+1)!},$$

con $0 < c < 1$, da cui otteniamo che

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{\exp c}{(n+1)!} < \frac{3^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dunque l'errore che si commette prendendo come valore approssimato di e l'espressione tra parentesi è minore di $3/(n+1)!$. Per $n = 7$ si ha $3/8! \approx 0{,}0000744$ e dunque l'espressione dà il valore di e con tre cifre decimali esatte:

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{7!} \approx 2{,}71825$$

mentre $e \approx 2{,}71828$. Le cifre esatte sono, in realtà, quattro.

Con questa rappresentazione possiamo anche dimostrare che e è irrazionale. Supponiamo infatti, per assurdo, che $e = a/b$, con a e b interi. Prendiamo $n > b$: allora

$$0 < \left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\right)n! = \frac{\exp c}{(n+1)!}n! = \frac{\exp c}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

Ma l'espressione iniziale è per ipotesi un numero intero, mentre $3/(n+1) < 1$ se $n+1 > 3$: contraddizione. Dimostrare che e è trascendente, cioè non è radice di alcun polinomio a coefficienti interi è molto più complicato.

Non sempre lo sviluppo di Taylor dà buoni risultati: due funzioni diverse possono avere, a meno del resto, lo stesso sviluppo di Taylor, cioè le stesse derivate in un punto.

Un esempio che può illustrare bene questo fenomeno è di una funzione che ha tutte le derivate in un certo punto nulle, ma non è la funzione nulla. Partiamo un po' da distante e consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

dove P e Q sono polinomi (non nulli). La funzione f è definita in un intorno di 0, escluso 0, e ci proponiamo di calcolare

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{P(1/t)}{Q(1/t)} \exp(-t^2).$$

Facciamo l'esempio di $P(x) = 3 + x + x^2$, $Q(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$; allora

$$\frac{P(1/t)}{Q(1/t)} = \frac{3 + \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}}{1 + \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^3}} = \frac{t^3}{t^2} \frac{3t^2 + t + 1}{t^3 + 2t^2 - t + 1}$$

e ne ricaviamo che

$$\frac{P(1/t)}{Q(1/t)} = \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}$$

dove P_1 e Q_1 sono polinomi. Più in generale, se il grado di P è m e quello di Q è n, la stessa procedura ci darà

$$\frac{P(1/t)}{Q(1/t)} = \frac{t^n}{t^m} \frac{P_0(t)}{Q_0(t)} = \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}$$

e abbiamo ottenuto quello che volevamo. Il nostro limite, allora, se P_1 ha grado maggiore di 0, diventa della forma $[\![\infty/\infty]\!]$ e quindi

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{P_1(t)}{Q_1(t)\exp(t^2)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{P_1'(t)}{(Q_1'(t) + 2tQ_1(t))\exp(t^2)}.$$

Il numeratore ha grado minore del grado di P_1, il denominatore è $\exp(t^2)$ moltiplicato per un polinomio che ha grado *maggiore* di Q_1. Applicando ancora il teorema di l'Hôpital, possiamo via via diminuire il grado del numeratore fino ad arrivare a 0: a quel punto il limite è, evidentemente, 0. Non ci sarebbe bisogno di nulla di ciò se il grado di P_1 fosse 0.

In modo del tutto analogo possiamo procedere con il limite da sinistra e perciò abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x\to0} \frac{P(x)}{Q(x)} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

quando P e Q sono polinomi non nulli.

Consideriamo allora la funzione così definita:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \exp(-1/x^2) & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

La funzione è continua per quanto appena visto, basta prendere $P = Q = 1$. Possiamo calcolare la derivata $F(x)$ per $x \neq 0$:

$$F'(x) = \frac{2}{x^3}\exp(-1/x^2)$$

e lo stesso conto precedente dice che

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} F'(x) = 0.$$

Dunque abbiamo che la derivata di F esiste in 0 e che F' è continua. Vediamo la derivata seconda, sempre per $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{-6}{x^4}\exp(-1/x^2) + \frac{2}{x^3}\frac{2}{x^3}\exp(-1/x^2) \\ &= \frac{-6x^2+4}{x^6}\exp(-1/x^2) \end{aligned}$$

e quindi $F''(0) = \lim_{x\to 0} F''(x) = 0$, ancora per il limite precedente. Non è difficile dimostrare per induzione che ogni derivata successiva ha, per $x \neq 0$, la forma del limite di prima e quindi le derivate di F in 0 si annullano tutte: se la derivata n-esima è

$$F^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\exp(-1/x^2),$$

allora

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\exp(-1/x^2) + \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{2}{x^3}\exp(-1/x^2) \\ &= \frac{P_0(x)}{Q_0(x)}\exp(-1/x^2) \end{aligned}$$

per opportuni polinomi P_0 e Q_0; la dimostrazione è completa.

In definitiva la funzione non nulla F ha tutte le derivate ovunque e $F^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.

C'è un'altra importante applicazione della formula di Taylor che riguarda i massimi e i minimi. Talvolta è complicato studiare quando la derivata è positiva o negativa, mentre può essere più comodo calcolare la derivata seconda, ammesso che la funzione sia derivabile due volte con continuità. È chiaro dalla discussione su concavità e convessità che se f (derivabile due volte con continuità) ha in x un punto di massimo interno al dominio, allora deve essere concava in un intorno di x; sarà convessa in un intorno di ciascun punto di minimo interno al dominio. Perciò, nel caso in cui sappiamo che $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$ (sempre supponendo che f sia derivabile due volte con continuità), possiamo affermare che x è un punto di minimo.

Può però accadere che $f'(x) = f''(x) = 0$ e il metodo precedente non permette di concludere; l'esempio usuale è $f(x) = x^4$. È ovvio che 0 è un punto di minimo, ma $f'(0) = f''(0) = 0$. Qui, certamente, lo studio della derivata è facile: $f'(x) = 4x^3$, quindi f è decrescente in $(\leftarrow .. 0]$ e crescente in $[0 .. \rightarrow)$.

CRITERIO PER MASSIMI E MINIMI. *Supponiamo che la funzione f sia derivabile n volte con continuità in x e che*

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0, \quad f^{(n)}(x) \neq 0.$$

Se n è dispari, f ha un flesso in x; se n è pari, x è un punto di massimo se $f^{(n)}(x) < 0$ e un punto di minimo se $f^{(n)}(x) > 0$.

▶ Possiamo scrivere, per h in un opportuno intorno U di zero,

$$f(x+h) - f(x) = \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \varphi_n(h)\right)h^n$$

e, siccome $\lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = 0$, esiste un intorno V di zero tale che, per $h \in V$, si abbia

$$|\varphi_n(h)| < \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|.$$

Nel caso di n pari abbiamo dunque che, per $h \in V$, $f(x+h) - f(x)$ è concorde con $f^{(n)}(x)$, quindi maggiore di zero oppure minore di zero e dunque x è rispettivamente un punto di minimo o un punto di massimo.

Nel caso di n dispari, avremo che $f(x+h)$ assume segno opposto per $h < 0$ e per $h > 0$. ◀

Un esempio semplice è quello di $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x + 1$; si ha $f'(x) = 4x^3 - 28x + 24$ che si annulla in -3, 1 e 2. Si può studiare il segno della derivata, ma possiamo anche calcolare $f''(x) = 4(3x^2 - 7)$ e quindi

$$f''(-3) = 4(27-7) > 0, \quad f''(1) = 4(3-7) < 0, \quad f''(2) = 4(12-7) > 0.$$

Perciò -3 è un punto di minimo, 1 un punto di massimo e 2 un punto di minimo.

Il criterio è forse più utile quando non si possono determinare in modo 'esatto' i punti dove si annulla la derivata. Consideriamo, per esempio, $f(x) = e^x + x^2$. La derivata $f'(x) = e^x + 2x$ si annulla in un punto r dove $e^r = -2r$. La derivata seconda è $f''(x) = e^x + 2 > 0$, quindi r è certamente un punto di minimo.

5.9 CALCOLO DI LIMITI CON GLI SVILUPPI DI TAYLOR

Abbiamo già visto qualche esempio di calcolo di limiti; la tecnica è spesso presentata in un modo leggermente diverso, con una notazione un po' strana, ma molto maneggevole.

Tratteremo qui solo limiti a 0; gli altri casi si gestiscono con una semplice sostituzione: $z = x - c$ per i limiti a c, $z = 1/x$ per i limiti a infinito.

Il teorema di Taylor ci dice che, data una funzione f derivabile n volte con continuità in 0, si può scrivere

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \varphi_n(x)x^n$$

ed è comune indicare il termine $\varphi_n(x)x^n$ con $o(x^n)$. Più precisamente, con $o(x^n)$ si intende *una funzione di x con la proprietà che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Si faccia molta attenzione al fatto che $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$: non si possono semplificare gli "o piccoli". Prendendo a prestito un termine della programmazione, si tratta di una "variabile senza nome": della funzione sappiamo che esiste e che ha una certa proprietà. Possiamo scrivere alcune relazioni utili:

1. $o(x^m)x^n = o(x^{m+n})$,
2. se $m \ge n$, $o(x^m)/x^n = o(x^{m-n})$,
3. se $m \le n$, allora $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

La definizione di $o(x^n)$ è più complicata, ma quando usata negli sviluppi di Taylor è equivalente a quella data.

Supponiamo di dover calcolare un limite alquanto complicato come

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$$

che per prima cosa trasformiamo con la sostituzione $x = t + 1$ in

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{2t^2+4t+1}-\sqrt{t+1}}{t}$$

Possiamo provare con lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\sqrt[3]{1+4t+2t^2} = 1+\frac{1}{3}(4t+2t^2)+o(t)$$

Perché $o(t)$ e non $o(4t + 2t^2)$? Perché $o(2t) = o(t)$ e $o(2 + t) = o(1) = o(t^0)$. Similmente

$$\sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t+o(t)$$

e quindi il limite può essere scritto come

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}(4t+2t^2)+o(t)-(1+\frac{1}{2}t+o(t))}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{5}{6}t+\frac{2}{3}t^2+o(t)}{t} = \frac{5}{6}.$$

Per la verità non è necessario tutto questo macchinario, perché la funzione $f(x) = \sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}$ soddisfa $f(1) = 0$ e quindi il limite da calcolare è $f'(1)$; siccome

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e quindi

$$f'(1) = \frac{4}{3}-\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ma l'idea era proprio di verificare che si giunge alla stessa conclusione.

La tecnica è benvenuta in situazioni più complicate, in cui il calcolo di derivate successive è complicato. Consideriamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x\arctan x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}$$

e calcoliamo, con pazienza, gli sviluppi di Taylor. Il denominatore sembra più semplice e infatti

$$\sqrt{1+2x^4} = 1+\frac{2x^4}{2}+o(x^4)-1 = x^4+o(x^4)$$

che dice di calcolare sviluppi fino al quarto ordine anche nel numeratore. Abbiamo

$$\begin{aligned}\log(1+x\arctan x) &= x\arctan x-\frac{1}{2}(x\arctan x)^2+o((x\arctan x)^2)\\ &= x\Big(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\Big)-\frac{x^2}{2}(x+o(x^2))^2+o(x^4)\\ &= x^2-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

e, per finire,

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$$

che ci dà il limite nella forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{4}{3}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}{1+\dfrac{o(x^4)}{x^4}} = -\frac{4}{3}.$$

Il passaggio intermedio può certamente essere omesso. Un ultimo esempio:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2\log(1+\sin\frac{1}{x})\right) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{t-\log(1+\sin t)}{t^2}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{t-\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t + o(\sin^3 t)}{t^2}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{t-t+\frac{1}{2}t^2+o(t^3)}{t^2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

5.10 CURVATURA

L'idea di approssimare una curva con la tangente può essere generalizzata in modo diverso rispetto a quanto abbiamo fatto con lo sviluppo di Taylor; ci interessa, per esempio, dare una misura di quanto un grafico "sia curvo" in un punto. Come la retta può essere presa per l'approssimazione, la circonferenza può essere presa come indicatrice della curvatura; più precisamente una semicirconferenza, che quindi è il grafico di una funzione y. Ci domandiamo che proprietà deve avere y per rappresentare la semicirconferenza che meglio approssima una funzione vicino a un suo punto. Se la funzione è f, definita in un intorno del punto c che ci interessa, dovremo evidentemente avere

$$y(c) = f(c), \qquad y'(c) = f'(c),$$

cioè la curva e la semicirconferenza devono avere in comune la tangente. L'idea, tenendo conto degli sviluppi di Taylor, si suggerisce da sola: una circonferenza è determinata da tre dati e ne abbiamo già due. Come terzo imporremo che

$$y''(c) = f''(c)$$

naturalmente supponendo che f abbia la derivata seconda in c. Non c'è bisogno di scrivere esplicitamente la funzione y, anche se saremmo in grado di farlo. Ricordiamo invece che dovrà soddisfare l'equazione

$$x^2 + y(x)^2 - 2ax - 2by(x) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

dove (a,b) è il centro e r il raggio; a, b e r sono le nostre incognite.

Trattiamo prima un caso speciale: trovare il *cerchio osculatore* (cioè la circonferenza che meglio approssima la curva) alla funzione F nel punto di ascissa 0, e supponiamo anche che $F(0) = 0$. La nostra funzione y dovrà allora soddisfare

$$X^2 + y(X)^2 - 2aX - 2by(X) = 0$$

e capiremo fra poco perché usiamo X come variabile. Possiamo derivare rispetto a X la relazione, ottenendo

$$2X + 2y(X)y'(X) - 2a - 2by'(X) = 0$$

e derivare un'altra volta, dopo aver diviso per 2:

$$1 + y'(X)^2 + y(X)y''(X) - by''(X) = 0.$$

Possiamo allora sostituire $X = 0$ in entrambe le relazioni ottenute, ricordando che vogliamo

$$y(0) = F(0) = 0, \qquad y'(0) = F'(0) = m, \qquad y''(0) = F''(0) = n.$$

Abbiamo quindi le due condizioni

$$\begin{cases} a + bm = 0 \\ 1 + m^2 - bn = 0 \end{cases}$$

che danno, evidentemente,

$$\begin{cases} a = -\dfrac{m(1+m^2)}{n} \\ b = \dfrac{1+m^2}{n} \end{cases}$$

purché, ovviamente, $n \neq 0$. In questo caso, il raggio r si ottiene come distanza del centro da un punto della circonferenza, cioè $(0,0)$:

$$r^2 = \frac{(1+m^2)^3}{n^2}.$$

La quantità

$$\chi = \frac{n}{\sqrt{(1+m^2)^3}}$$

si chiama *curvatura*. Nel caso di $n = 0$, la curvatura è nulla; altrimenti il modulo del reciproco della curvatura è il *raggio di curvatura*.

Come facciamo a passare al caso generale? Con una traslazione! Se la nostra funzione è f e il punto che ci interessa è c, possiamo considerare la funzione

$$F(x) = f(x+c) - f(c)$$

e vediamo subito che $F(0) = 0$, $F'(0) = f'(c)$ e $F''(0) = f''(c)$. Dunque il centro di curvatura ha coordinate

$$\left(c - \frac{f'(c)(1+f'(c)^2)}{f''(c)}, f(c) + \frac{1+f'(c)^2}{f''(c)}\right)$$

e la curvatura è

$$\chi_f(c) = \frac{f''(c)}{(1+f'(c)^2)^{3/2}}.$$

Il luogo dei centri di curvatura di una curva data si chiama la sua *evoluta*.

Vediamone un paio di esempi. Il primo è l'evoluta della parabola di equazione $y = x^2$, che possiamo pensare come il grafico di $f(x) = x^2$. Allora i centri di curvatura hanno coordinate

$$\begin{aligned} x &= c - \frac{f'(c)(1+f'(c)^2)}{f''(c)} = c - \frac{2c(1+4c^2)}{2}, \\ y &= f(c) + \frac{1+f'(c)^2}{f''(c)} = c^2 + \frac{(1+4c^2)}{2}. \end{aligned}$$

Dalla seconda otteniamo

$$2y = 1 + 6c^2$$

quindi $c^2 = (2y-1)/6$. La prima equazione diventa

$$x = -4c^3$$

da cui $c = -\sqrt[3]{x/4}$ e, sostituendo nell'altra,

$$6\sqrt[3]{\frac{x^2}{16}} = 2y - 1$$

che può essere studiata come il grafico di una funzione.

In un punto di flesso (dove la derivata seconda si annulla), la curvatura è 0, come del resto ci si attende. Tuttavia la curvatura può essere nulla anche in punti che non sono flessi: per $f(x) = x^4$, abbiamo $\chi_f(0) = 0$, ma evidentemente questo è un punto di minimo.

INTEGRALI

6.1 CALCOLO DELLE AREE

Il problema di calcolare le aree di figure delimitate da linee curve è molto antico: la locuzione “quadratura del cerchio” si riferisce a un problema che i geometri greci cominciarono a studiare venticinque secoli fa. Archimede (*Ἀρχιμήδης*, 287 aC–212 aC) diede una soluzione del problema dell’area dimostrando che il rapporto tra l’area del cerchio e il quadrato del raggio è uguale al rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il diametro. Continuava però a sfuggire la quadratura con riga e compasso: costruire con riga e compasso un quadrato avente area uguale a quella di un cerchio dato o, come segue dal risultato di Archimede, costruire con riga e compasso un segmento lungo quanto una circonferenza data.

Questo problema non ha soluzione, ma si dovette aspettare fino al 1882 per stabilirlo: Ferdinand von Lindemann (1852–1939) dimostrò che π non è radice di alcun polinomio a coefficienti interi; nel 1837 Pierre Wantzel (1814–1848) aveva dimostrato che affinché la quadratura del cerchio sia possibile è necessario che π sia radice di un polinomio a coefficienti interi. Wantzel aveva dimostrato ben di più, in realtà, trovando un metodo per decidere se una certa costruzione con riga e compasso è possibile. Non che sia rilevante la costruibilità con riga e compasso; fin dagli studi di Réné Descartes (1596–1650) la matematica aveva cominciato a svincolarsi da questa limitazione e non va dimenticato che anche gli antichi greci studiavano curve che non potevano essere tracciate, neppure per punti, con riga e compasso.

Archimede fu il primo a dare una quadratura di un’area delimitata da una sezione conica, quella del settore parabolico. Si prenda una corda di una parabola: questa delimita un’area finita che Archimede calcolò come due terzi del rettangolo che ha come base la corda e altezza uguale al massimo dei segmenti perpendicolari alla corda da essa all’arco di parabola. Dimostrò anche che l’area di un’ellisse di semiassi a e b è πab. Il metodo usato da Archimede per questi calcoli fu detto di *esaustione*, cioè esaurimento: si inseriscono nell’area rettangoli o triangoli opportunamente scelti in modo che, diminuendo via via l’area di ciascun rettangolo o triangolo ci si possa discostare dall’area vera meno di qualsiasi tolleranza prefissata. Non occorre conoscere già l’area perché si possono anche costruire rettangoli o triangoli che coprono l’area stessa sbordando, ma in modo che la differenza tra le aree esterne e quelle interne sia più piccola di qualsiasi tolleranza prefissata. Abbiamo già usato un metodo simile quando abbiamo calcolato un valore approssimato di $\log 2$. Archimede si servì di questo metodo per calcolare innumerevoli aree e anche volumi, generalizzandolo alle tre dimensioni. Il metodo, per la verità, era stato inventato da Eudosso (*Ὁ Εὔδοξος ὁ Κνίδος*, 408 aC–355 aC), ma fu Archimede a portarlo ai massimi livelli.

Vediamo come fece Archimede a calcolare l’area del settore parabolico. Chiamati A e B i vertici della corda, cercò di inscrivere nel settore il massimo triangolo che abbia vertici in A e B e il terzo vertice sull’arco AB di parabola; chiamiamo C_0 questo vertice. Archimede scoprì che proiettando sulla direttrice i tre punti in A', B' e C_0', C_0' è il punto medio di $A'B'$. Si accorse poi che i massimi triangoli inscritti nei due settori parabolici che avanzano hanno la stessa area; la costruzione si può ripetere indefinitamente ottenendo approssimazioni sempre più precise dell’area del settore parabolico. Accompagnò poi con la costruzione di corrispondenti aree ‘esterne’ e poté dimostrare rigorosamente la sua formula.

Noi abbiamo a disposizione la geometria analitica e possiamo fare a meno delle difficili dimostrazioni geometriche di Archimede. Consideriamo dunque la parabola di equazione $y = ax^2$ con $a > 0$ e consideriamo il settore parabolico delimitato dalla corda avente vertici in $A(p, ap^2)$ e $B(q, aq^2)$ $(p < q)$.

Dobbiamo trovare per prima cosa il massimo triangolo inscritto. Questo avrà vertice $C(x, ax^2)$ per $0 < x < q$. Sappiamo calcolare l'area di un triangolo date le coordinate dei vertici:

$$\operatorname{Area}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & p & ap^2 \\ 1 & x & ax^2 \\ 1 & q & aq^2 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}a(q-p)(x-p)(q-x)$$

Se consideriamo la funzione $f(x) = (x-p)(q-x)$, definita in $[p \mathinner{..} q]$, l'area sarà massima quando questa funzione assume il valore massimo. Il problema è banale (il grafico di f è un arco di parabola), ma visto che abbiamo a disposizione il calcolo lo usiamo: la derivata è $f'(x) = q - x - (x - p) = p + q - 2x$ che è positiva per $p \le x < (p+q)/2$ e negativa per $(p+q)/2 < x \le q$. Dunque il punto di massimo è $(p+q)/2$: esattamente come dimostrato da Archimede.

Il punto C_0 ha dunque ascissa $(p+q)/2$ e l'area del triangolo ABC_0 è

$$\frac{1}{2}a(q-p)f\left(\frac{p+q}{2}\right) = \frac{a}{8}(q-p)^3.$$

e vediamo che quest'area dipende solo dalla differenza delle ascisse di A e di B. Procediamo dunque come Archimede valutando i settori rimanenti.

Poniamo $d = q - p$. I due settori parabolici che rimangono corrispondono a proiezioni sulla direttrice (o sull'asse delle ascisse, che è lo stesso) metà della precedente proiezione; quindi le aree dei due triangoli massimi saranno

$$\frac{a}{8}\frac{d^3}{2^3}.$$

Ci avanzeranno quattro settori parabolici in cui i triangoli massimi hanno la stessa area e corrispondono a proiezioni lunghe $d/4$, quindi hanno ciascuno area

$$\frac{a}{8}\frac{d^3}{(2^2)^3}.$$

L'area coperta fino a questo punto è, a parte il fattore moltiplicativo $ad^3/8$ che non scriviamo,

$$2^0\frac{1}{(2^0)^3} + 2^1\frac{1}{(2^1)^3} + 2^2\frac{1}{(2^2)^3}.$$

Procediamo allo stesso modo con 2^3 settori, 2^4 settori e così via fino a 2^n settori, ottenendo

$$a_n = \frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \dots \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}}$$

Siccome $\lim_{n\to+\infty} 4^{n+1} = +\infty$, è evidente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{3}.$$

Occorrerebbe costruire i poligoni circoscritti che completano il metodo di esaustione, ma sembra intuitivamente chiaro che l'area del settore parabolico è

$$\frac{ad^3}{8}\frac{4}{3} = \frac{ad^3}{6}.$$

Non ci resta che calcolare la base del settore e l'altezza per ritrovare la formula di Archimede. La base è AB, la cui lunghezza è

$$b = \sqrt{(q-p)^2 + (aq^2 - ap^2)^2} = d\sqrt{1 + a^2(p+q)^2}$$

mentre l'altezza è evidentemente

$$h = \frac{2\,\mathrm{Area}(ABC_0)}{b} = 2\frac{a}{8}\frac{d^3}{b} = \frac{ad^3}{4b}$$

e si ha

$$\frac{2}{3}bh = \frac{2}{3}b\frac{ad^3}{4b} = \frac{ad^3}{6},$$

come dimostrato da Archimede. Il metodo usato, a parte dettagli, rispecchia proprio quello di Archimede.

Con un'esaustione complicata basata sui poligoni regolari inscritti e circoscritti, Archimede dimostrò la sua 'quadratura' del cerchio e riuscì anche a dare un valore approssimato piuttosto buono di π, cioè $22/7$.

Il problema fondamentale del metodo di esaustione è che richiede una soluzione 'furba' per ogni problema: qualche volta triangoli, qualche volta poligoni regolari, qualche volta rettangoli. Nel diciassettesimo secolo, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) e i suoi allievi e collaboratori, fra cui Evangelista Torricelli (1608–1647) che era stato anche allievo di Galileo Galilei (1564–1642), idearono il cosiddetto *metodo degli indivisibili* che dava risultati coincidenti con quelli classici evitando le costruzioni complicate. Pare, da recenti ritrovamenti, che lo stesso Archimede adoperasse un metodo simile per valutare le aree e i volumi che poi giustificava rigorosamente con l'esaustione.

Qual era l'obiezione principale al metodo degli indivisibili? Che non aveva alcuna base teorica. Tuttavia non ce l'avevano nemmeno le derivate di Fermat e scarsamente fondato era anche il calcolo di Isaac Newton (1642/1643–1727) e Leibniz. Finché con il metodo di Cavalieri si ritrovavano risultati classici il problema non si poneva; ma era ammissibile usarlo per dimostrare nuove cose?

Fermat si interessò al problema cercando un metodo diverso. Consideriamo la parabola generalizzata di equazione $y = ax^k$ con k intero; vogliamo trovare l'area compresa tra il segmento di estremi $(0,0)$ e $(q,0)$, quello di estremi $(q,0)$ e (q,q^k), dove $q > 0$, e l'arco corrispondente della curva. Fissiamo un numero E con $0 < E < 1$ e, per il momento, i punti sull'asse delle ascisse $r_0 = q$, $r_1 = qE$, $r_2 = qE^2$, …, $r_n = qE^n$. Costruiamo i rettangoli 'esterni' di vertici (in senso antiorario)

$$(r_j, 0),\ (r_j, ar_j^k),\ (r_{j+1}, ar_j^k),\ (r_{j+1}, 0)$$

(per $j = 0, 1, \dots, n-1$). L'area del j-esimo rettangolo è

$$\begin{aligned}(r_{j+1} - r_j)ar_j^k &= (qE^j - qE^{j+1})aq^kE^{kj}\\ &= aq^{k+1}(1-E)E^jE^{kj}\\ &= aq^{k+1}(1-E)E^{(k+1)j}\end{aligned}$$

e dunque possiamo scrivere la somma delle aree come

$$a(E)_n = \frac{aq^k}{E}(E-1)(1 + F + F^2 + \dots + F^{n-1})$$

dove $F = E^{k+1}$. Il trucco di Fermat è di far diventare n grande, in modo che

$$1 + F + F^2 + \dots + F^n + \dots = \frac{1}{1-F}$$

e quindi di poter considerare l'approssimazione con 'infiniti' rettangoli esterni come

$$a(E) = aq^{k+1}\frac{1-E}{1-E^{k+1}} = \frac{aq^{k+1}}{1+E+E^2+\dots+E^k}$$

Facendo avvicinare E a 1, i rettangoli si stringono sempre di più approssimando sempre meglio l'area e perciò Fermat concludeva che l'area cercata è

$$S(q) = \frac{aq^{k+1}}{k+1}.$$

Se adesso vogliamo l'area del settore 'parabolico' compreso tra i punti di ascissa p e q, con $0 < p < q$, basta una differenza: il trapezio ha area $(q-p)(aq^k + ap^k)/2$, l'area che dobbiamo trascurare è $S(q) - S(p)$ e quindi si ottiene

$$A_k(p,q) = (q-p)\frac{aq^k + ap^k}{2} - \frac{aq^{k+1} - ap^{k+1}}{k+1}.$$

Nel caso di k pari si può usare questa formula anche per valori negativi di p e q, purché sia sempre $p < q$. Ne caso di $k = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
A_2(p,q) &= (q-p)\frac{aq^2 + ap^2}{2} - \frac{aq^3 - ap^3}{3} \\
&= \frac{a(q-p)}{6}(3q^2 + 3p^2 - 2q^2 - 2pq - 2p^2) \\
&= \frac{a(q-p)^3}{6}
\end{aligned}$$

esattamente come nella quadratura archimedea.

Nel caso di $k = 4$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{a(q-p)}{4}(q^4 - pq^3 - p^2q^2 - p^3q + p^4) \\
&= \frac{a(q-p)}{4}((q-p)^4 + 3pq(q-p)^2 - p^2q^2)
\end{aligned}$$

che non sembra così promettente e non indagheremo oltre in cerca di qualche interpretazione geometrica.

Tuttavia una cosa dovrebbe balzare subito agli occhi: se poniamo $p = 0$ e $q = x$, otteniamo una funzione

$$S(x) = \frac{ax^{k+1}}{k+1}$$

la cui derivata è $S'(x) = ax^k$, cioè proprio la funzione da cui siamo partiti!

Il ragionamento di Fermat non è facilmente giustificabile: abbiamo diviso l'intervallo $[0\,..\,q]$ in infinite parti e "sommato infinite aree". Tuttavia la nostra definizione di $\log t$, l'area delimitata dal grafico di $f(x) = 1/x$, dall'asse delle ascisse, dalla retta verticale passante per $(1,0)$ e dalla retta verticale passante per $(t,0)$, porta a una funzione $x \mapsto \log x$ la cui derivata è proprio la funzione che ci è servita per dare la definizione.

La somiglianza tra la funzione rispetto alla quale si vogliono calcolare aree e l'area stessa non sfuggì ai creatori del calcolo, Leibniz e Newton; quest'ultimo aveva appreso della faccenda da Isaac Barrow (1630–1677) di cui fu allievo e che sostituì sulla cattedra a Cambridge.

6.2 INTEGRAZIONE

L'idea di Fermat si rivelò molto fruttuosa. Occorse parecchio tempo perché la tecnica fosse sistemata in modo rigoroso da Bernhard Riemann (1826–1866). All'inizio del ventesimo secolo ci fu poi una svolta molto importante nell'argomento, ma non ce ne occuperemo, perché la moderna integrazione introdotta da Henri Lebesgue (1875–1941) coincide con quella di Riemann per le funzioni continue in un intervallo $[p \mathrel{..} q]$.

Non si fa granché di diverso da come abbiamo fatto per il logaritmo e da come ragionava Fermat, solo che la teoria è stata resa inappuntabile dal punto di vista logico.

Quello che cerchiamo è un modo di associare un numero a una funzione definita su un intervallo, in modo che questo numero rappresenti l'area compresa tra l'intervallo (visto sull'asse delle ascisse) e il grafico della funzione. Ci limiteremo a funzioni continue definite su $[p \mathrel{..} q]$; dati a e b con $p \le a < b \le q$, questa associazione si può vedere come una funzione

$$(a, b) \mapsto \operatorname{Int}_a^b(f)$$

che ha come dominio certe coppie di elementi di $[p \mathrel{..} q]$. In questo caso si parla spesso di un *operatore*; la funzione f si pensa fissata, ma siccome è del tutto arbitraria, purché sia continua in $[p \mathrel{..} q]$, avremo un operatore per ciascuna funzione. Ci serve qualche proprietà che sia ragionevole per le aree. Assumeremo queste, dove con f indichiamo una funzione continua su $[p \mathrel{..} q]$ e con k un numero qualsiasi:

$$\begin{aligned}
&(b-a)\,\mathrm{m}_a^b(f) \le \operatorname{Int}_a^b(f), && (p \le a < b \le q)\\
&\operatorname{Int}_a^b(f) \le (b-a)\,\mathrm{M}_a^b(f), && (p \le a < b \le q)\\
&\operatorname{Int}_a^c(f) = \operatorname{Int}_a^b(f) + \operatorname{Int}_b^c(f), && (p \le a < b < c \le q)
\end{aligned}$$

dove con $\mathrm{m}_a^b(f)$ e $\mathrm{M}_a^b(f)$ indichiamo il valore minimo e massimo di f nell'intervallo $[a \mathrel{..} b]$. Queste proprietà sono intuitivamente evidenti, almeno per le funzioni che assumono solo valori positivi.

Vediamo qualche conseguenza. Se $\mathbf{1}$ è la funzione che vale costantemente 1, dobbiamo avere

$$b - a \le \operatorname{Int}_a^b(\mathbf{1}) \le b - a$$

e quindi $\operatorname{Int}_a^b(\mathbf{1}) = b - a$. Analogamente, se f assume solo valori positivi, dovremo avere $\operatorname{Int}_a^b(f) > 0$, perché in tal caso $\mathrm{m}_a^b(f) > 0$.

Rimandiamo a dopo la questione se un operatore del genere esista per *ogni* funzione continua f. Intanto vediamo qualche proprietà che ci servirà in seguito. Prima di tutto estendiamo la notazione: se $p \le b < a \le q$, poniamo

$$\operatorname{Int}_a^b(f) = -\operatorname{Int}_b^a(f)$$

e anche

$$\operatorname{Int}_a^a(f) = 0$$

in modo che la terza proprietà continui a valere per ogni $a, b, c \in [p \mathrel{..} q]$, come si vede subito. Anche per $\mathrm{m}_a^b(f)$ e $\mathrm{M}_a^b(f)$ non faremo più distinzione fra $a < b$ e $b < a$. È naturale anche porre $\mathrm{m}_a^a(f) = \mathrm{M}_a^a(f) = f(a)$, il motivo appare chiaro dall'enunciato seguente.

TEOREMA. *Se f è continua in $[p \mathrel{..} q]$ e $x \in [p \mathrel{..} q]$, allora*

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{m}_x^{x+h}(f) = f(x), \qquad \lim_{h\to 0} \mathrm{M}_x^{x+h}(f) = f(x).$$

▶ Scriviamo la dimostrazione solo dell'enunciato

$$\lim_{h\to 0+} \mathrm{M}_x^{x+h}(f) = f(x)$$

per $p \le x < q$. Gli altri casi sono del tutto simili.

Poniamo $g(h) = \mathrm{M}_x^{x+h}(f)$; questa funzione è definita per $0 < h < q - x$ ed è crescente: infatti, se $h_1 < h_2$, abbiamo

$$[x \mathinner{..} x + h_1] \subseteq [x \mathinner{..} x + h_2]$$

e il massimo di f in un intervallo più ampio non può essere minore. Dunque $g(h_1) \leq g(h_2)$.

Basta ora chiamare l l'estremo inferiore dei valori di g per avere, come nel caso delle successioni, che $\lim_{h \to 0+} g(h) = l$. Si noti che certamente $f(x) \leq l$.

Si tratta dunque di vedere che $f(x) = l$; supponiamo per assurdo che $l > f(x)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $x + \delta < q$ e, per $0 < h < \delta$,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{l - f(x)}{2}$$

in particolare

$$f(x+h) \leq \frac{l - f(x)}{2} + f(x) = \frac{l + f(x)}{2} < \frac{l + l}{2} = l.$$

Ne segue

$$g(\delta/2) = \mathrm{M}_x^{x+(\delta/2)}(f) < l \leq g(\delta/2)$$

che è assurdo. ◀

Questo teorema esprime un fatto intuitivamente chiaro: se si restringe l'intervallo attorno a x, il massimo e il minimo di f in questo intervallo si avvicinano a $f(x)$, ma la continuità di f è essenziale perché la proprietà valga, anche sostituendo massimo e minimo con estremo superiore ed estremo inferiore, supponendo f limitata. Perciò tratteremo solo funzioni continue. Abbiamo adesso gli strumenti per dimostrare il teorema più importante.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO. *Se f è una funzione continua in $[p \mathinner{..} q]$ e poniamo*

$$F(x) = \mathrm{Int}_a^x(f)$$

dove $a \in [p \mathinner{..} q]$, allora F è derivabile e $F' = f$.

▶ Per le proprietà dell'operatore Int, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \mathrm{Int}_a^{x+h}(f) - \mathrm{Int}_a^x(f) \\ &= \mathrm{Int}_a^x(f) + \mathrm{Int}_x^{x+h}(f) - \mathrm{Int}_a^x(f) \\ &= \mathrm{Int}_x^{x+h}(f) \end{aligned}$$

e quindi, ancora per le proprietà di Int,

$$\mathrm{m}_x^{x+h}(f) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \mathrm{M}_x^{x+h}(f).$$

Si faccia attenzione a quando $h > 0$ e quando $h < 0$, ma in entrambi i casi si ottiene la stessa disuguaglianza.

Per il teorema di confronto dei limiti e per il teorema precedente,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$ ◀

TEOREMA DI UNICITÀ DELL'INTEGRALE. *Se un operatore* Int *con le proprietà enunciate esiste, allora è unico.*

▶ Supponiamo che Φ sia un operatore con le stesse proprietà di Int. Allora possiamo dimostrare il teorema fondamentale per Φ e dunque abbiamo che, per ogni funzione continua f su $[p \,..\, q]$, le funzioni

$$F(x) = \operatorname{Int}_a^x(f) \qquad \text{e} \qquad G(x) = \Phi_a^b(f)$$

hanno entrambe la proprietà che $F' = f$ e $G' = f$ e dunque $(F - G)'$ è la funzione nulla. Per la conseguenza del teorema di Lagrange, esiste un k tale che, per ogni $x \in [p \,..\, q]$, si abbia

$$F(x) - G(x) = k.$$

Ma, per definizione, $F(a) = \operatorname{Int}_a^a(f) = 0$ e $G(a) = \Phi_a^a(f) = 0$, dunque $k = 0$. Perciò, per ogni $b \in [p \,..\, q]$ si ha anche

$$\operatorname{Int}_a^b(f) = F(b) = G(b) = \Phi_a^b(f)$$ ◀

Resta quindi solo il problema di dimostrare l'esistenza dell'operatore Int, lo rimandiamo a più tardi: se siamo arrivati fin qui con la teoria, è ovvio che la soluzione al problema è già stata trovata da qualcuno!

La notazione tradizionale per $\operatorname{Int}_a^b(f)$ è

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che si legge 'integrale tra a e b di f'. La variabile x è ovviamente sostituibile con qualsiasi lettera e non ha un significato proprio.

La notazione per gli integrali risale a Leibniz. Il suo punto di partenza era proprio la suddivisione dell'intervallo $[a \,..\, b]$ in parti e di considerare i rettangoli, come faceva Fermat, ma considerando questi intervalli come aventi base 'infinitesima' e facendo la somma di tutte queste aree 'infinitesime'. Il simbolo $\int$ è infatti una 'S' per 'somma'.

Tuttavia gli sviluppi rigorosi del calcolo vietano di usare questo concetto intuitivo di grandezza infinitesima, perché contraddittorio, se non inquadrato in un'apposita teoria: si è scoperto in tempi abbastanza recenti che gli infinitesimi si possono trattare, ma non certo nel modo ingenuo di Leibniz. Il dx rimane nella notazione principalmente perché è comodo, come vedremo. Si potrebbe benissimo scrivere

$$\int_a^b f,$$

dopo tutto sarebbe esattamente lo stesso di $\operatorname{Int}_a^b(f)$ e non ci sarebbe alcuna difficoltà. La notazione tradizionale mette in evidenza il nome della variabile e questo può essere utile per casi particolari (distinguere la variabile da un parametro, per esempio); ma soprattutto ricorda come operare con le sostituzioni, lo descriveremo in seguito.

Abbiamo una conseguenza importante: sappiamo calcolare molti integrali! Data una funzione f di cui calcolare l'integrale, ci basta conoscere un'altra funzione G di cui f sia la derivata.

DEFINIZIONE. *Data una funzione f continua su un intervallo I si chiama primitiva di f una qualsiasi funzione definita su I la cui derivata sia f.*

Ci basta conoscere una primitiva per conoscerle tutte, visto che funzioni che hanno la stessa derivata differiscono per una costante: se $F' = G'$, allora $(F - G)'$ è la funzione nulla e quindi $F - G$ è costante. Si ricordi che parliamo di funzioni definite su un intervallo: su questo intervallo una (quindi ogni) primitiva di una funzione continua è certamente una funzione di Lagrange.

Talvolta si parla di primitiva anche per funzioni definite su un'unione di intervalli; in tal caso due primitive differiscono, su ogni intervallo contenuto nel dominio, per una costante, ma queste costanti possono essere diverse da intervallo a intervallo. Si pensi all'esempio di $x \mapsto \arctan x + \arctan(1/x)$.

TEOREMA DI CALCOLO DEGLI INTEGRALI. *Se f è continua su $[a \mathinner{..} b]$ e G è una primitiva di f, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

▶ La funzione $F(x) = \mathrm{Int}_a^x(f)$ è una primitiva di f; dunque esiste k tale che $F(x) = G(x) + k$ per ogni $x \in [a \mathinner{..} b]$. Ma allora $0 = F(a) = G(a) + k$ e dunque $k = -G(a)$. Perciò

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + k = G(b) - G(a).$$ ◀

Un modo di scrivere spesso usato è, con le notazioni precedenti,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Vediamo qualche semplice applicazione. La derivata di $f(x) = x^n$ è $f'(x) = nx^{n-1}$; perciò la derivata di $g(x) = x^{k+1}/(k+1)$ (per $k \neq -1$) è $g'(x) = x^k$. Dunque g è una primitiva di $x \mapsto x^k$ (sempre per $k \neq -1$) e abbiamo

$$\int_p^q x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=p}^{x=q} = \frac{q^{k+1}}{k+1} - \frac{p^{k+1}}{k+1}$$

esattamente come ottenuto da Fermat. È evidente che la tabella delle derivate (tabella 2 a pagina 63) fornisce anche una tabella di primitive, che però non è sufficiente nemmeno per le esigenze più comuni.

La derivata di una funzione elementare (una di quelle che compaiono nella tabella 2) è ancora una funzione elementare. Questo non accade con le primitive; si può dimostrare, per esempio, che una primitiva di $x \mapsto \exp(-x^2)$ non si può esprimere in termini di funzioni elementari. Ma una sua primitiva la conosciamo:

$$F(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\,dt$$

e questo ci permette di calcolare i valori della primitiva scelta con il grado di approssimazione richiesto (con le serie o con metodi di integrazione approssimata).

6.3 IL LOGARITMO E L'ESPONENZIALE

Per $k = -1$ la formula per la primitiva di $x \mapsto x^k$ non si può applicare. A questo punto dunque non possiamo più barare e siamo costretti a dare, finalmente, la definizione ufficiale di logaritmo. Non che quella precedente sia "sbagliata": il fatto è che appoggia alla vaga nozione di "area delimitata da archi di curve". Il grande successo dell'analisi è che ha potuto svincolarsi da considerazioni geometriche basate sull'intuizione. Più avanti studieremo come definire anche le funzioni trigonometriche senza appoggiarsi alla geometria; l'importante è che queste definizioni analitiche diano gli stessi risultati ottenuti con l'intuizione geometrica.

DEFINIZIONE. *Se $x > 0$, poniamo*

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Il valore $\log x$ si chiama logaritmo di x.

Alcuni testi chiamano questo valore "logaritmo naturale" e indicano la funzione con il simbolo 'ln'. I matematici invece preferiscono in genere 'log', l'importante è che le convenzioni adottate in un testo siano chiarite e usate in modo uniforme.

TEOREMA. *La funzione* $\log$*, definita in* $(0\mathrel{..}\to)$*, è strettamente crescente e assume tutti i valori. La sua inversa, definita ovunque, si denota con* $\exp$*. Allora* $\exp' = \exp$ *e si ha, per ogni* $a, b > 0$*,*

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

e, per ogni x *e* y*,*

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y).$$

Inoltre $\log 1 = 0$ *e* $\exp 0 = 1$*. Se* $e = \exp 1$*, allora, per* n *intero si ha* $\exp n = e^n$*.*

▶ La funzione $x \mapsto 1/x$ è continua nell'intervallo $(0\mathrel{..}\to)$, quindi anche log è definita in quell'intervallo. Per il teorema fondamentale del calcolo, $\log' x = 1/x$ in ogni punto x del dominio. Quindi log è una funzione strettamente crescente.

Per le proprietà dell'integrale si ha

$$\frac{1}{2} = \mathrm{m}_1^2(x \mapsto 1/x) \cdot (2 - 1) \le \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \log 2.$$

In particolare $\log 2 \ge 1/2$.

Consideriamo la funzione g definita da

$$g(x) = \int_1^{ax} \frac{1}{t}\,dt = \log(ax).$$

Allora

$$g'(x) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x} = \log' x$$

e dunque la funzione g e la funzione log differiscono per una costante. Siccome $g(1) = \log a$ e $\log 1 = \int_1^1 (1/t)\,dt = 0$, la costante è proprio $\log a$. Dunque

$$\log(ax) = g(x) = \log x + \log a$$

e l'uguaglianza fondamentale del logaritmo è dimostrata.

Una conseguenza è che $\log(a^n) = n \log a$, in particolare $\log 2^n = n \log 2$. Siccome log è crescente, dobbiamo avere

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty.$$

Infatti $\lim_{n\to+\infty} \log 2^n = \lim_{n\to+\infty} n \log 2 = +\infty$ ed è facile dedurre da questo l'altro limite (esercizio).

Dall'uguaglianza fondamentale segue che, per $x > 0$,

$$0 = \log 1 = \log\left(x\frac{1}{x}\right) = \log x + \log(1/x)$$

e dunque $\log(1/x) = -\log x$. Dunque

$$\lim_{x\to 0} \log x = \lim_{t\to+\infty} \log(1/t) = \lim_{t\to+\infty} -\log t = -\infty.$$

I valori di log esauriscono perciò tutta la retta reale, per il teorema sui valori intermedi. Dunque la funzione inversa di log è definita ovunque e assume tutti i valori in $(0\mathrel{..}\to)$. La denotiamo con exp; l'uguaglianza $\exp' = \exp$ si deduce come già abbiamo visto:

$$\log(\exp x) = x, \qquad \frac{1}{\exp x}\exp' x = 1, \qquad \exp' x = \exp x.$$

La proprietà di exp equivale a quella di log:

$$\log(\exp(x + y)) = x + y = \log(\exp x) + \log(\exp y) = \log((\exp x)(\exp y))$$

e quindi, essendo log iniettiva, abbiamo $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$. Inoltre si ha

$$\exp 2 = \exp(1 + 1) = (\exp 1)(\exp 1) = e^2.$$

È facile vedere per induzione che, per $n > 0$ intero, $\exp n = e^n$. Se $n < 0$, si ha $-n > 0$ e dunque

$$1 = \exp 0 = \exp(n - n) = (\exp n)(\exp(-n)) = (\exp n)e^{-n}$$

da cui $\exp n = e^n$. ◀

Una volta definito il logaritmo in modo del tutto rigoroso, senza fare ricorso al concetto intuitivo di area, possiamo procedere come già noto per le definizioni di $x \mapsto a^x$ (per $a > 0$) e $\log_b$ (per $b > 0$ ma $b \neq 1$):

$$a^x = \exp(x \log a)$$

(vedremo fra poco che, per n intero, la scrittura a^n non è ambigua). Per $b > 0$, $b \neq 1$, abbiamo, da $y = b^x$,

$$\log y = \log(b^x) = \log(\exp(x \log b)) = x \log b$$

e dunque $x = (\log y)/(\log b)$: x è l'esponente da dare a b per ottenere y. Quindi poniamo

$$\log_b y = \frac{\log y}{\log b}.$$

La definizione della funzione esponenziale exp ci ha permesso di definire in modo veloce e rigoroso le potenze con esponente reale qualsiasi. Ripetiamo la definizione in modo più ufficiale.

DEFINIZIONE. *Se $a > 0$, poniamo $a^x = \exp(x \log a)$, dove x è un numero reale qualsiasi.*

Il problema che nasce con questa notazione è che potrebbe entrare in conflitto con la notazione delle potenze che si può introdurre senza fare ricorso all'esponenziale generale nel caso di esponenti interi: se $n > 1$, si indica infatti con a^n il prodotto di n fattori uguali ad a e si estende la definizione con $a^1 = a$, $a^0 = 1$ e, per $a \neq 0$, $a^n = 1/a^{-n}$. Le proprietà fondamentali sono che $a^{m+n} = a^m a^n$ e $(a^m)^n = a^{mn}$, per m e n interi qualsiasi (non negativi se $a = 0$). In questo caso non è un problema avere anche $a < 0$, ma nel caso generale che vogliamo studiare, questo non è possibile: *l'esponenziale con esponenti reali è definito solo se la base è positiva.*

La prima cosa da osservare è che le due definizioni di a^n, con n intero, non danno risultati diversi. Nell'argomentazione che segue riserviamo il simbolo a^n per la potenza definita con le moltiplicazioni. Abbiamo $\exp(0 \log a) = \exp 0 = 1 = a^0$; se vale $\exp(n \log a) = a^n$, con $n \geq 0$, abbiamo anche

$$\exp((n + 1) \log a) = \exp(n \log a + \log a) = \exp(n \log a) \exp(\log a) = a^n a = a^{n+1}$$

e così la dimostrazione di $\exp(n \log a) = a^n$ per n intero non negativo è conclusa. Se $n < 0$, abbiamo però

$$\begin{aligned} 1 = \exp 0 &= \exp(n \log a + (-n) \log a) \\ &= \exp(n \log a) \exp((-n) \log a) \\ &= \exp(n \log a)a^{-n} \end{aligned}$$

da cui $\exp(n \log a) = 1/a^{-n}$ come richiesto, perché, *per definizione*, $a^n = 1/a^{-n}$ quando $n < 0$.

Ora possiamo dunque scrivere senza problemi a^x invece di $\exp(x \log a)$, perché il simbolo non è ambiguo quando x è intero. È un esercizio interessante dimostrare che $a^{1/n}$ è l'unico numero positivo y tale che $y^n = a$. Inoltre, per $a \neq 1$,

$$a^{\log_a x} = x$$

perché, prendendo il logaritmo del termine di sinistra,

$$\log(a^{\log_a x}) = \log_a x \log a = \frac{\log x}{\log a} \log a = \log x$$

e abbiamo la tesi, perché la funzione logaritmo è invertibile. In altre parole, la funzione $\log_a$ soddisfa la definizione intuitiva del logaritmo in base a di x come dell'esponente da assegnare ad a per ottenere x. In informatica è molto utile considerare il logaritmo in base 2, perché fornisce immediatamente il numero di cifre binarie di un intero: un numero intero $n > 0$ ha k cifre binarie se e solo se $2^{k-1} \leq n < 2^k$, che si può anche scrivere $2^{k-1} < n + 1 \leq 2^k$, cioè se e solo se

$$k - 1 < \log_2(n + 1) \leq k$$

e quindi il numero di cifre binarie di n è precisamente $\lceil \log_2(n + 1) \rceil$ (relazione valida anche per $n = 0$).

Si raccomanda di usare notazioni come $a^{1/3}$ solo per $a > 0$, per evitare argomentazioni bizzarre come

$$-1 = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = 1$$

che sono evidentemente assurde (e sbagliate). Per n intero dispari si pone

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a^{1/n} & \text{se } a > 0, \\ 0 & \text{se } a = 0, \\ -(-a)^{1/n} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Solo per n dispari è possibile definire la radice n-esima in modo coerente anche per numeri negativi, ma si deve sempre fare attenzione a non adoperare scorrettamente le semplificazioni con i radicali. Qualche testo adotta convenzioni complicate, ma quasi sempre inutili, per ampliare il numero di identità che, però, non compaiono praticamente mai nella vita reale. Per n intero e $a > 0$, le notazioni $\sqrt[n]{a}$ e $a^{1/n}$ sono equivalenti.

Per ultimo vediamo che la derivata di $f(x) = x^r$ (definita per $x > 0$) è $f'(x) = rx^{r-1}$: infatti $x^r = \exp(r \log x)$ e quindi

$$f'(x) = \exp'(r \log x) \cdot \frac{r}{x} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}.$$

Come si vede, l'integrale può essere usato per definire nuove funzioni che si possono studiare senza bisogno di averne 'espressioni esplicite'. La funzione

$$\sigma(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\, dt$$

è molto importante in probabilità e statistica, perché compare nelle cosiddette *distribuzioni normali* o *gaussiane*. La funzione è definita ovunque; inoltre

$$\sigma'(x) = \exp(-x^2) > 0$$

cosicché g è crescente. Per $t > 0$ vale la disuguaglianza

$$\exp t \geq t.$$

Consideriamo infatti la funzione $\varphi(t) = -t + \exp t$. Allora $\varphi'(t) = -1 + \exp t$ che è positiva per $\exp x > 1$, cioè $t > \log 1 = 0$. Siccome $\varphi(0) = \exp 0 = 1 > 0$, avremo $\varphi(t) > 0$ per $t > 0$.

Ne concludiamo che $\exp(t^2) \geq t^2$ e quindi, trattandosi di numeri positivi

$$0 < \exp(-t^2) \leq \frac{1}{t^2}.$$

TEOREMA. *Se f e g sono funzioni continue nell'intervallo $[a \mathinner{..} b]$ e si ha, per $t \in [a \mathinner{..} b]$,*

$$0 \leq f(t) \leq g(t)$$

allora

$$0 \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$

▶ La funzione $g - f$ assume solo valori non negativi, quindi, per le proprietà dell'integrale

$$0 \leq \mathrm{m}_a^b(b-a) \leq \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt. \qquad ◀$$

Da questo teorema segue dunque che, per ogni $x > 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt &= \int_0^1 \exp(-t^2)\,dt + \int_1^x \exp(-t^2)\,dt \\ &\leq \int_0^1 \exp(-t^2)\,dt + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Indichiamo con K il primo dei due integrali. Conosciamo una primitiva di $t \mapsto 1/t^2$: è $t \mapsto -1/t$, quindi il secondo integrale può essere scritto esplicitamente:

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=x} = -\frac{1}{x} + 1 \leq 1.$$

Perciò abbiamo, per $x > 1$,

$$\sigma(x) \leq K + 1$$

e quindi $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \sigma(x)$ è finito. Siccome

$$\sigma'(-x) = -\exp(-(-x)^2) = -\sigma(x)$$

la funzione $x \mapsto -\sigma(-x)$ differisce da σ per una costante k: $-\sigma(-x) = \sigma(x) + k$ per ogni x. Ma per $x = 0$ questo dà $-\sigma(0) = \sigma(0) + k$ e, per definizione $\sigma(0) = 0$. Perciò $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ e

$$\lim_{x \to -\infty} \sigma(x) = \lim_{t \to +\infty} \sigma(-t) = \lim_{t \to +\infty} -\sigma(t) = -L.$$

Si può dimostrare, ma non è affatto facile, che $L = \sqrt{\pi}/2$. Si può dimostrare anche che la funzione σ non è esprimibile tramite funzioni elementari.

Per tornare a funzioni di cui si può calcolare l'integrale, proviamo a calcolare l'area sotto l'arco di sinusoide tra 0 e π; una primitiva di sin è $x \mapsto -\cos x$, quindi

$$\int_0^\pi \sin t\,dt = \Big[-\cos t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

6.4 TECNICHE DI INTEGRAZIONE

Qui useremo una notazione speciale: se f è definita su un intervallo, con

$$x \mapsto \int^x f(t)\,dt$$

indicheremo una *qualsiasi* primitiva di f; si potrebbe precisare che viene indicata la primitiva ottenuta usando come limite inferiore di integrazione un certo elemento dell'intervallo di definizione di f, ma non è importante. Del resto per il calcolo degli integrali non è necessario sapere quale primitiva si stia adoperando. Saremo sempre attenti, però, che il dominio della nostra funzione sia un intervallo: si rischia di cadere in gravi errori se non si prende questa precauzione. Scriveremo anche, più semplicemente,

$$\int f$$

quando non ci serva dare un nome alla variabile.

La prima regola è molto semplice:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

perché la derivata di una somma è la somma delle derivate. Analogamente, se k è un numero e f una funzione,

$$\int kf = k \int f.$$

Attenzione: queste uguaglianze significano solo che l'operazione indicata a destra fornisce una primitiva della funzione indicata sotto il segno di integrale a sinistra. Ma, come le operazioni con limiti infiniti, queste convenzioni non danno problemi purché si sia consapevoli di ciò che significano.

Veniamo alle primitive più complicate:

$$\begin{aligned}
&\int^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} && (n \neq -1)\\
&\int^x \frac{1}{t}\,dt = \log|x|\\
&\int^x \exp t\,dt = \exp x\\
&\int^x \sin t\,dt = -\cos x\\
&\int^x \cos t\,dt = \sin x\\
&\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin x\\
&\int^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x
\end{aligned}$$

La primitiva di $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ è proprio una di quelle che possono dare problemi. Infatti possiamo calcolare

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int^x -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\arccos x.$$

Possiamo da questo concludere che $\arcsin x = -\arccos x$? Certamente no, ma solo che queste due funzioni differiscono per una costante. Infatti dall'uguaglianza $\arcsin' x = -\arccos' x$ (per ogni $x \in (-1 \mathinner{\ldotp\ldotp} 1)$, dove le due funzioni sono derivabili) deduciamo

solo che esiste k tale che $\arcsin x = k - \arccos x$; per $x = 0$ abbiamo $\arcsin 0 = k - \arccos 0$, cioè $0 = k - \pi/2$:
$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$
è infatti una relazione corretta. Anche la primitiva riportata nella tabella per $x \mapsto 1/x$ merita un commento. Secondo le nostre convenzioni, la funzione da integrare deve essere definita in un intervallo; quindi possiamo scegliere $(0\,..\,\rightarrow)$ oppure $(\leftarrow\,..\,0)$ (o un qualsiasi intervallo contenuto in uno di questi due). Se pensiamo $x \mapsto 1/x$ definita per $x > 0$, una primitiva è $x \mapsto \log x$; se la pensiamo definita per $x < 0$, una primitiva è $x \mapsto \log(-x)$, come si verifica derivando. Scrivere la primitiva come $x \mapsto \log|x|$ evita di dover specificare in quale intervallo consideriamo definita la funzione. Ma ciò non ci autorizza a considerare lecito $\int_{-1}^{1}(1/x)\,dx$, perché la funzione *non è definita* nell'intervallo $[-1\,..\,1]$.

Anche la formula per la derivata di una funzione composta dà una tecnica di integrazione. Vediamo prima la teoria e poi la pratica. Supponiamo che la funzione φ sia scritta come
$$\varphi(t) = g(f(t))f'(t).$$
Se G è una primitiva di g e poniamo $\psi(t) = G(f(t))$, allora abbiamo
$$\psi'(t) = G'(f(t))f'(t) = g(f(t))f'(t) = \varphi(t)$$
e quindi ψ è una primitiva di φ. Per esempio, volendo calcolare
$$\int^{x} \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
si può considerare $f(t) = 1 + t^2$ e $g(u) = 1/u$; allora, se $\varphi(t) = 2t/(1 + t^2)$, abbiamo proprio
$$\varphi(t) = g(f(t))f'(t).$$
Una primitiva di $u \mapsto g(u) = 1/u$ è $\log u$ (perché $f(t) > 0$) e quindi una primitiva di φ è proprio $\log(1 + t^2)$. C'è un modo più pratico per eseguire questo calcolo: con le stesse notazioni,
$$\int^{x} g(f(t))f'(t)\,dt = \int^{f(x)} g(u)\,du$$
e scriveremo qualcosa come
$$\begin{aligned}\int^{x} \frac{2t}{1+t^2}\,dt &= (\dots)\Bigl[u = 1 + t^2; \quad du = 2t\,dt\Bigr] \\ &= \int^{1+x^2} \frac{1}{u}\,du \\ &= \Bigl[\log u\Bigr]^{u=1+x^2} \\ &= \log(1 + x^2).\end{aligned}$$
In questo contesto, la scrittura $u = 1+t^2$ sostituisce la più lunga posizione $f(t) = 1+t^2$ e il calcolo di $f'(t) = 2t$. Scriveremo più semplicemente, in generale, $u = f(t)$ e
$$du = f'(t)\,dt.$$
Questo è il motivo principale perché si mantiene dt nella notazione dell'integrale. Si usa formalmente la notazione di Leibniz per la derivata:
$$\frac{du}{dt} = f'(t)$$

e ‘si moltiplicano ambo i membri per dt’. Si ricordi però che questa è solo una notazione mnemonica per eseguire la giusta sostituzione.

Altro esempio: calcolare una primitiva di $\varphi(x) = \cos x/(1+\sin x)^2$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\cos t}{(1+\sin t)^2}\,dt &= (\dots)\Bigl[u = 1+\sin t; \quad du = \cos t\,dt\Bigr] \\
&= \int^{1+\sin x} \frac{1}{u^2}\,du \\
&= \Bigl[-\frac{1}{u}\Bigr]^{u=1+\sin x} \\
&= -\frac{1}{1+\sin x}.
\end{aligned}$$

In altre situazioni non è così agevole trovare la sostituzione giusta e si può adattare la tecnica purché ci si assicuri di usare funzioni invertibili. Un esempio vale più di tante formule. Consideriamo

$$\begin{aligned}
\int^x t\sqrt{1-t}\,dt &= (\dots)\Bigl[u = \sqrt{1-t}; \quad t = 1-u^2; \quad dt = -2u\,du\Bigr] \\
&= \int^{\sqrt{1-x}} (1-u^2)u(-2u)\,du \\
&= 2\int^{\sqrt{1-x}} (u^4-u^2)\,du \\
&= 2\Bigl[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\Bigr]^{u=\sqrt{1-x}} \\
&= 2\Bigl(\frac{(1-x)^2}{5} - \frac{1-x}{3}\Bigr)\sqrt{1-x}
\end{aligned}$$

dove la sostituzione $u = \sqrt{1-t}$ è ammessa in quanto invertibile nel dominio della funzione da integrare. Di fatto non serve scrivere esplicitamente la primitiva se si deve calcolare l’integrale:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt &= (\dots)\Bigl[u = \sqrt{1-t}; \quad t = 1-u^2; \quad dt = -2u\,du\Bigr] \\
&= \int_{\sqrt{1-0}}^{\sqrt{1-1}} (1-u^2)u(-2u)\,du \\
&= 2\int_1^0 (u^4-u^2)\,du \\
&= 2\Bigl[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\Bigr]_1^0 \\
&= 2\Bigl(0 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\Bigr) = \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

L’esempio classico e complicato è il calcolo dell’area del cerchio. La funzione da considerare è $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e l’area sarà il doppio di

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Potremmo considerare la sostituzione $u = \sqrt{1-t^2}$, ma questa non è invertibile. Meglio invece usare $u = \arccos t$, perché questa è invertibile e si ha $t = \cos u$, da cui $\sqrt{1-t^2} =$

$\sqrt{1-\cos^2 u} = \sin u$, perché arccos prende valori nell'intervallo $[0 \mathrel{..} \pi]$ dove il seno è non negativo. Allora

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt &= (\dots)\Bigl[u = \arccos t; \quad t = \cos u; \quad dt = -\sin u\,du\Bigr] \\
&= \int_{\arccos(-1)}^{\arccos 1} -\sin^2 u\,du \\
&= \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(2u)-1}{2}\,du \\
&= (\dots)\Bigl[u = v/2; \quad du = (1/2)\,dv\Bigr] \\
&= \frac{1}{4}\int_{2\pi}^{0} (\cos v - 1)\,dv \\
&= \frac{1}{4}\Bigl[\sin v - v\Bigr]_{2\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

da cui concludiamo che l'area del cerchio di raggio 1 è π, come certo ci aspettavamo. Per l'area del cerchio di raggio r la funzione da integrare è $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ e la sostituzione sarà $u = \arccos(t/r)$ che dà $\sqrt{r^2-t^2} = r\sin u$. Un altro fattore r viene dalla derivata e r^2 rimane fino in fondo, così che l'integrale si calcola allo stesso modo dando l'area πr^2. Così scrisse Archimede: *Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οἷ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περί τέν ὀρθέν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.* "Ogni cerchio è uguale a un triangolo rettangolo avente come cateti il raggio del cerchio e il suo perimetro."

Volendo calcolare una primitiva, si possono fare le sostituzioni a ritroso nella funzione finale:

$$\frac{1}{4}(\sin v - v) = \frac{1}{4}(\sin(2u) - 2u) = \frac{1}{2}(\sin u \cos u - u) = \frac{1}{2}(t\sqrt{1-t^2} - \arccos t)$$

e quindi

$$\int^{x} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x).$$

Il trucco di scrivere $\sin^2 u$ in termini di $\cos(2u)$ è usato spesso, durante questi calcoli.

Rimane un'ultima tecnica fondamentale da descrivere, l'*integrazione per parti*, che deriva dalla formula della derivata di un prodotto. Supponiamo che φ si possa scrivere come prodotto di due funzioni, $\varphi(x) = f(x)g(x)$ e che di una di esse si conosca una primitiva, per esempio G tale che $G' = g$. In tal caso si può considerare la derivata di $\psi(x) = f(x)G(x)$:

$$\psi'(x) = f'(x)G(x) + f(x)G'(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$$

da cui abbiamo

$$f(x)g(x) = \psi'(x) - f'(x)G(x)$$

e, passando alle primitive,

$$\int^{x} f(t)g(t)\,dt = f(x)G(x) - \int^{x} f'(t)G(t)\,dt.$$

Secondo la terminologia usuale, f si chiama *fattore finito* e g si chiama *fattore differenziale.* Nell'integrale che rimane da calcolare compare la derivata del fattore finito, che potrebbe rendere più semplice il calcolo. Esempio:

$$\int^{x} t\exp t\,dt = x\exp x - \int^{x} \exp t\,dt = x\exp x - \exp x$$

prendendo $f(x) = x$ come fattore finito (e $f'(x) = 1$), mentre $g(x) = \exp x$ è il fattore differenziale, con $\int^{x} \exp t\,dt = \exp x$. Vedremo oltre un caso più generale.

Altro esempio degno di nota: in $\int^x \log t\,dt$ si prende come fattore finito $f(x) = \log x$ e come fattore differenziale $g(x) = 1$; questo perché la derivata del logaritmo è una frazione algebrica e lo stesso una primitiva di g: $\int^x 1\,dt = x$. Allora

$$\int^x \log t\,dt = x\log|x| - \int^x t\frac{1}{t}\,dt = x\log|x| - x = x(\log|x| - 1).$$

Con l'integrazione per parti si può calcolare una primitiva di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, prendendo di nuovo come fattore finito $g(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int^x \sqrt{1-t^2}\,dt &= x\sqrt{1-x^2} - \int^x t\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int^x \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int^x \sqrt{1-t^2}\,dt + \int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.
\end{aligned}$$

Sembra di essere a un punto morto: dovremmo calcolare proprio la primitiva che stiamo cercando! Ma noi sappiamo che la primitiva esiste, quindi possiamo portare l'integrale di mezzo al primo membro:

$$2\int^x \sqrt{1-t^2}\,dt = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

che torna con il conto precedente. O no? Avevamo ottenuto

$$\int^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x),$$

dov'è l'inghippo?

Possiamo anche calcolare per parti una primitiva di $\cos^2$:

$$\begin{aligned}
F(x) = \int^x \cos^2 t\,dt &= \int^x \cos t \cdot \cos t\,dt \\
&= \sin x\cos x - \int^x \sin t(-\sin t)\,dt \\
&= \sin x\cos x + \int^x (1-\cos^2 t)\,dt \\
&= x + \sin x\cos x - \int^x \cos^2 t\,dt \\
&= x + \sin x\cos x - F(x) + c
\end{aligned}$$

dove c è una costante. Sembra che siamo di nuovo arrivati in un vicolo cieco, ma *sappiamo* che F esiste e quindi possiamo operare algebricamente ottenendo

$$\int^x \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$$

(la costante si omette, come sempre). Analogamente,

$$\int^x \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x).$$

Con l'integrazione per parti è possibile anche calcolare

$$\int^x P(t)e^t\,dt$$

dove P è un polinomio. Si prende come fattore differenziale l'esponenziale e quindi

$$\int^x P(t)e^t\,dt = P(x)e^x - \int^x P'(t)e^t\,dt$$

che abbassa di grado il polinomio. In sostanza vediamo che la primitiva cercata è della forma $Q(x)e^x$, dove Q ha lo stesso grado di P. Perciò invece di lunghe integrazioni per parti possiamo più semplicemente impostare coefficienti indeterminati:

$$\int^x (t^2 + t + 1)e^t \, dt = (ax^2 + bx + c)e^x$$

e derivare, ottenendo

$$(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = (x^2 + x + 1)e^x$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b + c = 1 \end{cases}$$

cioè $a = 1$, $b = -1$ e $c = 2$.

6.5 LE FUNZIONI IPERBOLICHE

L'iperbole equilatera ha parecchie somiglianze con la circonferenza; lo dice subito la sua equazione 'canonica'

$$x^2 - y^2 = 1$$

e possiamo dunque considerare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

definita nell'intervallo $[1 \mathinner{..} \rightarrow)$. Possiamo dunque provare a calcolare l'area di un "settore iperbolico", cioè la regione di piano delimitata da un ramo dell'iperbole e una retta parallela all'asse delle ordinate; in altre parole vogliamo calcolare

$$2\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt$$

e, per questo, trovare la migliore sostituzione possibile. La strategia più efficiente è la sostituzione

$$\sqrt{t^2 - 1} = t - u,$$

perché così, quando si eleva al quadrato, i termini t^2 spariscono: $-1 = -2tu + u^2$. Secondo le nostre convenzioni avremo

$$t = \frac{u^2 + 1}{2u} = \frac{u}{2} + \frac{1}{2u}, \qquad dt = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2u^2}\right) du.$$

Dunque l'integrale da calcolare è

$$2\int_1^{x-\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{u^2 + 1}{2u} - u\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2u^2}\right) du = -\frac{1}{2}\int_1^{x-\sqrt{x^2-1}} \frac{(u^2 - 1)^2}{u^3} \, du.$$

La funzione di cui calcolare una primitiva è

$$f(u) = u - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}$$

e questo è banale: una primitiva è

$$F(u) = \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right) - 2\log|u|.$$

Dobbiamo dunque calcolare $F(1) = 0$ e $F(x - \sqrt{x^2 - 1})$; ma è facile osservare che

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

e dunque, scrivendo provvisoriamente $y = \sqrt{x^2 - 1}$, abbiamo

$$\begin{aligned} F(x - y) &= \frac{1}{2}\left(x - y - \frac{1}{x - y}\right)\left(x - y + \frac{1}{x - y}\right) - 2\log|x - y| \\ &= (x - y - x - y)(x - y + x - y) - 2\log|x - y| \\ &= -2x\sqrt{x^2 - 1} - 2\log|x - y| \end{aligned}$$

e dunque l'area cercata è

$$x\sqrt{x^2 - 1} + \log|x - \sqrt{x^2 - 1}|.$$

Se ora consideriamo il triangolo di vertici $(0,0)$, $(x,0)$ e $(x, \sqrt{x^2 - 1})$, e ne sottraiamo la parte di settore iperbolico che è contenuta (cioè la metà), scopriamo che il triangolo curvilineo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$ e $(x, \sqrt{x^2 - 1})$ (il lato fra gli ultimi due vertici è il ramo di iperbole), ha area

$$-\frac{1}{2}\log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Questo va confrontato con l'analoga situazione della circonferenza di raggio unitario: l'area del settore circolare con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$ e $(x, \sqrt{1 - x^2})$ ha come area $\alpha/2$, dove α è l'angolo al centro del settore.

Nel caso della circonferenza si ha dunque, con le notazioni di prima,

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sqrt{1 - x^2} = \sin\alpha$$

e siamo giustificati a porre, nel caso dell'iperbole,

$$x = \cosh t, \quad y = \sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$$

dove

$$t = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Non è difficile ricavare la definizione di cosh e sinh (coseno e seno iperbolici):

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Per definizione vale l'identità iperbolica

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

(sono le coordinate di un punto del ramo di iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$).

Le funzioni iperboliche hanno proprietà molto simili a quelle circolari:

$$\begin{aligned} \cosh(t + u) &= \cosh t \cosh u + \sinh t \sinh u, \\ \sinh(t + u) &= \sinh t \cosh u + \cosh t \sinh u. \end{aligned}$$

Si noti che c'è un '+' nella formula di addizione del coseno iperbolico.

La formula di triplicazione del seno iperbolico è, con facili calcoli,

$$\sinh 3t = 4\sinh^3 t + 3\sinh t$$

e la si può usare nella soluzione dell'equazione di terzo grado $x^3+px+q=0$ dove $p>0$. Infatti basta porre $x = k\sinh t$ e fare in modo che

$$\frac{k^3}{kp} = \frac{4}{3}$$

cioè $k^2 = 4p/3$. Ne otteniamo l'equazione

$$4k\sinh^3 t + 3k\sinh t + q = 0$$

che diventa dunque

$$\sinh(3t) = -\frac{q}{k}.$$

Per esempio, da $x^3 + 3x - 4 = 0$ otteniamo $k^2 = 4$ e quindi, con $k = 2$, l'equazione

$$\sinh(3t) = 2.$$

Con la calcolatrice otteniamo

$$3t = 1{,}44363547517881$$

cioè $t = 0{,}481211825059603$ che dà

$$x = k\sinh t = 2\cdot 0{,}5 = 1,$$

come del resto ci aspettavamo (l'arrotondamento della calcolatrice è davvero fortunato).

6.6 Esistenza dell'operatore integrale

La lunga dimostrazione dell'esistenza dell'integrale è proprio, come sognava Cavalieri, un'astrazione del procedimento di esaustione di Eudosso e Archimede. La dobbiamo principalmente a Cauchy e Riemann, qui useremo una variante delle argomentazioni di Riemann dovuta a Darboux.

Dato un intervallo $[a\mathrel{..}b]$, una sua *suddivisione* è un sottoinsieme finito S tale che $a, b \in S$. Possiamo allora elencare gli elementi di una suddivisione come

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Data una suddivisione S e una funzione f continua su $[a\mathrel{..}b]$, porremo

$$\mathrm{m}_{x_{j-1}}^{x_j}(f) = m_{S,j}(f) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{M}_{x_{j-1}}^{x_j}(f) = M_{S,j}(f).$$

Chiameremo S-somma superiore per f il numero

$$\Sigma_S(f) = (x_1 - x_0)M_{S,1}(f) + (x_2 - x_1)M_{S,2}(f) + \dots + (x_n - x_{n-1})M_{S,n}(f).$$

Nel caso di f a valori positivi, staremmo considerando la somma delle aree dei rettangoli 'esterni' relativi alla suddivisione S. Analogamente chiamiamo S-somma inferiore per f il numero

$$\sigma_S(f) = (x_1 - x_0)m_{S,1}(f) + (x_2 - x_1)m_{S,2}(f) + \dots + (x_n - x_{n-1})m_{S,n}(f)$$

che, nel caso di f a valori positivi corrisponde alla somma delle aree dei rettangoli 'interni' relativi alla suddivisione.

Per costruzione è $m_{S,j} \le M_{S,j}$ e perciò è evidente che

$$\sigma_S(f) \le \Sigma_S(f).$$

Dimostriamo adesso che, se $S \subseteq T$, allora

$$\sigma_S(f) \le \sigma_T(f) \le \Sigma_T(f) \le \Sigma_S(f).$$

Possiamo limitarci al caso speciale in cui T si ottenga aggiungendo un solo elemento a S, perché il caso generale discende ripetendo il ragionamento per un certo numero (finito) di volte. Verifichiamo solo l'ultima disuguaglianza, la prima è analoga (oppure si applichi il ragionamento a $-f$).

Possiamo dunque supporre che T contenga esattamente un elemento in più di S; se S è dato da

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

avremo che T contiene un elemento $\bar{x}$ che sta, diciamo, tra x_{j-1} e x_j. Dunque la differenza tra la S-somma superiore e la T-somma superiore è

$$\Sigma_S(f) - \Sigma_T(f) = (x_j - x_{j-1})\,\mathrm{M}_{x_{j-1}}^{x_j}(f) - \bigl((\bar{x} - x_{j-1})\,\mathrm{M}_{x_{j-1}}^{\bar{x}}(f) - (x_j - \bar{x})\,\mathrm{M}_{\bar{x}}^{x_j}(f)\bigr).$$

Per evitare tanta barbarie di simboli, poniamo

$$\begin{aligned} r &= x_{j-1} \\ s &= x_j \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_0 &= \mathrm{M}_{x_{j-1}}^{x_j}(f) \\ M_1 &= \mathrm{M}_{x_{j-1}}^{\bar{x}}(f) \\ M_2 &= \mathrm{M}_{\bar{x}}^{x_j}(f) \end{aligned}$$

e osserviamo che $M_1 \le M_0$ e $M_2 \le M_0$; per uno dei due deve valere l'uguaglianza. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \Sigma_S(f) - \Sigma_T(f) &= (s-r)M_0 - \bigl((\bar{x}-r)M_1 + (s-\bar{x})M_2\bigr) \\ &\ge (s-r)M_0 - \bigl((\bar{x}-r)M_0 + (s-\bar{x})M_0\bigr) = 0 \end{aligned}$$

esattamente come richiesto.

Siamo a buon punto: consideriamo l'insieme $\mathcal{U}_a^b(f)$ delle S-somme superiori e l'insieme $\mathcal{L}_a^b(f)$ delle S-somme inferiori, cioè quelli dei valori ottenuti prendendo tutte le possibili suddivisioni di $[a \mathinner{..} b]$. Dimostriamo che che ogni numero in $\mathcal{L}_a^b(f)$ è minore (o uguale) di ogni numero in $\mathcal{U}_a^b(f)$. Infatti, se prendiamo $\sigma_S(f)$ e $\Sigma_T(f)$, abbiamo

$$\sigma_S(f) \le \sigma_{S\cup T}(f) \le \Sigma_{S\cup T}(f) \le \Sigma_T(f).$$

Ci viene dunque spontaneo considerare l'estremo superiore $\mathrm{L}_a^b(f)$ di $\mathcal{L}_a^b(f)$ e l'estremo inferiore $\mathrm{U}_a^b(f)$ di $\mathcal{U}_a^b(f)$. Di sicuro

$$\mathrm{L}_a^b(f) \le \mathrm{U}_a^b(f)$$

e vogliamo dimostrare che, in realtà, sono uguali. Come possiamo fare? La risposta è abbastanza semplice: ci basta verificare che l'operatore $(a,b) \mapsto \mathrm{U}_a^b(f)$ soddisfa le proprietà richieste per l'operatore $(a,b) \mapsto \mathrm{Int}_a^b(f)$. La stessa dimostrazione varrà, con le facili modifiche necessarie, per l'operatore $(a,b) \mapsto \mathrm{L}_a^b(f)$. Siccome sappiamo già che quell'operatore, se esiste, è unico, avremo terminato.

La prima proprietà è davvero banale: infatti, se consideriamo la suddivisione S_0 in cui ci sono solo a e b, abbiamo

$$(b-a)\,\mathrm{m}_a^b(f) = \sigma_{S_0}(f) \le \mathrm{U}_a^b(f) \le \Sigma_{S_0}(f) = (b-a)\,\mathrm{M}_a^b(f).$$

Dobbiamo dunque dimostrare la seconda proprietà, cioè che, per $p \le a < b < c \le q$ si ha

$$\mathrm{U}_a^c(f) = \mathrm{U}_a^b(f) + \mathrm{U}_b^c(f).$$

Se prendiamo una suddivisione S di $[a \mathinner{..} c]$, possiamo considerare la suddivisione $S' = S \cup \{b\}$; perciò, per quanto abbiamo visto,

$$\Sigma_{S'}(f) \le \Sigma_S(f).$$

Che cosa ci dice questo? Che l'estremo inferiore di $\mathcal{U}_a^c(f)$ è l'estremo inferiore di un insieme più piccolo, quello delle somme inferiori calcolate sulle suddivisioni a cui appartiene b. Ora, se S è una suddivisione di $[a \mathinner{..} c]$ a cui appartiene b, possiamo da questa ottenere una suddivisione $S_\leftarrow$ di $[a \mathinner{..} b]$ e una suddivisione $S_\rightarrow$ di $[b \mathinner{..} c]$. Chiaramente, dalla definizione di Σ_S abbiamo

$$\Sigma_S(f) = \Sigma_{S_\leftarrow}(f) + \Sigma_{S_\rightarrow}(f).$$

Viceversa, se T_1 è una suddivisione di $[a \mathinner{..} b]$ e T_2 è una suddivisione di $[b \mathinner{..} c]$, $T = T_1 \cup T_2$ è una suddivisione di $[a \mathinner{..} c]$ a cui appartiene b.

Quindi ci siamo ridotti a verificare una condizione su insiemi di numeri.

LEMMA. *Siano A e B insiemi di numeri e sia C l'insieme a cui appartengono tutte le possibili somme di numeri in A con numeri in B. Se A e B hanno estremo inferiore $\bar{a}$ e $\bar{b}$, allora C ha estremo inferiore $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.*

▶ Se $a \in A$ e $b \in B$, allora $\bar{a} \le a$ e $\bar{b} \le b$; dunque $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \le a + b$ e $\bar{c}$ è un minorante di C e quindi C ha estremo inferiore; in particolare $\bar{c} \le \inf C$. Supponiamo che $\bar{c} < \inf C$. Per definizione di estremo inferiore, esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che

$$a - \bar{a} \le \frac{\inf C - \bar{c}}{4}, \qquad b - \bar{b} \le \frac{\inf C - \bar{c}}{4}.$$

Allora

$$a + b - \bar{c} \le \frac{\inf C - \bar{c}}{2} < \inf C - \bar{c}$$

da cui $a + b < \inf C$ che è assurdo in quanto $a + b \in C$ per definizione di C. ◀

A che ci serve questo lemma? Se prendiamo $A = \mathcal{U}_a^b(f)$ e $B = \mathcal{U}_b^c(f)$, l'insieme C è proprio l'insieme delle somme superiori calcolate sulle suddivisioni che contengono b. Ma abbiamo già osservato che $\inf C = \mathrm{U}_a^c(f)$ e il lemma ci dice allora che

$$\mathrm{U}_a^c(f) = \inf C = \inf A + \inf B = \inf \mathcal{U}_a^b(f) + \inf \mathcal{U}_b^c(f) = \mathrm{U}_a^b(f) + \mathrm{U}_b^c(f).$$

Per gli stessi motivi avremo anche

$$\begin{gathered} \mathrm{m}_a^b(f) \le \mathrm{L}_a^b(f) \le \mathrm{M}_a^b(f), \\ \mathrm{L}_a^c(f) = \mathrm{L}_b^c(f) + \mathrm{L}_b^c(f), \end{gathered}$$

la prima per $p \le a < b \le q$, la seconda per $p \le a < b < c \le q$.

Ci sarebbe un modo più veloce per dimostrarlo: basta rendersi conto che

$$\mathrm{L}_a^b(f) = -\,\mathrm{U}_a^b(-f)$$

e osservare che in quanto abbiamo fatto la funzione f non entra in modo particolare: ne abbiamo solo usato la continuità per verificare l'unicità dell'operatore $(a, b) \mapsto \mathrm{Int}_a^b(f)$.

La dimostrazione dell'esistenza dell'operatore Int è così conclusa.

6.7 DISUGUAGLIANZE

Qui supporremo sempre che le funzioni siano continue sull'intervallo $[a \mathrel{..} b]$ e, quindi, che $a < b$.

La prima disuguaglianza per gli integrali è piuttosto facile: se f è una funzione non negativa che assume un valore positivo in $[a \mathrel{..} b]$, allora

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0.$$

Infatti deve essere $f(x) > 0$ per un $x \in (a \mathrel{..} b)$, e possiamo trovare un intorno di x in cui $f(x) > 0$; se questo intorno contiene l'intervallo $(x - \delta \mathrel{..} x + \delta)$, abbiamo che $f(c) > 0$ e $f(d) > 0$, dove $c = x - \delta/2$ e $d = x + \delta/2$. Dunque

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt + \int_d^b f(t)\,dt \ge \mathrm{m}_a^c(f) + \mathrm{m}_c^d(f) + \mathrm{m}_d^b(f)$$

con $\mathrm{m}_a^c(f) \ge 0$, $\mathrm{m}_c^d(f) > 0$ e $\mathrm{m}_d^b(f) \ge 0$.

Non è difficile vedere anche che se $f(x) \le g(x)$ per ogni x, allora

$$\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt.$$

Infatti, se $F = g - f$, si ha $F(x) \ge 0$ per ogni x e quindi $\mathrm{m}_a^b(F) \ge 0$. Dunque

$$0 \le (b-a)\,\mathrm{m}_a^b(F) \le \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt.$$

In questo caso scriveremo $f \le g$.

Prendiamo una funzione f e consideriamo le due funzioni così definite:

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \frac{1}{2}\bigl(|f(x)| + f(x)\bigr), \\ f_-(x) &= \frac{1}{2}\bigl(|f(x)| - f(x)\bigr). \end{aligned}$$

Allora

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \ge 0, \\ 0 & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \ge 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

e abbiamo chiaramente $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Il vantaggio di aver definito f_+ e f_- con la formula algebrica è che questa dimostra che le due funzioni sono continue (ed entrambe a valori non negativi) su $[a \mathrel{..} b]$ se tale è f. In più abbiamo che

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

Indicheremo brevemente con $|f|$ la funzione $x \mapsto |f(x)|$, che ha lo stesso dominio di f. Per una funzione qualsiasi abbiamo $-|f| \le f \le |f|$ e quindi, per la disuguaglianza precedente,

$$\int_a^b -|f(t)|\,dt \le \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

e ne segue l'altra fondamentale disuguaglianza

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Ne ricaviamo subito una conseguenza importante:

$$\text{se } \int_a^b |f(t)|\,dt = 0 \text{ allora } f(x) = 0, \text{ per ogni } x \in [a \mathrel{..} b].$$

Infatti, se fosse $f(x) \neq 0$, avremmo $|f(x)| > 0$ e quindi l'integrale di $|f|$ sarebbe positivo.

TEOREMA. *Se f è una funzione continua e crescente su $[1 \mathrel{..} \to)$, allora, per ogni intero $n > 1$,*

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-2) + f(n-1) \le \int_1^n f(t)\,dt$$
$$\int_1^n f(t)\,dt \le f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) + f(n).$$

▶ Poiché f è crescente, si ha $\mathrm{m}_a^b(f) = f(a)$ e $\mathrm{M}_a^b(f) = f(b)$. Perciò $f(1)+\dots+f(n-1)$ e $f(2) + \dots + f(n)$ sono rispettivamente la somma inferiore e la somma superiore rispetto alla suddivisione $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$. ◀

Vediamo un esempio. Sia $f(x) = x^2$; il teorema ci dà un modo di valutare la somma $S_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2$: infatti f è crescente su $[1 \mathrel{..} \to)$ e perciò

$$S_{n-1} \le \int_1^n t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=n} \le S_n - 1.$$

Dunque

$$S_{n-1} \le \frac{n^3-1}{3} \le S_n - 1.$$

Per lo stesso motivo,

$$\frac{n^3}{3} + \frac{2}{3} \le S_n \le \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

e possiamo dividere per n^3:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3n^3} \le \frac{S_n}{n^3} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

e, per il teorema di confronto dei limiti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Con la stessa tecnica, si dimostri che, se

$$S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \dots + n^k,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^{(k)}}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Per funzioni decrescenti vale ovviamente una coppia di disuguaglianze analoghe.

TEOREMA. *Se f è una funzione continua e decrescente su $[1 \mathrel{..} \to)$, allora, per ogni intero $n > 1$,*

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-2) + f(n-1) \ge \int_1^n f(t)\,dt$$
$$\int_1^n f(t)\,dt \ge f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) + f(n).$$

Se prendiamo $f(x) = 1/x^2$, definita su $(0\ ..\ \to)$, essa è descrescente. Se poniamo $A(2)_n = f(1) + \dots + f(n)$, abbiamo, per $n > 1$,

$$A(2)_{n-1} \geq \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_{t=1}^{t=n} \geq A(2)_n - 1,$$

quindi, calcolando l'integrale,

$$A(2)_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$$

che quindi dà

$$A(2)_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

In particolare la successione $A(2)$, che è crescente, converge. Alla stessa conclusione si giunge con $A(s)$ definita da

$$A(s)_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s}$$

per $s > 1$, perché l'integrale corrispondente vale

$$\int_1^n \frac{1}{t^s}\,dt = \left[-\frac{1}{(s-1)t^{s-1}}\right]_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$$

e quindi $A(s)_n \leq 1/(s-1) + 1 = s/(s-1)$.

Per $s = 1$, invece, si ha

$$A(1)_{n-1} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \big[\log t\big]_{t=1}^{t=n} = \log n$$

e perciò $\lim_{n\to+\infty} A(1)_n = +\infty$.

Usualmente si pone, per $s > 1$, $\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} A(s)_n$. La funzione che così si ottiene si chiama *funzione zeta di Riemann*, sebbene sia stata studiata inizialmente da Euler. Riemann ne estese la definizione e dimostrò importanti connessioni della funzione zeta più generale con i numeri primi. Una congettura di Riemann sulla funzione zeta è uno dei più importanti problemi aperti della matematica, e non solo per il premio da un milione di dollari promesso da un istituto di ricerca.

Euler dimostrò che $\lim_{n\to+\infty} A(2)_n = \zeta(2) = \pi^2/6$, chiudendo così una questione nota come *problema di Basilea* perché fu ripreso da Johan Bernoulli, sebbene fosse stato posto da Pietro Mengoli (1626–1686). In effetti sulla dimostrazione di Euler ci sarebbero parecchi rilievi da fare, ma l'idea di fondo era corretta.

C'è un altro modo di dimostrare che la successione $A(1)$ non converge. Osserviamo che se $n \in \mathbb{N}$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^m - 1 \leq n < 2^{m+1} - 1$; quindi, se dimostriamo che la successione b definita da $b_m = A(1)_{2^m-1}$ non converge, nemmeno l'altra converge. I numeri naturali da 1 a $2^m - 1$ sono quelli che, in notazione binaria, si scrivono con al massimo m cifre. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{1_2}\\
b_2 &= \frac{1}{1_2} + \left(\frac{1}{10_2} + \frac{1}{11_2}\right)\\
b_3 &= \frac{1}{1_2} + \left(\frac{1}{10_2} + \frac{1}{11_2}\right) + \left(\frac{1}{100_2} + \frac{1}{101_2} + \frac{1}{110_2} + \frac{1}{111_2}\right)
\end{aligned}$$

e così via (non usiamo il sistema binario per gli indici). Se al posto delle frazioni con un denominatore di k cifre binarie scriviamo $1/2^{k+1}$, otteniamo un numero minore di b_m che indichiamo con b'_m. Ogni gruppo in parentesi racchiude le frazioni il cui denominatore ha lo stesso numero di cifre binarie; se le cifre sono k, i numeri del gruppo sono esattamente 2^k. Perciò

$$\begin{aligned}
b'_1 &= 2^0\frac{1}{2} = \frac{1}{2},\\
b'_2 &= 2^0\frac{1}{2} + 2^1\frac{1}{2^2} = \frac{2}{2},\\
b'_3 &= 2^0\frac{1}{2} + 2^1\frac{1}{2^2} + 2^2\frac{1}{2^3} = \frac{3}{2},\\
&\dots\\
b'_m &= 2^0\frac{1}{2} + \dots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = \frac{m}{2}.
\end{aligned}$$

Dunque è chiaro che $\lim_{m\to+\infty} b'_m = +\infty$ e perciò anche $\lim_{m\to+\infty} b_m = +\infty$.

È interessante notare che con una tecnica analoga si dimostra la convergenza di $A(2)$. Scriviamo ancora $c_m = A(2)_{2^m-1}$ e vediamo i primi termini:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{(1_2)^2}\\
c_2 &= \frac{1}{(1_2)^2} + \left(\frac{1}{(10_2)^2} + \frac{1}{(11_2)^2}\right)\\
c_3 &= \frac{1}{(1_2)^2} + \left(\frac{1}{(10_2)^2} + \frac{1}{(11_2)^2}\right) + \left(\frac{1}{(100_2)^2} + \frac{1}{(101_2)^2} + \frac{1}{(110_2)^2} + \frac{1}{(111_2)^2}\right)
\end{aligned}$$

ma questa volta pensiamo di sostituire ogni frazione con denominatore di k cifre con $1/2^k$. Se l è un numero che nel sistema binario si scrive con k cifre, allora $2^k \le l$, da cui $1/2^k \ge 1/l$. Perciò, con queste sostituzioni, otteniamo un numero $c'_m \ge c_m$ e

$$\begin{aligned}
c'_1 &= 2^0\frac{1}{1^2} = 1,\\
c'_2 &= 2^0\frac{1}{1^2} + 2^1\frac{1}{(2^1)^2} = 1 + \frac{1}{2},\\
c'_3 &= 2^0\frac{1}{1^2} + 2^1\frac{1}{(2^1)^2} + 2^2\frac{1}{(2^2)^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\\
&\dots\\
c'_m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Ma questa è un'espressione che sappiamo trattare: se $x \ne 1$,

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = \frac{1 - x^m}{1 - x}$$

e, per $x = 1/2$, abbiamo

$$c'_m = 2\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) < 2.$$

Dunque la successione c' è crescente e limitata; allora anche c è crescente e limitata e così per $A(2)$. Si noti come il ragionamento con gli integrali sia molto più diretto e non richieda trucchi ingegnosi.

Se si prova a usare il secondo trucco con $A(1)$ si ottiene solo la maggiorazione

$$b_m \le m$$

che non dà alcuna informazione sulla convergenza di b.

6.8 FRAZIONI ALGEBRICHE E INTEGRALI

Se P e Q sono polinomi, in linea di principio è possibile trovare una primitiva di $f(x) = P(x)/Q(x)$. Infatti l'unico ostacolo è la fattorizzazione di Q come prodotto di fattori irriducibili. È noto, anche se non facile da dimostrare, che i polinomi irriducibili sui reali sono solo quelli di grado 1 e quelli di grado 2 con discriminante negativo. La ricerca di una primitiva di una frazione algebrica poggia sul seguente risultato, ma anche sulle osservazioni che: (1) non è restrittivo supporre che il grado di P sia minore del grado di Q, perché si può eseguire la divisione con resto; (2) non è restrittivo supporre che P e Q non abbiano fattori comuni, perché il massimo comune divisore si può determinare con l'algoritmo di Euclide.

Un fattore irriducibile R del polinomio Q si dice di *molteplicità* m se R^m divide Q ma R^{m+1} non divide Q.

TEOREMA. *Siano P e Q polinomi senza fattori comuni con il grado di P minore del grado di Q. Se R è un fattore irriducibile di Q di molteplicità m, allora si può scrivere*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S_1(x)}{R(x)} + \frac{S_2(x)}{R(x)^2} + \dots + \frac{S_m(x)}{R(x)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

dove Q_1 non è divisibile per R e i polinomi $S_1, S_2, \dots, S_m$ hanno grado minore del grado di R.

Non daremo la dimostrazione, che richiede conti piuttosto complicati. Come si può fare in pratica? Si applica il teorema ripetutamente finché si esauriscono i fattori irriducibili di Q: infatti il teorema vale anche per la frazione P_1/Q_1. A questo punto non occorre aver già calcolato i numeratori S, perché si può usare il *metodo dei coefficienti indeterminati.* Supponiamo, per esempio, che $Q(x) = x(x-1)^3(x^2+1)^2$. L'applicazione ripetuta del teorema ci dice che possiamo scrivere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}.$$

Le incognite sono otto e il grado di P è al massimo sette; quindi i coefficienti non nulli di P sono al massimo otto e riscrivendo il membro di destra come unica frazione algebrica possiamo adoperare il principio di identità dei polinomi. Ma non occorre nemmeno eseguire troppi calcoli con le frazioni, basta usare il valore delle funzioni in punti opportuni.

Supponiamo, per esempio, $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$. Calcoliamo $P(2)/Q(2) = 3/50$, quindi anche

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{1} + \frac{C}{1^2} + \frac{D}{1^3} + \frac{2E+F}{5} + \frac{2G+H}{5^2} = \frac{3}{50}.$$

Si possono usare altri punti per ottenere le sette equazioni ancora necessarie. L'importante è vedere che si ottiene un sistema lineare.

Vediamo un esempio certamente più semplice con la funzione

$$f(x) = \frac{x^4+3x^2+1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$$

che ammette la decomposizione

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Qui forse è più semplice scrivere ciò che si ottiene mettendo tutto allo stesso denominatore:

$$\begin{aligned} f(x)(x(x-1)^2(x^2+1) &= A(x-1)^2(x^2+1) + Bx(x-1)(x^2+1) \\ &\quad + Cx(x^2+1) + (Dx+E)x(x-1)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A+B+D)x^4 \\
&\qquad + (-2A-B+C-2D+E)x^3 \\
&\qquad + (2A+B+D-E)x^2 \\
&\qquad + (-2A-B+C+E)x + A
\end{aligned}
$$

e il principio di uguaglianza dei polinomi dice

$$
\begin{cases}
A = 1 \\
-2A - B + C + E = 0 \\
2A + B + D - E = 3 \\
-2A - B + C - 2D + E = 0 \\
A + B + D = 1
\end{cases}
$$

da cui si ottiene

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = 1, \quad E = -1$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

È facile a questo punto calcolare una primitiva di f:

$$\int^x f(t)\,dt = \log|x| - \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + \int^x \frac{t-1}{t^2+1}\,dt,$$

dove teniamo da parte l'ultima frazione parziale, unica che richiede un trattamento più attento:

$$
\begin{aligned}
\int^x \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt - \int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x.
\end{aligned}
$$

Più in generale, quando si deve calcolare la primitiva della funzione $f(x) = (Ax + B)/(ax^2 + bx + c)$, occorre procedere in questo modo. Prima di tutto si vede se il denominatore ha radici e, in tal caso, si può trovare la decomposizione in frazioni parziali come prima. Dunque supponiamo che $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; la solita tecnica di completamento del quadrato ci permette di scrivere

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + b^2 - \Delta) = \frac{1}{4a}((2ax+b)^2 - \Delta).$$

Poniamo allora $\delta = \sqrt{-\Delta}$ e calcoliamo la primitiva

$$
\begin{aligned}
\int^x \frac{At+B}{at^2+bt+c}\,dt &= \int^x \frac{4a(At+B)}{(2at+b)^2+\delta^2}\,dt \\
&= (\dots)\left[\delta u = 2at + b; \qquad du = \frac{2a}{\delta}\,dt\right] \\
&= \int^{(\delta x - b)/(2a)} \frac{Cu+D}{u^2+1}\,du
\end{aligned}
$$

dove C e D sono opportuni coefficienti. A questo punto il calcolo è facile:

$$\int^x \frac{Ct+D}{t^2+1}\,dt = \frac{C}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt + D\int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

che è del tutto simile al precedente. Inutile scrivere la formula esplicita, molto meglio lavorare a un esempio:

$$\int^x \frac{3t+1}{t^2+4t+20}\,dt.$$

Completiamo il quadrato al denominatore:

$$t^2 + 4t + 20 = t^2 + 4t + 4 + 16 = (t + 2)^2 + 4^2$$

e quindi la sostituzione da eseguire è $2u = t + 2$, quindi $dt = 2\,du$ e

$$3t + 1 = 3\Bigl(\frac{u}{2} - 2 + 1\Bigr) = \frac{3}{2}(u - 2).$$

Perciò l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int^x \frac{3t+1}{t^2+4t+20}\,dt &= 2\frac{3}{2}\frac{1}{4}\int^{(x+2)/2} \frac{u-2}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{3}{8}\int^{(x+2)/2} \frac{2u}{u^2+1}\,du + \frac{3}{4}\int^{(x+2)/2} \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{3}{8}\Bigl[\log(u^2+1)\Bigr]^{u=(x+2)/2} + \frac{3}{4}\Bigl[\arctan u\Bigr]^{u=(x+2)/2}\end{aligned}$$

e si può scrivere l'espressione esplicita senza alcuna difficoltà.

Più complicato è trovare una primitiva di $f(x) = 1/(x^2+1)^2$, a cui si riduce, con sostituzioni analoghe a quelle precedenti, il calcolo quando nel denominatore della frazione originale ci sia il quadrato di un polinomio di secondo grado con discriminante negativo. Il trucco è di scrivere

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Una primitiva del primo addendo è nota; esaminiamo il secondo, integrando per parti: prendiamo $\varphi(x) = x/2$ come fattore finito e $\psi(x) = 2x/(x^2+1)^2$ come fattore differenziale. Infatti una primitiva di ψ è $\Psi(x) = -1/(x^2+1)$ perché al numeratore c'è la derivata di $x \mapsto x^2 + 1$. Dunque

$$\int^x \frac{t}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{x}{2}\frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x,$$

come si può controllare derivando e, per la primitiva che stavamo cercando,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt &= \int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int^x \frac{t^2}{t^2+1}\,dt \\ &= \arctan x - \Bigl(-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\Bigr) \\ &= \frac{1}{2}\Bigl(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\Bigr).\end{aligned}$$

Per le potenze superiori ci si deve armare di pazienza e ripetere il trucco più volte. Oppure consultare `http://integrals.wolfram.com` dove si possono ottenere tutti gli integrali che si desiderano (quasi).

6.9 INTEGRALI E AREE

Consideriamo un triangolo rettangolo; prendiamo la retta di uno dei cateti come asse delle ascisse, come origine il vertice dell'angolo *non* retto. Stabiliamo che i versi positivi dell'asse delle ascisse e delle ordinate siano in modo che il vertice dell'altro angolo non retto sia nel primo quadrante. La retta che passa per i due vertici degli angoli non retti avrà così equazione

$$y = \frac{b}{a}x$$

se con a indichiamo la misura del cateto sull'asse delle ascisse e con b la misura dell'altro cateto. Allora

$$\int_0^a \frac{b}{a} t\,dt = \frac{b}{a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=a} = \frac{b}{a}\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}ab$$

come era facile attendersi.

Qual è il succo di questo discorso? Che nei casi in cui l'area è facilmente definibile, cioè per i poligoni, l'integrale fornisce esattamente lo stesso risultato. A questo punto il passo è quasi ovvio: invece di lunghe contorsioni per definire in modo 'geometrico' l'area delle figure delimitate da curve, usiamo l'integrale!

Supponiamo, per esempio, di voler calcolare l'area della parte di piano delimitata dalle due parabole di equazioni

$$y = 5x^2, \qquad y = -3x^2 + 2.$$

Le due parabole si incontrano nei punti di coordinate

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

e un semplice raffronto mostra che l'area deve essere la differenza degli integrali

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} (-3t^2 + 2)\,dt - \int_{-1/2}^{1/2} 5t^2\,dt &= \int_{-1/2}^{1/2} (-8t^2 + 2)\,dt \\ &= \left[-8\frac{t^3}{3} + 2t\right]_{t=-1/2}^{t=1/2} \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{2}{3},\end{aligned}$$

come si potrebbe calcolare anche dalla formula di Archimede. Già che ci siamo, vediamo che anch'essa funziona. L'area del settore definito sulla parabola di equazione $y = ax^2$ (con $a > 0$) dai punti (p, ap^2) e (q, aq^2), con $p < q$, è la differenza tra l'area "sotto la retta" e quella "sotto la parabola", naturalmente delimitate entrambe dall'asse delle ascisse. L'area "sotto la retta" è calcolabile senza integrali, dal momento che la figura è un poligono, in particolare un trapezio rettangolo:

$$\frac{1}{2}(ap^2 + aq^2)(q - p)$$

mentre quella "sotto la parabola" è, per definizione,

$$\int_p^q at^2\,dt = \left[\frac{at^3}{3}\right]_{t=p}^{t=q} = \frac{a}{3}(q^3 - p^3).$$

La differenza è dunque

$$\frac{a}{6}(q - p)\big(3(p^2 + q^2) - 2(q^2 + pq + p^2)\big) = \frac{a}{6}(q - p)^3$$

esattamente come calcolato in precedenza.

Abbiamo già visto come l'integrale fornisca il valore "corretto" per l'area del cerchio; non solo, anche il procedimento che ha dimostrato l'esistenza dell'integrale si basava sull'idea dell'esaustione. Dunque è perfettamente sensato *definire* l'area tramite l'integrale e dimenticarsi di tutti i complicati procedimenti per calcolare aree strane.

Non è difficile generalizzare l'esempio precedente; diamo la regola pratica, supponendo di dover calcolare l'area compresa tra archi di curve esprimibili come grafici di funzioni. Si numerano i punti di intersezione come

$$A_0(x_0, y_0),\ A_1(x_1, y_1),\ \dots,\ A_{n-1}(x_{n-1}, y_n),\ A_n = A_0,$$

girando attorno alla regione di piano in senso orario. Chiamiamo f_k ($k = 1, \dots, n$) la funzione il cui grafico costituisce il "lato" della figura da A_{k-1} a A_k. Allora l'area richiesta si ottiene con

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(t)\,dt.$$

Se per caso fra i "lati" della figura ci fossero segmenti verticali, l'integrale non avrebbe senso e semplicemente lo si omette. Si noti che certamente alcuni di quegli integrali saranno su intervalli "rovesci", ma questo non ci dà alcun problema.

Facciamo un esempio. Sono date $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^2$ e si vuole calcolare l'area determinata dalle due curve, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $y = 3-2x$ I punti da considerare sono $A_0(0,0)$, $A_1(1,1)$, $A_2(r, 3-2r)$ e $A_3(1,0)$, con $A_4 = A_0$. Qui r è la soluzione dell'equazione $\log x = 3 - 2x$. La regola pratica dice dunque che l'area cercata è

$$\int_0^1 t^2\,dt + \int_1^r (3-2t)\,dt + \int_r^1 \log t\,dt + \int_1^0 0\,dt$$

e calcoleremo gli integrali uno alla volta (escluso naturalmente l'ultimo):

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\\
&\int_1^r (3-2t)\,dt = \Big[3t - t^2\Big]_{t=1}^{t=r} = (3r - r^2) - (3-1) = 3r - r^2 - 2;\\
&\int_r^1 \log t\,dt = \Big[(t-1)\log t\Big]_{t=r}^{t=1} = -(r-1)\log r = -(r-1)(3-2r);
\end{aligned}$$

Perciò l'area richiesta è

$$\frac{1}{3} + 3r - r^2 - 2 - 3r + 3 + 2r^2 - 2r = r^2 - 2r + \frac{4}{3}.$$

Se invece l'area da calcolare è quella delimitata dai grafici delle due funzioni e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = 2$ si può fare allo stesso modo: i punti sono $A_0(1,1)$, $A_1(2,4)$, $A_2(2, \log 2)$, $A_3(1,0)$ e $A_4 = A_0$. L'area è dunque

$$\begin{aligned}
\int_1^2 t^2\,dt + \int_2^1 \log t\,dt &= \Big[t^3/3\Big]_{t=1}^{t=2} + \Big[t(\log t - 1)\Big]_{t=2}^{t=1}\\
&= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + (-1 - 2\log 2 + 2)\\
&= \frac{10}{3} - 2\log 2.
\end{aligned}$$

6.10 INTEGRALI IMPROPRI

In certi casi succede un fatto curioso: consideriamo la funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}$ che è definita in $(0 \mathrel{..} \rightarrow)$ e fissiamo x con $0 < x < 1$; allora

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_{t=x}^{t=1} = 2 - \sqrt{x}$$

e $\lim_{x\to 0} F(x) = 2$. Intuitivamente, l'area sottostante la curva $y = 1/\sqrt{x}$ compresa tra l'asse delle ordinate, l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = 1$ è "finita", pur se la figura non è limitata nel piano. Dobbiamo prendere molto sul serio questa asserzione? No, ma possiamo semplicemente definire

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

senza preoccuparci di darne una "giustificazione geometrica".

DEFINIZIONE. *Sia f una funzione continua nell'intervallo $(a\mathrel{..}b]$. Se esiste finito il*

$$\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt$$

allora si dice che l'integrale improprio $\int_a^b f(t)\,dt$ converge e si pone

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt.$$

Analoga definizione si dà per una funzione continua in $[a\mathrel{..}b)$. È chiaro da quanto abbiamo visto che, se per caso f è continua su $[a\mathrel{..}b]$, allora di sicuro

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt$$

(finito) perché sotto il limite c'è proprio la funzione integrale che è derivabile e quindi continua. Analogamente per il limite verso l'estremo sinistro dell'intervallo. Quindi le due nozioni non danno risultati diversi quando la funzione sia effettivamente continua in $[a\mathrel{..}b]$ oppure, anche, sia definita e continua in $[a\mathrel{..}b)$ e $\lim_{x\to b} f(x)$ sia finito.

Consideriamo ora $f(x) = \exp(-x)$ che consideriamo definita su $[0\mathrel{..}\to)$; allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \exp(-t)\,dt &= \lim_{x\to+\infty}\Bigl[-\exp(-t)\Bigr]_{t=0}^{t=x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}(-\exp(-x)+\exp 0) = 1\end{aligned}$$

e ci ritroviamo in una situazione del tutto simile a prima. Anche qui daremo la definizione di *integrale improprio*.

DEFINIZIONE. *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a\mathrel{..}\to)$; se esiste finito il*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$

allora si dice che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge e si pone

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt.$$

In molti casi non è possibile calcolare esplicitamente un integrale, ma nel caso di funzioni continue su un intervallo chiuso sappiamo comunque che ha un certo valore. Si possono usare criteri di vario tipo per determinare se un integrale improprio converge. Ne enunceremo uno molto utile e spesso conclusivo; l'enunciato sarà per funzioni continue su $[a\mathrel{..}\to)$, ma vale anche per gli integrali impropri "al finito", come si può vedere per esercizio apportando le dovute modifiche alla dimostrazione. La scrittura $f \le g$ significa $f(x) \ge g(x)$ per ogni x del dominio di f e g che si suppone uguale; $0 \le f$ significa dunque che $f(x) \ge 0$, per ogni x del dominio di f (con 0 denotiamo anche la funzione costante nulla).

TEOREMA. *Siano f e g funzioni continue su $[a \mathinner{..} \rightarrow)$ tali che $0 \le f \le g$. Se*

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

converge, allora converge anche

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

▶ Le funzioni integrali $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ sono crescenti e, per le disuguaglianze tra gli integrali, si ha

$$F(x) \le G(x).$$

Siccome, per ipotesi, $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ è finito, F è limitata e perciò necessariamente anche $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ è finito. ◀

Nel caso in cui la funzione f sia continua su $(a \mathinner{..} \rightarrow)$ daremo un senso anche alla scrittura $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ma solo quando entrambi i limiti

$$\lim_{x\to a} \int_x^{a+1} f(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_{a+1}^{x} f(t)\,dt$$

esistono finiti e l'integrale improprio sarà la somma dei due limiti. Al posto di $a+1$ si può ovviamente usare qualsiasi $b \in (a \mathinner{..} \rightarrow)$.

Vediamo un esempio abbastanza bizzarro: l'integrale su $(0 \mathinner{..} \rightarrow)$ di $f(x) = (\sin x)/x$ converge. Per

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

il problema non si pone, dal momento che f può essere estesa a una funzione continua su $[0 \mathinner{..} \pi/2]$. Dunque ci rimane l'integrale sulla parte illimitata, che studieremo integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt &= \left[(-\cos t)\frac{1}{t}\right]_{t=\pi/2}^{t=x} - \int_{\pi/2}^{x} (-\cos t)\frac{-1}{t^2}\,dt \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \int_{\pi/2}^{x} \frac{-\cos t}{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Ci serve dunque calcolare il limite dell'integrale che rimane. Consideriamo

$$-\frac{\cos t}{t^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1-\cos t}{t^2}.$$

Sappiamo che $\int_{\pi/2}^{+\infty} (1/t^2)\,dt$ converge, quindi ci basterà vedere che converge

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

Ora, si ha $0 \le (1-\cos t)/t^2 \le 2/t^2$, dal momento che $1-\cos t \le 2$. Per il teorema sulla convergenza, abbiamo allora che, siccome $\int_{\pi/2}^{+\infty} (2/t^2)\,dt$ converge, converge anche l'integrale che ci interessa.

Dirichlet dimostrò che $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t\,dt = \pi/2$. La funzione

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ha proprietà molto interessanti e si chiama 'seno integrale'. Quanto dimostrato da Dirichlet equivale a dire che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Si} x = \pi/2$ ed è immediato verificare che $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Si} x = -\pi/2$.

Per il teorema fondamentale, si ha $\operatorname{Si}' x = (\sin x)/x$ e quindi la derivata si annulla nei punti $k\pi$ per k intero, $k \ne 0$. La derivata seconda è

$$\operatorname{Si}'' x = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

e conviene usare questa per stabilire quali siano i punti di massimo e di minimo di Si. Infatti, per $k = 2n$ pari ($n \neq 0$) si ha

$$\mathrm{Si}''(2n\pi) = \frac{2n\pi\cos(2n\pi) - \sin(2n\pi)}{(2n\pi)^2} = \frac{1}{2n\pi} > 0$$

mentre per $k = 2n + 1$ dispari si ha

$$\mathrm{Si}''((2n+1)\pi) = \frac{(2n+1)\pi\cos((2n+1)\pi) - \sin((2n+1)\pi)}{((2n+1)\pi)^2} = -\frac{1}{(2n+1)\pi} < 0.$$

Dunque Si è convessa in un intorno dei punti $2n\pi$ ($n \neq 0$) e concava in un intorno dei punti $(2n+1)\pi$: quindi i primi sono punti di minimo, i secondi punti di massimo. In 0 c'è un flesso:

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}''\,0 &= \lim_{x\to 0}\mathrm{Si}''\,x = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0.\end{aligned}$$

Gli altri flessi sono le soluzioni non nulle di $\tan x = x$. Il grafico attraversa ciascuno dei due asintoti infinite volte.

6.11 LA FUNZIONE GAMMA

Ci proponiamo di vedere che, per ogni $z > 0$, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1}\exp(-t)\,dt$$

converge. La funzione $f_z(x) = x^{z-1}\exp(-x)$ è continua in $(0 \mathrel{..} \to)$ e positiva. Spezziamo in due l'integrale improprio:

$$\int_0^1 t^{z-1}\exp(-t)\,dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}\exp(-t)\,dt$$

e valutiamo la convergenza separatamente. Vediamo il secondo, dando una maggiorazione: se n è un intero con $n > z - 1$, abbiamo, per $x \geq 1$,

$$x^{z-1}\exp(-x) \leq x^n\exp(-x)$$

e quindi ci basta dimostrare che

$$\int_1^{+\infty} t^n\exp(-t)\,dt$$

converge. Dimostriamo, per induzione su n, che una primitiva della funzione $g_n(x) = x^n\exp(-x)$ è della forma $G_n(x) = P_n(x)\exp(-x)$, dove P_n è un polinomio di grado al più n. L'asserzione è vera per $n = 0$, infatti $G_0(x) = (-1)\exp(-x)$. Ora calcoliamo per parti:

$$\int^x t(t^n\exp(-t))\,dt = xP_n(x)\exp(-x) - \int^x P_n(t)\exp(-t)\,dt$$

e, esplicitando P_n, possiamo usare l'ipotesi induttiva su tutti gli addendi che si ottengono. Quindi una primitiva di $x \mapsto P_n(x)\exp(-x)$ è una funzione del tipo $x \mapsto Q_n(x)\exp(-x)$ con Q_n polinomio di grado al più n e, in definitiva,

$$\int^x t^{n+1}\exp(-t)\,dt = (xP_n(x) - Q_n(x))\exp(-x)$$

come si desiderava. Adesso possiamo calcolare il limite:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} t^n \exp(-t)\,dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x t^n \exp(-t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{P_n(t)}{\exp t}\right]_{t=1}^{t=x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{\exp x} - \frac{P_n(1)}{e} \\ &= -\frac{P_n(1)}{e}\end{aligned}$$

perché $\lim_{x\to+\infty} x^k/\exp x = 0$ per ogni $k > 0$, come si vede applicando k volte il teorema di l'Hôpital. Naturalmente questo prova anche che $P_n(1) < 0$, ma non ha alcuna importanza.

Affrontiamo l'altro integrale; per $z \geq 1$ la funzione $x \mapsto x^{z-1}\exp(-x)$ è definita e continua in $[0\mathinner{..}1]$, quindi l'integrale non ci dà alcun problema. Il caso dubbio quindi è quello di $0 < z < 1$. Ma in tal caso, per $x \in (0\mathinner{..}1)$, si ha

$$x^{z-1}\exp(-x) \leq x^{z-1}$$

e abbiamo

$$\int_0^1 t^{z-1}\,dt = \lim_{x\to 0} t^{z-1}\,dt = \lim_{x\to 0}\left[\frac{t^z}{z}\right]_{t=x}^{t=1} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^z}{z} = 1$$

e quindi anche il nostro integrale converge. Secondo la notazione introdotta da Adrien-Marie Legendre (1752–1833), si pone

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\exp(-t)\,dt.$$

Per $z = 1$ l'integrale è facile:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\,dt = 1.$$

Per fare i conti scriviamo anche

$$\Gamma(z;x) = \int_0^x t^{z-1}\exp(-t)\,dt$$

che consideriamo come funzione di x: per definizione, $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(z;x) = \Gamma(z)$. Supponiamo $z \geq 1$ e proviamo a integrare per parti

$$\begin{aligned}\int_0^x t^z\exp(-t)\,dt &= \left[-t^z\exp(-t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x zt^{z-1}\exp(-t)\,dt \\ &= -x^z\exp(-x) + z\Gamma(z;x).\end{aligned}$$

Passando al limite per $x \to +\infty$, otteniamo

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z\exp(-t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}(-x^z\exp(-x) + z\Gamma(z;x)) = z\Gamma(z)$$

perché il primo addendo nel limite va a 0. Questa è chiamata la *relazione funzionale* della funzione gamma:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Noi l'abbiamo verificata solo per $z \geq 1$, ma si può vedere (con due limiti invece di uno) anche per $0 < z < 1$. In particolare si ha

$$\Gamma(1) = 1 = 0! \quad \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1\cdot 0! = 1! \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1! = 2!$$

e, più in generale, $\Gamma(n+1) = n!$ e questa è una delle proprietà che rendono molto interessante la funzione gamma.

La relazione funzionale può essere usata per estendere la funzione stessa: se $-1 < z < 0$, abbiamo $0 < z+1 < 1$ e possiamo porre *per definizione*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

ma naturalmente non possiamo farlo per $z = -1$ né per $z = 0$: infatti per $z = -1$ abbiamo che $\Gamma(z+1)$ non ha senso e per $z = 0$ non ha senso la frazione (nemmeno con un passaggio al limite, perché $\Gamma(1) = 1$).

Se $-2 < z < -1$ possiamo usare la stessa relazione e procedere allo stesso modo definendo Γ su tutti i numeri negativi, purché non interi.

La funzione Γ è anche legata a π; consideriamo

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2;x) &= \int_0^x t^{-1/2}\exp(-t)\,dt \\ &= (\dots)\Bigl[u = t^{1/2};\quad t = u^2;\quad dt = 2u\,du\Bigr] \\ &= 2\int_0^{\sqrt{x}} \exp(-u^2)\,du\end{aligned}$$

e perciò

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\exp(-t)\,dt = 2\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)\,du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

C'è anche un interessante legame con la funzione zeta di Riemann: per $z > 1$ si ha

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty}\frac{t^z}{e^t-1}\,dt$$

che non proveremo nemmeno a dimostrare.

6.12 INTEGRAZIONE NUMERICA

La stessa dimostrazione dell'esistenza dell'operatore Int ci permette di ottenere valori approssimati di un integrale. Tuttavia ha un grave limite: occorrerebbe calcolare, in ogni sottointervallo di una suddivisione, il valore minimo e massimo della funzione. È chiaro che questo è un ostacolo troppo grande, perché renderebbe i calcoli davvero complicati. La valutazione numerica degli integrali parte dalla seguente osservazione: non occorre conoscere il massimo e il minimo. Vediamo perché.

Data una suddivisione S dell'intervallo $[a \mathinner{..} b]$, che pensiamo data come $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, consideriamo per $j = 1, 2, \dots, n$ un numero $z_j \in [x_{j-1} \mathinner{..} x_j]$. Avremo perciò $z_1 \le z_2 \le \dots \le z_n$ e possiamo eseguire la seguente operazione:

$$\Psi_{S,Z}(f) = (x_1 - x_0)f(z_1) + (x_2 - x_1)f(z_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(z_n)$$

dove con Z denotiamo la successione $z_1 \le \dots \le z_n$. Siccome per definizione si ha, con le stesse notazioni usate nella dimostrazione dell'esistenza dell'operatore integrale,

$$m_{S,1} \le f(z_1) \le M_{S,1},\quad m_{S,2} \le f(z_2) \le M_{S,2},\quad \dots,\quad m_{S,n} \le f(z_n) \le M_{S,n}$$

avremo dunque

$$\sigma_S(f) \le \Psi_{S,Z}(f) \le \Sigma_S(f).$$

Poiché per suddivisioni abbastanza fitte la differenza $\Sigma_S(f) - \sigma_S(f)$ diventa minore di qualsiasi tolleranza prefissata, possiamo usare $\Psi_{S,Z}(f)$ come valore approssimato dell'integrale.

Il metodo che viene subito alla mente è quello cosiddetto dei *rettangoli*: si sceglie sempre $z_j = x_j$. Vediamo che succede con una suddivisione in quattro parti, tanto per non complicare troppo i conti:

$$\Psi_{S,+}(f) = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + (x_3 - x_2)f(x_3) + (x_4 - x_3)f(x_4)$$

Con $+$ indichiamo questa particolare scelta di z_j. Non è difficile arrivare alla formula generale:

$$\Psi_{S,+}(f) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})f(x_j).$$

È chiaro che l'approssimazione così ottenuta sarà per difetto se la funzione è decrescente in $[a \mathinner{..} b]$ e per eccesso se f è crescente. È chiaro anche che si può fare la scelta opposta, cioè di considerare sempre $z_j = x_{j-1}$; proviamo a vedere come diventa la formula nel caso di quattro punti:

$$\Psi_{S,-}(f) = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + (x_4 - x_3)f(x_3)$$

e, in generale,

$$\Psi_{S,-}(f) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})f(x_{j-1}).$$

Se prendiamo la media di queste due approssimazioni in molti casi otteniamo un'approssimazione migliore: è il cosiddetto *metodo dei trapezi*, si cerchi di capire il perché del nome. Avremo

$$I_S^{(1)}(f) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}.$$

Vediamo un esempio, il calcolo di π con questo metodo. Sapendo che

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

suddividiamo l'intervallo $[0 \mathinner{..} 1]$ in quattro parti uguali, facendo una tabella dei valori che ci servono:

	x_j	$f(x_j)$	$(f(x_{j-1} + f(x_j))/2$
$j = 0$	0,00	1,00000000000000000000	
$j = 1$	0,25	0,94117647058823529411	0,97058823529411764705
$j = 2$	0,50	0,80000000000000000000	0,87058823529411764705
$j = 3$	0,75	0,64000000000000000000	0,72000000000000000000
$j = 4$	1,00	0,50000000000000000000	0,57000000000000000000

Ne deriviamo il valore approssimato

$$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}78279411764705882352$$

cioè $\pi \approx 3{,}13117647058823529408$ che non è molto buono. Se ripetiamo il conto dividendo in otto parti, otteniamo

$$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}78474712362277225232$$

che darebbe $\pi \approx 3{,}13898849449108900928$, ancora lontano dal valore 'vero'. Dividendo in venti parti uguali avremmo $\pi/4 \approx 0{,}78529399673853211585$ che corrisponde a

$\pi \approx 3{,}14117598695412846340$, con sole tre cifre decimali esatte. Per calcoli del genere un foglio di lavoro è molto utile; con cento parti avremmo $\pi/4 \approx 3{,}14157598692313$, quattro cifre decimali esatte.

Se proviamo con l'integrale $\int_1^2 (1/x)\,dx$, con la divisione in cento parti, abbiamo $\log 2 \approx 0{,}693153430481824$, che ha quattro cifre decimali esatte. È chiaro che l'approssimazione è tanto migliore quanto meno il grafico della funzione si discosta poco, fra un punto e l'altro della suddivisione, dal segmento che congiunge i punti $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ e $(x_j, f(x_j))$.

Quando decidiamo di suddividere l'intervallo $[a\,..\,b]$ in n parti uguali, la formula si semplifica parecchio; infatti $x_j - x_{j-1} = (b-a)/n$ e quindi avremo

$$I_S^{(1)}(f) = \frac{b-a}{n}\biggl(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n}j)\biggr).$$

Si scriva questa somma nel caso di $n = 4$ per convincersene: tutti i termini del tipo $f(x_j)$ compaiono due volte tranne quello con $j = 0$ e $j = n$. In questo caso abbiamo anche, ponendo $k = (b-a)/n$,

$$\Psi_{S,-}(f) = k\sum_{j=0}^{n-1} f(a + jk)$$

e quindi

$$I_S^{(1)}(f) - \Psi_{S,-}(f) = k\frac{f(b)-f(a)}{2} = \Psi_{S,+}(f) - I_S^{(1)}(f)$$

che mostra come non si ha un grande guadagno usando questo metodo invece di quello dei rettangoli. Naturalmente un trucco efficiente per usarlo è di raddoppiare i punti della suddivisione, in modo da non dover buttar via i dati già raccolti, dovendo calcolare solo i valori di f nei punti di mezzo degli intervalli precedenti.

7 SERIE

Il concetto di serie è entrato nella matematica molto tempo fa, dapprima in modo confuso e impreciso: l'idea era di eseguire somme di infiniti termini costruiti in modo 'uniforme'. Newton basò i suoi metodi di 'calcolo delle fluenti e delle flussioni', cioè calcolo di derivate e integrali, proprio sulle serie: uno dei suoi attrezzi era, per esempio, la serie binomiale che incontreremo più avanti. Fin dall'antichità ci si era accorti che le somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

si avvicinano sempre più a 1. Uno dei famosi paradossi di Zenone si basava proprio su questo: il corridore non può arrivare al traguardo perché deve percorrere metà della pista, poi la metà della metà, poi ancora la metà di ciò che resta e così via. Archimede avrebbe risolto la questione dimostrando che, qualsiasi distanza gli avesse proposto Zenone, il corridore avrebbe percorso più di quella distanza in un tempo *finito* e dunque sarebbe arrivato al traguardo *perché è impossibile che non ci arrivi.* Dal punto di vista strettamente matematico, le questioni filosofiche di Zenone sono irrilevanti: l'importante è che un concetto sia definito con precisione e venga usato con le regole della logica e della matematica che non tratta di stadi, di corridori, di Achille e di tartarughe. Dal punto di vista filosofico, i paradossi di Zenone sull'impossibilità del moto si risolvono come fece il filosofo Diogene: mettendosi a camminare. *Solvitur ambulando* era uno dei modi di dire dei filosofi posteriori per indicare un problema solo apparente.

7.1 INTEGRALI E SUCCESSIONI

Abbiamo dimostrato che, definendo per induzione

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1},$$

la successione a non converge. Curiosamente, se invece di sommare sempre il termine seguente alternativamente sommiamo e sottraiamo, la successione che risulta converge: se

$$b_0 = 0, \qquad b_{n+1} = b_n + \frac{(-1)^n}{n+1},$$

allora la successione b converge a $\log 2$; i primi termini sono

$$0, \quad 1, \quad 1 - \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

e così via. Consideriamo l'identità

$$\frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$$

(valida per $t \neq 1$) che possiamo anche scrivere

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

oppure, cambiando t in $-t$,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

Se proviamo a calcolare l'integrale su $[0\,..\,1]$ di ambo i membri, otteniamo, ricordando che

$$\int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

e che
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\log(1+t)\Big]_{t=0}^{t=1} = \log 2,$$
la nuova identità
$$\log 2 = b_n + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,dt.$$
Se dimostriamo che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,dt = 0$$
avremo proprio la nostra tesi. Ora,
$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \le \int_0^1 \left|\frac{t^{n+1}}{1+t}\right| dt$$
e la funzione da integrare a destra è non negativa. Siccome $1+t \ge t$ quando $t \in [0\,..\,1]$, possiamo scrivere le disuguaglianze
$$0 \le \frac{t^{n+1}}{1+t} \le \frac{t^{n+1}}{t} = t^n$$
e perciò
$$0 \le \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \le \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$
Quindi possiamo concludere per il teorema sul confronto dei limiti, dal momento che $\lim_{n\to+\infty} 1/(n+1) = 0$. Basta infatti ricordare che da $\lim_{z\to x}|f(z)| = 0$ segue che $\lim_{z\to x} f(z) = 0$.

La convergenza della successione b a $\log 2$ fu 'dimostrata' per la prima volta da Nikolaus Kauffmann (1620–1687), più noto come Mercator (non va confuso con il cartografo). La 'dimostrazione' di Mercator era ovviamente diversa e non rigorosa.

Limiti di successioni come questa si indicano spesso come 'somme infinite':
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$
quando naturalmente sia chiaro quali sono i termini che seguono o, più propriamente, quando sia data la formula ricorsiva della successione.

Un'altra 'somma infinita' era stata già scoperta da Mengoli:
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots$$
cioè la 'somma' dei reciproci dei numeri triangolari, quelli della forma $n(n+1)/2$ ben noti fin dai tempi di Pitagora (Ὁ *Πυθαγόρας ὁ Σάμιος* 575 aC–495 aC). La successione è
$$c_0 = 0, \qquad c_{n+1} = c_0 + \frac{2}{n(n+1)}$$
che Mengoli trattava in questo modo:
$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$
e quindi la 'somma infinita' diventa
$$\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \cdots$$
e ciascun termine, a parte il primo, si cancella con il successivo: dunque la 'somma' è 2. Ovviamente questa non è affatto una dimostrazione, perché non abbiamo la minima idea di che cosa sia una 'somma infinita'.

Un'altra 'somma infinita' calcolata con trucchi molto ingegnosi è dovuta a Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

cioè la somma a segni alterni dei reciproci dei numeri dispari. Possiamo dimostrarlo con un trucco del tutto analogo al precedente: nell'identità per $1/(1-t)$ poniamo $t = -u^2$, trovando

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots + (-1)^n u^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}.$$

Se integriamo sull'intervallo $[0\,..\,1]$ l'identità

$$\frac{\pi}{4} = l_n + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}\,du, \qquad l_1 = 1, \quad l_{n+1} = l_n + \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

ricordando che

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \Bigl[\arctan u\Bigr]_{u=0}^{u=1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

abbiamo esattamente come prima che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}\,du = 0$$

e quindi $\lim_{n\to+\infty} l_n = \pi/4$, come 'dimostrato' da Leibniz.

7.2 ALTRE SUCCESSIONI

Consideriamo di nuovo il modo in cui abbiamo calcolato la somma di Leibniz; questa volta, invece di integrare su $[0\,..\,1]$ calcoleremo gli integrali tra 0 e x, per un x qualsiasi:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \int_0^x (1 - u^2 + \cdots + (-1)^n u^{2n})\,du + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}\,du \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}\,du.
\end{aligned}$$

Il problema qui è di nuovo di far tendere a zero l'integrale che rimane, in modo che la successione che rimane abbia proprio come limite l'arcotangente.

La maggiorazione di prima si può ancora calcolare allo stesso modo

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}\,du\right| &\le \int_0^{|x|} \frac{u^{2n+2}}{1+u^2}\,du \\
&\le \int_0^{|x|} \frac{u^{2n+2}}{u^2}\,du \\
&\le \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1},
\end{aligned}$$

ma ora c'è un problema: non possiamo dire che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

qualunque sia x. Infatti, per $a \ge 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le a < 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ +\infty & \text{se } a > 1, \end{cases}$$

come è facile verificare. Perciò, finché $-1 \le x \le 1$, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

ma ciò non è più vero per $|x| > 1$. Poco male: abbiamo calcolato la 'somma infinita'

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

che è nota come *serie di Gregory*, da James Gregory (1638–1675). Analogamente avremo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1).$$

Qui non possiamo considerare valida la 'somma' per $x = -1$, perché l'identità da cui partiamo non ha senso: $1/(1+t)$ non è definita per $t = -1$.

Che succede quando $|x| > 1$? Vedremo più avanti che non è possibile dare un senso a quelle somme infinite, in questo caso.

7.3 DEFINIZIONE DI SERIE

Molte delle successioni di cui abbiamo trattato la convergenza sono della forma

$$b_0 = a_0, \qquad b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$$

dove a è una successione.

Per esempio, la serie di Leibniz si ottiene con $a_n = (-1)^n/(2n+1)$.

DEFINIZIONE. *Si dice che la serie associata alla successione a converge se esiste finito il limite della successione $\hat{a}$ definita da*

$$\hat{a}_0 = a_0, \qquad \hat{a}_{n+1} = \hat{a}_n + a_{n+1}.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n = l$*, si pone*

$$\sum_{n\ge0} a_n = l$$

e l si chiama somma della serie di termine generale a_n.

Abbiamo già visto parecchie serie convergenti:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\ge0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \\
&\sum_{n\ge0} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2, \\
&\sum_{n\ge0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x && (-1 \le x \le 1), \\
&\sum_{n\ge0} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \log(1+x) && (-1 < x \le 1), \\
&\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \\
&\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) && (s > 1).
\end{aligned}$$

Dell'ultima non si può scrivere la somma in termini di funzioni 'note'.

Ne vediamo subito un'altra: ricordiamo che lo sviluppo di Taylor per la funzione esponenziale exp è

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

e che sappiamo scrivere

$$R_n(x) = \frac{\exp c_n}{(n+1)!}$$

per un opportuno c_n tra 0 e x; qui vogliamo far variare n e quindi varierà anche c_n. Se consideriamo $a_n = x^n/n!$ (naturalmente ricordando che $x^0 = 1$ e $0! = 1$), ci accorgiamo che siamo proprio nella situazione di prima; ma sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp x}{n!} = 0$$

e quindi anche $\lim_{n\to+\infty} \exp c_n/n! = 0$; dunque

$$\exp x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

senza alcuna limitazione su x.

Possiamo trovare serie analoghe per sin e cos, perché gli sviluppi di Taylor sono facili da calcolare, essendo $\sin' x = \cos x$ e $\cos' x = -\sin x$; dunque

$$\sin^{(n)} 0 = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \text{ è dispari,} \end{cases}$$

$$\cos^{(n)} 0 = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Perciò possiamo scrivere

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1^k)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

e, simile a prima,

$$R_{2k+1}(x) = \frac{\sin^{(2k+2)} c}{(2k+2)!}$$

quindi il resto ha limite 0 per ogni x. Analogamente per il coseno, e dunque

$$\sin x = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

A questo tipo di serie si dà il nome di *serie di potenze*: sono le serie della forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

di cui le serie di Gregory, di Leibniz generalizzata, dell'esponenziale, del seno e del coseno sono casi particolari.

7.4 CRITERI DI CONVERGENZA

Quando vogliamo vedere se una serie converge, la prima cosa da osservare è il limite della successione. Useremo il simbolo $\sum_{n\geq 0} a_n$ anche per indicare la serie, indipendentemente dal fatto se converga o no; ma il segno di uguaglianza o le operazioni coinvolgenti questo simbolo hanno senso solo se prima si sia verificata la convergenza.

TEOREMA. *Se la serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

▶ Se $\lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n = l$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} \hat{a}_{n-1} = l$ e quindi da $a_n = \hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}$ segue

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n - \lim_{n\to+\infty} \hat{a}_{n-1} = l - l = 0$$ ◀

Va osservato che si tratta di una condizione *necessaria*: abbiamo infatti già dimostrato che $\sum_{n\geq 0} 1/(n+1)$ non converge.

Diremo che due successioni a e b (o le serie che definiscono) sono *quasi uguali* se $a_n = b_n$ per ogni n maggiore di un certo numero k; in altre parole, se i termini delle successioni sono diversi solo su un insieme finito di naturali.

TEOREMA. *Se le serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *sono quasi uguali, allora entrambe convergono o non convergono.*

▶ Per ipotesi abbiamo $a_n = b_n$ per $n > k$. Supponiamo che $\sum_{n\geq 0} a_n$ converga; poniamo $c = a_0 + \cdots + a_k$ e $d = b_0 + \cdots + b_k$. Allora, per $n > k$,

$$\hat{b}_n = d + b_{k+1} + \cdots + b_n = (d - c) + c + a_{k+1} + \cdots + a_n = (d - c) + \hat{a}_n$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} \hat{b}_n = (d - c) + \lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n$. Ovviamente è lo stesso se supponiamo che $\sum_{n\geq 0} b_n$ converga. ◀

Quest'ultimo teorema permette di essere molto flessibili nella trattazione delle serie; per esempio possiamo tranquillamente scrivere che

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n!}$$

converge, sottintendendo che i termini "mancanti" sono nulli. Anche in vari teoremi che seguiranno si userà la stessa idea: ciò che conta per la convergenza è il comportamento "da un certo punto in poi".

I teoremi sui limiti ci danno subito varie conseguenze per le serie.

TEOREMA. *Se* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *convergono, allora convergono anche le serie* $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)$ *e* $\sum_{n\geq 0}(ca_n)$, *per ogni numero* c*; inoltre*

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) = \sum_{n\geq 0} a_n + \sum_{n\geq 0} b_n \quad e \quad \sum_{n\geq 0} (ca_n) = c \sum_{n\geq 0} a_n.$$

Useremo spesso questo risultato; non occorre dare una dimostrazione formale perché si tratta sempre e solo di limiti: la si scriva per esercizio. Un risultato da dimostrare è invece il seguente.

CRITERIO DI LEIBNIZ. *Data una successione decrescente* a*, con termini positivi, per la quale valga anche* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*, la serie*

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$$

converge. Inoltre, se l *è la somma, si ha*

$$|a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n - l| \leq a_{n+1}.$$

▶ Dalle ipotesi su a segue che, per ogni n, $a_n \geq 0$ (teorema della permanenza del segno e decrescenza). Consideriamo dunque $b_n = (-1)^n a_n$ e le due successioni

$$c_n = \hat{b}_{2n}, \qquad d_n = \hat{b}_{2n+1} = c_n + b_{2n+1} = c_n - a_{2n+1}.$$

Siccome $d_n = c_n + b_{2n+1} = c_n - a_{2n+1}$, abbiamo che $d_n \leq c_n$. Inoltre

$$c_{n+1} = \hat{b}_{2n+2} = \hat{b}_{2n} + b_{2n+1} + b_{2n+2} = c_n + (a_{2n+2} - a_{2n+1}) \leq c_n.$$

Analogamente $d_{n+1} \geq d_n$. Dunque le due successioni sono monotone e limitate, quindi hanno limite. Se $l = \lim_{n\to+\infty} c_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} d_n$, abbiamo $m \leq l$ e anche, per ogni n,

$$c_n - d_n \geq l - m.$$

Ma

$$c_n - d_n = \hat{b}_{2n} - \hat{b}_{2n+1} = -b_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

Quindi $a_0 \geq a_1 \geq l - m$, $a_2 \geq a_3 \geq l - m$ e così via, in altre parole $a_n \geq l - m$ per ogni n. Passando al limite, abbiamo

$$l - m \leq \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

e perciò $l \leq m$ che, insieme a $l \geq m$ dà $l = m$.

Adesso si tratta di verificare che, data una tolleranza $\varepsilon > 0$, abbiamo $|\hat{b}_n - l| \leq \varepsilon$ quando $n > k$, per un opportuno k. Siccome $\lim_{n\to+\infty} c_n = l = \lim_{n\to+\infty} d_n$ possiamo trovare k tale che, per $n > k$,

$$|c_n - l| \leq \varepsilon, \qquad |d_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ma allora, per $n > k/2$, abbiamo

$$|\hat{b}_n - l| \leq \varepsilon.$$

Rimane da verificare l'ultima asserzione. Siccome $l - d_n \geq 0$, abbiamo $l - c_n + a_{2n+1} \geq 0$, da cui $b_{2n} - l \leq a_{2n+1}$. Analogamente da $c_{n+1} - l \geq 0$ deduciamo che

$$d_n + b_{2n+2} - l \geq 0$$

cioè $\hat{b}_{2n+1} + a_{2n+2} - l \geq 0$, quindi $l - \hat{b}_{2n+1} \leq a_{2n+2}$. ◀

Notiamo che una serie che soddisfa queste ipotesi ha una proprietà importante: le *somme parziali* con numero pari di addendi sono approssimazioni per eccesso della somma, quelle con un numero dispari di addendi sono approssimazioni per difetto. In ogni caso l'errore che si commette è al massimo l'ultimo termine trascurato. Non che questo aiuti a scrivere un'approssimazione decente di $\pi/4$: nel caso della serie di Leibniz occorrono 5000 termini per ottenere un'approssimazione con la terza cifra decimale sicuramente esatta.

Una *somma parziale* della serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ è, ovviamente, una delle somme (finite)

$$\hat{a}_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

e un modo spesso usato per dire che la serie converge è che *la successione delle somme parziali converge*, cioè la nostra stessa definizione.

C'è da osservare che non occorre veramente che la successione a sia decrescente, basta che sia *quasi decrescente*, cioè che la condizione $a_n \geq a_{n+1}$ valga da un certo punto in poi, diciamo per $n > k$: infatti possiamo sostituire i primi k termini con a_{k+1} e avere una successione decrescente che è quasi uguale alla successione data.

7.5 SERIE A TERMINI POSITIVI

In tutta questa sezione supporremo quasi sempre che le successioni a che tratteremo abbiano la proprietà $a_n \geq 0$, per ogni n. Ma tratteremo anche serie con termini anche non negativi e il contesto lo chiarirà. Per queste serie ci sono numerosi criteri di convergenza. Notiamo subito che, per una serie di questo tipo, la successione delle somme parziali $\hat{a}$ è crescente e quindi la convergenza equivale alla limitatezza. Le chiameremo *successioni positive* se vale $a_n > 0$, per ogni n.

Si potrebbero considerare allo stesso modo le successioni *non negative*, semplicemente trascurando gli eventuali termini nulli.

TEOREMA. *Siano a e b successioni positive con $a_n \leq b_n$, per ogni n. Se $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, anche $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge; se $\sum_{n\geq 0} a_n$ non converge, anche $\sum_{n\geq 0} b_n$ non converge.*

▶ Ci basta vedere che se $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, converge anche $\sum_{n\geq 0} a_n$. Se $l = \sum_{n\geq 0} b_n$, allora

$$\hat{a}_n \leq \hat{b}_n \leq l$$

e quindi $\hat{a}$ è crescente e limitata. ◀

È chiaro che questo criterio non dà alcuna informazione sulla somma della serie relativa ad a, nemmeno conoscendo la somma della serie relativa a b. Notiamo anche che la condizione $a_n \leq b_n$ può valere da un certo punto in poi e il risultato non cambia.

Una serie spesso utile per questi confronti è la *serie geometrica* (che non è a termini non negativi).

TEOREMA. *La serie $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge per $-1 < x < 1$ e si ha*

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Se $|x| \geq 1$, la serie $\sum_{n\geq 0} x^n$ non converge.

▶ Conosciamo già l'identità

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

e sappiamo anche che $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ se e solo se $|x| < 1$. Se $|x| \geq 1$, è falso che $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. ◀

La serie geometrica fornisce alcuni criteri che spesso sono sufficienti a determinare il carattere di una serie.

CRITERIO DEL RAPPORTO. *Se per la successione positiva a esistono un intero k e un numero $c < 1$ tali che, per ogni $n \geq k$,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c,$$

allora la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

In particolare questo accade se $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = l < 1$.

▶ Non è restrittivo supporre che $k = 0$: basta modificare i primi termini della successione, cosa che non ha rilevanza sulla convergenza. Da $a_1/a_0 \leq c$ segue $a_1 \leq ca_0$; da $a_2/a_1 \leq c$ segue

$$a_2 \leq ca_1 \leq c^2 a_0.$$

Con una facile induzione otteniamo allora

$$a_n \le a_0 c^n$$

per ogni n. La serie $\sum_{n\ge0} a_0 c^n$ converge.

Per il teorema della permanenza del segno, da $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = l < 1$ segue che, da un certo punto in poi, vale $a_{n+1}/a_n \le l+\varepsilon$, dove possiamo prendere $0 < \varepsilon < 1-l$. ◀

Il criterio ha una controparte riguardante la non convergenza: se esistono un intero k e un numero $c > 1$ tali che, per $n \ge k$, sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge c,$$

allora la serie $\sum_{n\ge0} a_n$ non converge. In particolare questo accade, in analogia con quanto visto per la convergenza, se $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n > 1$.

Vediamo alcuni esempi. Per la serie *esponenziale* $\sum_{n\ge0} x^n/n!$ (quando $x > 0$) si deve calcolare

$$\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{n+1}$$

il cui limite per $n \to +\infty$ è evidentemente 0. Dunque questo conferma che la serie converge per ogni $x > 0$. Vedremo più avanti che il criterio si può applicare anche a serie con termini qualsiasi, cioè non necessariamente positivi.

In alcuni casi il criterio non dà risultati conclusivi. Per la serie di Mengoli

$$\sum_{n\ge1} \frac{2}{n(n+1)}$$

si ha

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{n+2}$$

che ha limite 1 e quindi il rapporto non si mantiene né “sotto 1” né “sopra 1”, impedendoci di applicare il criterio. Tuttavia sappiamo che converge: infatti il ragionamento di Mengoli diventa, ponendo $a_n = 2/(n(n+1))$,

$$\begin{aligned}\hat{a}_n &= \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

e dunque $\sum_{n\ge1} a_n = \lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n = 2$.

Si ha $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ anche per la *serie armonica* in cui $a_n = 1/n$. Ma questa serie non converge, come abbiamo già visto.

Esiste un criterio molto simile a quello del rapporto, talvolta più facile tecnicamente da applicare.

CRITERIO DELLA RADICE. *Se per la serie positiva $\sum_{n\ge0} a_n$ esistono un intero k e un $c < 1$ tali che, per $n \ge k$ si abbia*

$$\sqrt[n]{a_n} \le c$$

allora la serie $\sum_{n\ge0} a_n$ converge. In particolare ciò accade se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

▶ Qui supponiamo che $k = 1$ (visto che $\sqrt[0]{a_0}$ non ha senso, ma trascurare un termine iniziale non ha alcuna importanza). Allora $a_1 \le c$, $a_2 \le c^2$ e, in generale, $a_n \le c^n$ e così possiamo concludere come prima. ◀

Anche questo ha la controparte sulla non convergenza. È chiaro che i due criteri non sono molto potenti, perché confrontano la serie data con una serie geometrica. Tuttavia li vedremo all'opera con le serie di potenze dove danno quasi tutte le informazioni necessarie.

7.6 CONVERGENZA ASSOLUTA

La convergenza assoluta è un genere ristretto di convergenza; alcune serie non convergono assolutamente, ma convergono. Però la convergenza assoluta può essere verificata più facilmente e quindi diventa un criterio molto utile.

DEFINIZIONE. *La serie* $\sum_{n\ge0} a_n$ *converge assolutamente se converge la serie* $\sum_{n\ge0} |a_n|$.

Dobbiamo dimostrare, per prima cosa, che la convergenza assoluta implica la convergenza: infatti una volta visto questo, potremo adoperare i criteri della sezione precedente anche per serie con termini qualsiasi.

TEOREMA. *Se la serie* $\sum_{n\ge0} a_n$ *converge assolutamente, allora converge.*

▶ Dato un numero r poniamo $r^+ = r$ se $r \ge 0$, altrimenti $r^+ = 0$. Analogamente $r^- = -r$ se $r \le 0$, altrimenti $r^- = 0$. Allora

$$r = r^+ - r^-, \qquad |r| = r^+ + r^-.$$

Le serie $\sum_{n\ge0} a^+{}_n$ e $\sum_{n\ge0} a^-{}_n$ sono non negative e vale

$$a^+{}_n \le |a_n|, \qquad a^-{}_n \le |a_n|,$$

da cui deduciamo che entrambe convergono perché converge $\sum_{n\ge0} |a_n|$. Ora possiamo scrivere

$$\hat{a}_n = \widehat{a^+}_n - \widehat{a^-}_n$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n = \lim_{n\to+\infty} \widehat{a^+}_n - \lim_{n\to+\infty} \widehat{a^-}_n,$$

per i teoremi sui limiti, e abbiamo finito. ◀

Possiamo dunque usare il criterio del rapporto anche per la serie di Gregory dell'arcotangente $\sum_{n\ge0} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$, per esempio; basta prendere i valori assoluti:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x| = |x|$$

e perciò sappiamo che la serie converge quando $|x| < 1$ e non converge quando $|x| > 1$. Non possiamo concludere nulla riguardo alla convergenza per $x = -1$ o $x = 1$, con questo criterio. Analogamente la serie di Mercator (generalizzata)

$$\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge se $|x| > 1$.

Notiamo una differenza fondamentale tra questo metodo di verifica della convergenza e il precedente con il quale avevamo stabilito che le serie di Gregory e Mercator convergono rispettivamente a $\arctan x$ e a $\log(1 + x)$ (con certe condizioni su x). Con il criterio del rapporto stabiliamo solo che la serie converge, senza avere alcuna informazione sulla somma. In realtà questo non è un male: se abbiamo una successione a tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \quad \text{(finito)}$$

allora la serie

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

converge per $|x| < l$, se $l \neq 0$; se $l = 0$, la serie converge per ogni x. Quindi possiamo definire una funzione

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

che ha come dominio gli intervalli specificati.

Vediamo altre proprietà delle serie assolutamente convergenti, le dimostrazioni sono semplici:

1. se $\sum_{n\geq 0} a_n$ è assolutamente convergente, anche $\sum_{n\geq 0} ka_n$ è assolutamente convergente;
2. se $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ sono serie assolutamente convergenti, anche la serie "somma" $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)$ è assolutamente convergente;
3. se $\sum_{n\geq 0} a_n$ è assolutamente convergente, allora

$$\left|\sum_{n\geq 0} a_n\right| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n|.$$

7.7 SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze è definita da una successione a, considerando

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

che ricorda molto gli sviluppi di Taylor. Mostriamo subito una proprietà importante.

TEOREMA. *Per la serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ vale una e una sola delle condizioni seguenti:*

1. *la serie converge solo per $x = 0$;*
2. *esiste $r > 0$ tale che la serie converge assolutamente per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$;*
3. *la serie converge assolutamente per ogni x.*

▶ Dimostriamo che, se la serie converge assolutamente per $x = c > 0$ e $|b| < c$, allora la serie converge assolutamente anche per $x = b$. Infatti

$$|a_n b^n| \leq |a_n c^n|$$

e quindi possiamo maggiorare la serie $\sum_{n\geq 0}|a_n b^n|$ con la serie convergente (per ipotesi) $\sum_{n\geq 0}|a_n c^n|$.

A questo punto si hanno due casi: se l'insieme dei valori c tali che la serie converge per $x = c$ è illimitato, la serie converge per ogni x; altrimenti questo insieme è limitato e possiamo prendere come r il suo estremo superiore (che può essere 0). ◀

Il numero r del teorema precedente si chiama *raggio di convergenza* e, nel caso in cui la serie converge per ogni x, diremo che il raggio di convergenza è $+\infty$. Nel seguito considereremo solo serie con raggio di convergenza > 0 che quindi definiscono una funzione f_a con dominio $(-r \mathrel{..} r)$ (che è tutta la retta nel caso $r = +\infty$). Agli estremi dell'intervallo di convergenza si può avere ancora convergenza oppure no, come abbiamo visto per la serie di Gregory e quella di Mercator.

Il fatto che una serie di potenze ricordi uno sviluppo di Taylor ci suggerisce che "troncando" una serie di potenze si ottenga proprio lo sviluppo di Taylor della funzione f_a che quindi dovrebbe avere tutte le derivate in 0. Dimostreremo molto di più: la funzione f_a ha tutte le derivate in ogni punto dell'intervallo di convergenza e si ha

$$f_a'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

cioè la derivata si ottiene derivando ciascun termine della serie e considerando la serie di potenze che così si ottiene; una volta dimostrato questo, il passaggio alle derivate successive è ovvio. La prima cosa da vedere è, dunque, che le serie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $\sum_n n a_n x^{n-1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza. Ci basterà considerare $\sum_n n a_n x^n$, perché la convergenza di una e dell'altra sono equivalenti. Lo si dimostri per esercizio.

TEOREMA. *La serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza.*

▶ Partiamo dalla considerazione di $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; allora, fissata la tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste k tale che, per $n > k$ si abbia $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$, cioè $n \leq (1 + \varepsilon)^n$. Supponiamo che il raggio di convergenza di $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sia $r > 0$ e prendiamo x con $|x| < r$; possiamo prendere $\varepsilon > 0$ tale che $|x|(1 + \varepsilon) < r$ e perciò la serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n (1 + \varepsilon)^n$$

converge assolutamente. Per $n > k$ abbiamo allora

$$|n a_n x^n| \leq |x^n|(1 + \varepsilon)^n$$

e quindi abbiamo maggiorato la nostra serie con una serie convergente, come volevamo. Se per caso $r = +\infty$, possiamo prendere $\varepsilon > 0$ del tutto arbitrario.

Il viceversa è invece molto più facile: se $\sum_{n\geq 1} n a_n x^n$ converge assolutamente, abbiamo $|a_n x^n| \leq |n a_n x^n|$, e quindi anche $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge assolutamente. ◀

La serie così costruita si chiama *serie derivata*, il motivo è reso evidente dal prossimo teorema.

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE SERIE DI POTENZE. *Se la serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $r > 0$ e f_a è la sua somma, allora f_a è derivabile in ogni punto dell'intervallo di convergenza e*

$$f_a'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

In particolare, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

▶ Si tratta di una dimostrazione piuttosto difficile, ma solo per questioni tecniche. Vogliamo calcolare, prima di tutto, il rapporto di Fermat

$$v(h) = \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Prenderemo $\delta > 0$ tale che $[x \mathinner{..} x+\delta] \subseteq (-r \mathinner{..} r)$ e, se $x < 0$, vogliamo anche $x + \delta < 0$. Ci limiteremo a $0 < h < \delta$, che non è restrittivo per calcolare la derivata; il caso di $h < 0$ si tratta in modo del tutto analogo e quindi non ci soffermeremo.

Nelle ipotesi fatte, possiamo scrivere, per il teorema di Lagrange,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n y_n^{n-1},$$

dove $x < y_n < x + h$. Ci serve verificare che

$$\lim_{h\to 0+} v(h) = \sum_{n\ge 1} n a_n x^n$$

o, che è lo stesso

$$\lim_{h\to 0+} \left| v(h) - \sum_{n\ge 1} n a_n x^n \right| = 0.$$

Siccome sappiamo esprimere $v(h)$ come serie assolutamente convergente, sappiamo che

$$\begin{aligned} \left| v(h) - \sum_{n\ge 1} n a_n x^n \right| &\le \left| \sum_{n\ge 1} n a_n (y_n^{n-1} - x^{n-1}) \right| \\ &\le \sum_{n\ge 1} |n a_n (y_n^{n-1} - x^{n-1})| \end{aligned}$$

Ancora per il teorema di Lagrange, per $n \ge 2$ esiste $z_n \in (x \mathinner{..} y_n)$ tale che

$$y_n^{n-1} - x^{n-1} = (n-1) z^{n-2} (y_n - x)$$

quindi abbiamo

$$|n a_n (y_n^{n-1} - x^{n-1})| \le |n(n-1) a_n z_n^{n-2}| \cdot h \le |n(n-1) a_n (x+\delta)^{n-2}| \cdot h$$

(perché $|z_n| \le |x + \delta|$ con le ipotesi fatte). La serie di potenze

$$\sum_{n\ge 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

ha lo stesso raggio di convergenza di quella da cui siamo partiti, quindi la serie

$$\sum_{n\ge 2} n(n-1) a_n (x+\delta)^{n-2}$$

è assolutamente convergente; se poniamo $s = \sum_{n\ge 2} |n(n-1) a_n (x+\delta)^{n-2}|$, abbiamo

$$\left| v(h) - \sum_{n\ge 1} n a_n x^{n-1} \right| \le sh$$

e dunque, prendendo il limite per $h \to 0$, abbiamo la tesi.

Per l'identità $a_n = f_a^{(n)}(0)$ basta quindi derivare successivamente. ◀

Data una successione a, poniamo

$$b_n = \sup\{\, a_m : m \ge n \,\}$$

dove questo estremo superiore può anche essere $+\infty$. La successione b_n è decrescente e quindi esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n$ (finito o infinito) che si denota con il simbolo

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Jacques Hadamard (1865–1963) dimostrò che per il raggio di convergenza r della serie di potenze $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ vale

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(con l'ovvio $r = 0$ se il limite superiore è $+\infty$, mentre la serie converge ovunque se il limite superiore è 0). Nel caso in cui esista $s = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, non è difficile vedere che $r = 1/s$. Il criterio del rapporto dà spesso il raggio di convergenza senza dover calcolare questi limiti.

Il succo di questo è che se $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ è finito, la funzione f_a è definita in un intorno di zero; quindi è possibile costruire in modo quasi arbitrario funzioni assegnando le derivate successive in 0.

In modo del tutto analogo al caso della *serie derivata* possiamo definire la *serie primitiva* che, con dimostrazione del tutto simile, ha lo stesso raggio di convergenza: la serie primitiva di $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ è

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

e sappiamo dal teorema di derivazione che la somma di questa serie è una primitiva di f_a (nell'intervallo di convergenza). Potremmo usare questa serie per calcolare valori approssimati di integrali che non sappiamo trattare 'analiticamente'. Per esempio,

$$\exp(-x^2) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

e quindi una primitiva di $x \mapsto \exp(-x^2)$ è

$$x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

e per valori 'piccoli' di x possiamo usare pochi termini per avere un valore approssimato di $\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$.

Più importante è che, siccome le serie che scriveremo convergono ovunque, possiamo definire le funzioni

$$\begin{aligned} \mathsf{C}(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \mathsf{S}(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

e dal teorema di derivazione segue che $\mathsf{S}'(x) = \mathsf{C}(x)$ e $\mathsf{C}'(x) = -\mathsf{S}(x)$. Inoltre $\mathsf{C}(0) = 1$ e $\mathsf{S}(0) = 0$. Dunque abbiamo a disposizione una definizione puramente analitica delle funzioni trigonometriche.

Supponiamo di avere due funzioni f e g definite ovunque e derivabili, con le proprietà

$$f'(x) = -g(x), \qquad g'(x) = f(x), \qquad f(0) = 1, \qquad g(0) = 0.$$

La considerazione di C e S ci dice che funzioni con queste proprietà esistono; proviamo a dedurre altre proprietà.

Definiamo $k(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ e calcoliamo la derivata:

$$k'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$$

e quindi k è costante; siccome $k(0) = 1$, abbiamo

$$f(x)^2 + g(x)^2 = 1$$

per ogni x. Supponiamo che φ e ψ siano funzioni tali che $\varphi' = -\psi$ e $\psi' = \varphi$. Proviamo a mettere insieme queste funzioni e poniamo

$$A(x) = f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x), \qquad B(x) = f(x)\psi(x) - g(x)\varphi(x).$$

Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} A'(x) &= f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x) - g'(x)\psi(x) - g(x)\psi'(x) \\ &= -g(x)\varphi(x) - f(x)\psi(x) + f(x)\psi(x) + g(x)\varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'(x) &= f'(x)\psi(x) + f(x)\psi'(x) - g'(x)\varphi(x) - g(x)\varphi'(x) \\ &= g(x)\psi(x) - f(x)\varphi(x) + f(x)\varphi(x) - g(x)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

da cui segue che A e B sono funzioni costanti:

$$a = A(0) = f(0)\varphi(0) + g(0)\psi(0) = \varphi(0), \qquad b = B(0) = f(0)\psi(0) + g(0)\varphi(0) = \psi(0).$$

Dunque abbiamo $f\varphi + g\psi = a$, $f\psi - g\varphi = b$ (evitiamo di continuare a scrivere $f(x)$ e simili, per brevità). Ne otteniamo altre identità:

$$f^2\varphi + fg\psi = af, \qquad fg\psi - g^2\varphi = bg$$

che possiamo sottrarre:

$$(f^2 + g^2)\varphi = af - bg$$

e quindi

$$\varphi(x) = \varphi(0)f(x) - \psi(0)g(x).$$

In modo del tutto analogo, moltiplicando la prima per g e la seconda per f, otteniamo

$$\psi(x) = \psi(0)f(x) + \varphi(0)g(x).$$

Se, in particolare, $\varphi(0) = 1$ e $\psi(0) = 0$, abbiamo $\varphi = f$ e $\psi = g$.

Dunque le funzioni C e S sono le uniche con quella proprietà. Si può dimostrare analiticamente che sono periodiche con uguale minimo periodo che possiamo indicare con 2π (che sarebbe la definizione analitica di π). Non lo facciamo, limitandoci a scoprire le formule di addizione. Se fissiamo y e consideriamo

$$\varphi(x) = f(x+y), \qquad \psi(x) = g(x+y),$$

abbiamo $\varphi'(x) = f'(x+y) = g(x+y) = \psi(x)$ e, analogamente, $\psi'(x) = -\varphi(x)$; dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0)f(x) - \psi(0)g(x) = f(y)f(x) - g(y)g(x),\\ \psi(x) &= \psi(0)f(x) + \varphi(0)g(x) = g(y)f(x) + f(y)g(x)\end{aligned}$$

cioè, in altri termini,

$$\begin{aligned}\mathsf{C}(x+y) &= \mathsf{C}(x)\mathsf{C}(y) - \mathsf{S}(x)\mathsf{S}(y),\\ \mathsf{S}(x+y) &= \mathsf{S}(x)\mathsf{C}(y) + \mathsf{C}(x)\mathsf{S}(y),\end{aligned}$$

cioè le note formule di addizione.

7.8 LA SERIE BINOMIALE

Consideriamo $f(x) = (1+x)^r$ dove r è un numero qualsiasi, definita per $x > -1$. Se ne vogliamo trovare uno sviluppo in serie di potenze, ci serve calcolare $f^{(n)}(0)$, per ogni n. Ma

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1}, \qquad f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2},$$

e, più in generale,

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$$

come si vede facilmente per induzione derivando un'altra volta. Perciò

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$$

e la somiglianza con i coefficienti binomiali

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$$

(con m intero positivo) è evidente, tanto che porremo per analogia

$$\binom{r}{0} = 1, \qquad \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} \quad (n > 0).$$

Si noti che, se r non è intero, $\binom{r}{n} \neq 0$ per ogni n. Se $r = m$ è intero, il valore coincide con quello usuale; in più $\binom{m}{n} = 0$ per $n > m$. Si vede anche che $\binom{r}{n}$ assume valori alternativamente positivi e negativi quando $n > r$: se n è il minimo intero maggiore di r, allora $\binom{r}{n} > 0$, $\binom{r}{n+1} < 0$ e così via.

Otteniamo allora come sviluppo in serie

$$(1+x)^r = \sum_{n \geq 0} \binom{r}{n} x^n$$

e ci domandiamo quale sia il raggio di convergenza. Adoperiamo il criterio del rapporto; prima di tutto calcoliamo

$$\binom{r}{n+1} \Big/ \binom{r}{n} = \frac{r-n}{n+1}$$

e quindi

$$\left| \frac{\binom{r}{n+1} x^{n+1}}{\binom{r}{n} x^n} \right| = \left| \frac{(r-n)x}{n+1} \right|$$

e il limite per $n \to +\infty$ è $|x|$. Dunque il raggio di convergenza è 1.

Va notato che Newton scoprì la formula della potenza di un binomio proprio sviluppando in serie $(1+x)^r$; a lui interessava in particolare il caso di $r = 1/2$, che otteneva elevando formalmente al quadrato un "polinomio con infiniti termini" e uguagliando il risultato a $1 + x$ con il principio di identità dei polinomi.

La convergenza per $x = 1$ si deve valutare con il criterio di Leibniz: occorre vedere se la successione

$$b_n = \left| \binom{r}{n} \right|$$

è decrescente (almeno da un certo punto in poi) e con limite 0. Si ha, per $n > r$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{r-n}{n+1} \right| = \frac{n-r}{n+1}$$

e la disequazione

$$\frac{n-r}{n+1} < 1$$

è soddisfatta per $-r < 1$ cioè $r > -1$. In tal caso si ha anche $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ e perciò la serie binomiale converge anche per $x = 1$. In particolare un valore approssimato per $\sqrt{2}$ si ottiene con

$$\binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1} + \binom{1/2}{2} + \binom{1/2}{3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \dots$$

ma la convergenza è molto lenta. Troncando ai termini indicati si ottiene

$$\frac{179}{128} = 1{,}3984375$$

con un errore di più dell'1%. Meglio va con

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128} - \frac{5}{2048} - \dots$$

che, troncando ai termini indicati dà

$$\frac{1451}{2048} = .70849609375$$

con un errore, per eccesso, inferiore allo 0,2%.

7.9 UNA SERIE MIGLIORE PER IL CALCOLO DEL LOGARITMO

Consideriamo la serie di Mercator e scriviamo quella che si ottiene cambiando x in $-x$: abbiamo allora le serie

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\ \log(1-x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{-x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\end{aligned}$$

che convergono assolutamente nell'intervallo $(-1\mathrel{..}1)$. Se le sottraiamo, otteniamo una serie assolutamente convergente: i termini con le potenze pari spariscono e abbiamo

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

che converge molto più rapidamente, quando x è abbastanza piccolo. Il vantaggio è che

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x}$$

e, se vogliamo calcolare $\log 2$, ci basta trovare x tale che

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

cioè $x = 1/3$. Per esempio, vogliamo usare i primi quattro termini:

$$\log 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{27} + \frac{1}{5}\frac{1}{243}\right) \approx 0{,}693004$$

che ha tre cifre decimali esatte. Si verifichi che l'equazione

$$\frac{1+x}{1-x} = k$$

ha una soluzione in $(-1\mathrel{..}1)$ per ogni $k > 0$.

7.10 LA SERIE ARMONICA E I LOGARITMI

La serie armonica $\sum_{n>0} 1/n$ non converge. Tuttavia le somme parziali

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(per $n > 0$) sono assai interessanti e possiedono un importante legame con il logaritmo. Il teorema sulle funzioni decrescenti e gli integrali ci dice, nel caso di $f(x) = 1/x$, che

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

cioè

$$h_{n-1} \geq \log n \geq h_n - 1.$$

o, maneggiando un po',

$$\frac{1}{n} \leq h_n - \log n \leq 1.$$

Dunque la successione $\mu_n = h_n - \log n$ è limitata. Mostriamo che è decrescente considerando la differenza $\delta_n = \mu_{n-1} - \mu_n$ (per $n > 0$). Abbiamo evidentemente

$$\delta_n = h_{n-1} - \log(n-1) - h_n + \log n = -\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

e viene naturale considerare la funzione $f(x) = -x - \log(1-x)$ nell'intervallo $(0 \mathrel{..} 1)$. La derivata è $f'(x) = -1 + 1/(1-x) = x/(1-x) > 0$ e dunque f è crescente. Siccome $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, abbiamo come conseguenza che $f(x) > 0$ per $x \in (0 \mathrel{..} 1)$ e, in particolare, che $\delta_n = f(1/n) > 0$.

Abbiamo dunque dimostrato che esiste $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(h_n - \log n)$; questo numero si chiama tradizionalmente *costante di Euler-Mascheroni*, perché il primo a studiarla fu Euler. Lorenzo Mascheroni (1750–1800) ne riprese lo studio. La costante si trova in molti altri casi, per esempio si può dimostrare che

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \log x \, dx.$$

È tuttora aperta la questione se γ sia razionale o irrazionale. Si sa però, che se γ è razionale, il suo denominatore minimo deve avere più di 248 cifre decimali.

In sostanza, la serie armonica non converge ma il suo comportamento è simile a quello del logaritmo, cioè la divergenza è molto lenta.

Possiamo usare la costante γ per dimostrare in modo diverso un risultato già noto. Poniamo

$$l_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

per $n > 0$. Dal criterio di Leibniz sappiamo che l_n converge e quindi possiamo usarla per calcolare limiti. Consideriamo allora l'uguaglianza

$$h_{2n} - l_{2n} = h_n$$

che si può verificare a occhio o, meglio, per induzione. Il caso di $n = 1$ è ovvio: $h_2 = 1 + 1/2$, $l_2 = 1 - 1/2$ e $h_2 - l_2 = 1 = h_1$. Supponiamo l'identità valida per n; allora

$$\begin{aligned} h_{2(n+1)} - l_{2(n+1)} &= (h_{2n} - l_{2n}) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= h_n + \frac{1}{n+1} \\ &= h_{n+1}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo dire anche che $l_{2n} = h_{2n} - h_n$ e quindi che

$$l_{2n} = (h_{2n} - \log(2n)) - (h_n - \log n) + \log 2 = \mu_{2n} - \mu_n + \log 2$$

e, passando al limite,

$$\lim_{n\to+\infty} l_{2n} = \log 2 + \lim_{n\to+\infty} \mu_{2n} - \lim_{n\to+\infty} \mu_n = \log 2 + \gamma - \gamma$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} l_n = \log 2$.

8

L'intuizione dei numeri reali ha guidato i matematici fin dal sedicesimo secolo: non ci si ponevano dubbi sull'esistenza degli irrazionali necessari per parlare delle soluzioni di equazioni algebriche. La nascita dell'analisi però i problemi li pose: come essere certi dell'esistenza del limite di una successione crescente e limitata che non si potesse calcolare *esplicitamente*?

La soluzione al problema fu data intorno alla metà del diciannovesimo secolo, a opera di Weierstraß, Georg Cantor (1845–1918) e Richard Dedekind (1831–1916); i primi due usarono idee già presenti in Cauchy e Joseph Liouville (1809–1882), il terzo invece trovò una strada completamente nuova.

Tutto ciò che ci serve però è un insieme di "numeri" che abbia certe proprietà essenziali: devono essere definite due operazioni, dobbiamo saper distinguere quando un numero è più grande di un altro e, per finire, vogliamo che la proprietà che ci garantisce l'esistenza del limite di una successione crescente e limitata valga.

Introduciamo una notazione per insiemi ordinati; se S e T sono sottoinsiemi, diremo che $S \le T$ quando per ogni $s \in S$ e ogni $t \in T$ si ha $s \le t$. Analogamente, scriveremo $r \le T$ o $S \le r$ quando $\{r\} \le T$ o, rispettivamente, $S \le \{r\}$.

8.1 GLI ASSIOMI

La struttura dei numeri reali può essere descritta da un sistema di assiomi e vedremo poi che questi assiomi possono essere realizzati in un opportuno sistema. Tuttavia l'aspetto importante è che non ci interessa davvero sapere *che cosa siano* i numeri reali, perché due sistemi che realizzano gli assiomi sono sostanzialmente identici.

ASSIOMI DEI NUMERI REALI. *Nell'insieme dei numeri reali sono definite l'operazione di addizione, $(a,b) \mapsto a+b$, l'operazione di moltiplicazione, $(a,b) \mapsto ab$, e una relazione d'ordine $<$ con le proprietà descritte di seguito.*

ASSIOMI PER L'ADDIZIONE.
A1: $(a+b)+c = a+(b+c)$,
A2: *esiste* 0 *tale che* $a+0=a$,
A3: *dato* a, *esiste* b *tale che* $a+b=0$,
A4: $a+b=b+a$.

ASSIOMI PER LA MOLTIPLICAZIONE.
M1: $(ab)c = a(bc)$,
M2: *esiste* 1 *tale che* $a1 = a$ *e* $1 \ne 0$,
M3: *se* $a \ne 0$, *esiste* b *tale che* $ab = 1$,
M4: $ab = ba$.

ASSIOMA DI DISTRIBUTIVITÀ.
D: $a(b+c) = ab+ac$.

ASSIOMI PER L'ORDINE.
O1: *se* $a < b$ *allora* $a+c < b+c$,
O2: *se* $a < b$ *e* $c > 0$, *allora* $ac < bc$.

ASSIOMA DI CONTINUITÀ.
C: *se* S *e* T *sono insiemi non vuoti tali che* $S \le T$, *allora esiste* r *tale che* $S \le r \le T$.

Le prime undici proprietà permettono di eseguire i calcoli con le solite regole; l'elemento b tale che $a + b = 0$ si denota con $-a$, l'elemento b tale che $ab = 1$ (per $a \neq 0$) si denota con a^{-1}. Si pone poi, come sempre, $a - b = a + (-b)$ e $a/b = ab^{-1}$ (per $b \neq 0$).

È l'ultima proprietà che non vale per i numeri razionali. Consideriamo la successione s così definita:

$$
\begin{array}{ll}
s_1 = 0{,}1 & s_2 = 0{,}12 \\
s_3 = 0{,}1211 & s_4 = 0{,}121122 \\
s_5 = 0{,}121122111 & s_6 = 0{,}121122111222 \\
\dots &
\end{array}
$$

aumentando via via il numero di cifre che si ripetono e poniamo

$$t_n = s_n + 10^{-k}$$

dove k è il numero di cifre decimali di s_n, è chiaro che l'unico "numero" che sta in mezzo alle due successioni è il numero

$$0{,}12112211122211112222\dots$$

che non ha uno sviluppo decimale periodico e quindi non è razionale. Qui, ovviamente, facciamo lo stesso atto di fede di Euler e degli altri che non si ponevano il problema dell'esistenza di un insieme di "numeri" dove gli sviluppi decimali qualsiasi fossero leciti.

In effetti Weierstraß definì i numeri reali proprio così: allineamenti di cifre, un numero finito prima della virgola, una successione infinita dopo la virgola, purché non fosse costantemente 9 da un certo punto in poi. Sull'insieme di questi oggetti definì due operazioni e una relazione per le quali valgono gli assiomi enunciati prima.

8.2 L'ASSIOMA DI CONTINUITÀ

L'assioma 'C' si chiama *assioma di continuità*. Vediamone la conseguenza principale.

TEOREMA. *Ogni insieme di numeri naturali che ha un maggiorante ha estremo superiore.*

▶ Supponiamo che l'insieme S abbia un maggiorante. Allora l'insieme T dei maggioranti di S non è vuoto e, per definizione, $S \le T$. Prendiamo r tale che $S \le r \le T$: allora r è un maggiorante di S e quindi $r \in T$; dire che $r \le T$ e $r \in T$ è esattamente dire che r è il minimo di T. ◀

È chiaro che vale la conclusione analoga per insiemi di numeri reali che abbiano un minorante, la dimostrazione è perfettamente simmetrica. Da questo vediamo che data una successione di intervalli *inscatolati*, cioè intervalli

$$[p_0 \mathinner{..} q_0] \supseteq [p_1 \mathinner{..} q_1] \supseteq \dots \supseteq [p_n \mathinner{..} q_n] \supseteq \cdots$$

ciascuno incluso nel precedente, c'è un numero reale che appartiene a tutti gli intervalli. Le condizioni sono infatti equivalenti a dire che, per ogni n,

$$p_{n+1} \ge p_n, \qquad p_n \le q_n, \qquad q_{n+1} \le q_n.$$

Perciò, se p è l'estremo superiore dell'insieme $\{\, p_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ e q è l'estremo inferiore dell'insieme $\{\, q_n : n \in \mathbb{N} \,\}$, abbiamo evidentemente $p \le q$.

Nel caso in cui le ampiezze degli intervalli si riducono come accade nella dimostrazione del teorema degli zeri, si deve avere $p = q$. La condizione infatti si esprime rigorosamente così: per ogni tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste n tale che $q_n - p_n < \varepsilon$. Se fosse $p < q$, basta prendere n per il quale $q_n - p_n < q - p$ per ottenere una contraddizione.

Vediamo adesso che i numeri reali 'contengono' i naturali, nel senso che li possiamo identificare con certi numeri reali, precisamente i multipli di 1. Così, in particolare, 1 può indicare sia il numero reale che realizza l'assioma M_2 sia il numero naturale 1 e le regole di calcolo dicono che tutto torna. Nell'enunciato seguente, dove cominciamo a stabilire questa identificazione, indichiamo con $\mathbf{1}$ l'elemento dato dall'assioma M_2 e con $\mathbf{0}$ quello dato dall'assioma A_2. Per essere un po' pedanti, ricordiamo che, quando n è un numero naturale, definiamo $nx = \mathbf{0}$, per $n = 0$, e $(n + 1)x = nx + x$.

TEOREMA. *Se $n \neq 0$, allora $n\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$. Se $m\mathbf{1} = n\mathbf{1}$, allora $m = n$.*

▶ Sia n il minimo naturale positivo tale che $n\mathbf{1} = 0$. Allora esiste il predecessore m di n e $m\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$. Ma $m\mathbf{1} = \mathbf{1} + \dots + \mathbf{1}$ (m volte) e quindi $m\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Ma allora $m\mathbf{1} + \mathbf{1} = n\mathbf{1} > \mathbf{0}$, che è assurdo. Quindi n non esiste.

La seconda parte segue dalla prima: se $m \neq n$, allora $m > n$ oppure $n > m$; nel primo caso abbiamo l'assurdo che $(m - n)\mathbf{1} = \mathbf{0}$, nel secondo che $(n - m)\mathbf{1} = \mathbf{0}$. ◀

In base a questo teorema, possiamo scrivere n al posto di $n1$ e confondere l'uno dei naturali con $\mathbf{1}$ e lo stesso per lo zero, perché non ci sono ambiguità.

Il seguente enunciato sembra evidente, ma si capisce dalla dimostrazione che non lo è affatto. Lo si può vedere come una versione astratta del procedimento di misura ben noto dalla geometria.

TEOREMA. *Se $a > 0$, allora esiste un naturale n tale che $n \geq a$.*

▶ Sia T l'insieme dei reali t tali che $n < t$ per ogni n naturale. Vogliamo dimostrare che T è vuoto. Se non lo fosse, possiamo scrivere $S \leq T$, dove S è l'insieme dei naturali, e trovare r tale che $S \leq r \leq T$.

Dimostriamo che $r \in T$: se infatti $r \notin T$, esiste n tale che $n \geq r$, ma allora $n+1 > r$ contro il fatto che $S \leq r$. Perciò r è il minimo di T; ma allora $r - 1 \notin T$ e quindi esiste n tale che $n \geq r - 1$ e questo è assurdo perché avremmo $n + 1 \geq r$ da cui $n + 2 > r$ contro il fatto che $S \leq r$. ◀

La connessione con la misura è evidente: se si vuole misurare $a > 0$ rispetto a $b > 0$, cerchiamo un multiplo nb tale che $nb \leq a$ ma $(n + 1)b > a$. Fatto questo abbiamo ridotto il problema a misurare $a - nb$ (con un sottomultiplo di b). È chiaro che senza la proprietà appena dimostrata questo potrebbe non accadere.

Avendo identificato i naturali con i multipli di 1, possiamo anche parlare di interi e di razionali fra i reali.

COROLLARIO. *Se $a < b$, allora esiste q razionale con $a < q < b$.*

▶ Se $a < 0$ e $b > 0$ non c'è nulla da dimostrare; ci basta dunque vederlo per $a > 0$ perché, se $b < 0$ abbiamo anche $0 < -b < -a$.

Prendiamo n naturale tale che $n > 1/(b - a)$, cioè $n(b - a) > 1$. Se m è il minimo naturale tale che $m > na$, avremo $m - na < 1$ e quindi $m < nb$. Perciò $a < m/n < b$. ◀

TEOREMA. *Dato il numero reale r indichiamo con $Q(r)$ l'insieme dei razionali minori di r. Allora r è l'estremo superiore di $Q(r)$.*

▶ L'estremo superiore di $Q(r)$ esiste perché r è un maggiorante. Se s è questo estremo superiore, allora $s \leq r$. Se fosse $s < r$, esisterebbe q razionale con $s < q < r$ e dunque $q \in Q(r)$, contro il fatto che s è l'estremo superiore di $Q(r)$. ◀

TEOREMA. *Per ogni numero reale $r > 0$, esiste un numero reale $t > 0$ tale che $t^2 = r$.*

▶ Supponiamo dapprima che $r > 1$ e consideriamo l'insieme S dei numeri s tali che $s \geq 1$ e $s^2 \leq r$. Se s soddisfa queste condizioni, allora $s < r$, perché da $s \geq r$ seguirebbe $s^2 \geq sr \geq r^2 \geq r$. Dunque S ha estremo superiore t.

Dimostriamo che $t^2 \leq r$. Se fosse $t^2 > r$, preso $s \in S$ avremmo $t^2 - s^2 \geq t^2 - r$, da cui

$$t - s \geq \frac{t^2 - r}{t + s} \geq \frac{t^2 - r}{2t}$$

perché $1 \leq s \leq t$: questo è in contraddizione con l'ipotesi che t sia l'estremo superiore. Ci basta allora vedere che, per ogni $s \in S$, se $s^2 < r$ esiste a, con $0 < a \leq 1$, tale che $(s + a)^2 < r$. Ora $(s + a)^2 = s^2 + 2as + a^2$ e, se $a \leq 1$, abbiamo

$$s^2 + 2as + a^2 \leq s^2 + 2as + a$$

cosicché ci basta che sia $s^2 + 2as + a < r$, cioè

$$a < \frac{r - s^2}{2s + 1},$$

che ha evidentemente soluzione. Perciò un $s \in S$ con $s^2 < r$ non è l'estremo superiore di S. Ne segue che $t^2 = r$.

Rimane da dimostrare l'asserzione per $0 < r < 1$, ma in tal caso $1/r > 1$ e quindi $1/r = t^2$ per un certo t e $r = (1/t)^2$. ◀

Se guardiamo meglio la dimostrazione precedente, ci accorgiamo che si tratta di una versione astratta del metodo di esaustione. Il numero t che otteniamo non può essere maggiore della radice quadrata che cerchiamo (la parte in cui si vede che $t^2 > r$ conduce a un assurdo) né può essere minore (perché troveremmo un numero s più grande che ha ancora la proprietà $s^2 < r$). Archimede postulava, senza però renderlo esplicito, che due "classi di grandezze contigue" avessero un unico elemento separatore: è esattamente il nostro assioma 'C'.

I risultati precedenti sono i passi necessari per dimostrare il teorema di unicità.

8.3 IL TEOREMA DI UNICITÀ

I dodici assiomi caratterizzano i reali: qualsiasi struttura che abbia quelle proprietà è 'identica' ai reali; gli elementi possono essere diversi, ma tutto ciò che possiamo dimostrare in una vale in ciascun'altra a patto di 'tradurre' gli enunciati nella 'lingua' giusta. La traduzione è univoca mediante una funzione biiettiva.

TEOREMA DI UNICITÀ DEI REALI. *Siano R_1 e R_2 strutture per le quali valgano gli assiomi dei numeri reali. Allora esiste un'unica funzione biiettiva $f: R_1 \to R_2$ tale che, per ogni $a, b \in R_1$, si abbia $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(a)f(b)$.*

▶ Definiamo $f(1) = 1$ e partiamo da questo per definire f su tutto R_1. Dalla proprietà $f(a+b) = f(a)+f(b)$ segue che dobbiamo porre $f(m) = m$ (qui usiamo sia in R_1 sia in R_2 l'identificazione già fatta) per ogni m intero. Se $n > 0$, dobbiamo avere

$$nf\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n\frac{m}{n}\right) = f(m) = m$$

e quindi occorre porre $f(m/n) = m/n$.

Dimostriamo che le proprietà richieste per f hanno come conseguenza che f è monotona crescente, cioè che $a < b$ implica $f(a) < f(b)$. Basta in realtà dimostrare che $0 < b$ implica $0 < f(b)$. Ma questo è evidente dall'esistenza delle radici quadrate: se $b > 0$, esiste s tale che $s^2 = b$ e dunque $f(b) = f(s^2) = f(s)^2 > 0$.

Il resto della dimostrazione è solo una noiosa verifica delle proprietà, dopo aver definito f su un numero reale r qualunque usando il fatto che r è l'estremo superiore di un ben determinato insieme di numeri razionali. ◀

Il succo di questo teorema è che non importa come determiniamo un insieme soddisfacente le richieste, gli assiomi: sia che usiamo la costruzione di Weierstraß, sia che usiamo quella di Cantor, sia che usiamo quella di Dedekind, otteniamo due strutture che hanno le stesse proprietà. In particolare ogni proprietà dei reali può essere dedotta unicamente dagli assiomi e non dal modo con cui li abbiamo costruiti. Non stiamo discutendo del nulla perché le costruzioni dei numeri reali che abbiamo menzionato sono corrette dal punto di vista logico. I matematici hanno lavorato con i numeri reali fino alla metà del diciannovesimo secolo senza sapere che "esistessero"; ma siccome hanno implicitamente usato solo i dodici assiomi, i risultati che hanno ottenuto sono corretti.

8.4 LA COSTRUZIONE DI DEDEKIND

L'idea di Dedekind è quella di formalizzare l'assenza di buchi: se si cammina lungo i numeri reali, non si cade mai in un buco. Perciò, se dividiamo i numeri reali in due insiemi non vuoti A e B tali che $A < B$ (cioè ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B), allora A ha massimo oppure B ha minimo: se così non fosse, fra A e B ci sarebbe un buco.

Il problema è: come possiamo usare questa idea per *costruire* i numeri reali a partire dai razionali?

Una delle proprietà che vogliamo è che ogni numero reale sia minore di almeno un numero razionale. Così ogni numero razionale porta con sé tutti i numeri reali minori, in un certo senso. Dunque una suddivisione dei *razionali* in due sottoinsiemi non vuoti A e B in modo che $A < B$ corrisponde a una delle suddivisioni precedenti: basta prendere A' come l'insieme dei reali r tali che almeno un elemento di A sia maggiore di r e come B' l'insieme dei reali r tali che almeno un elemento di B sia minore di r.

Vediamo che $A' < B'$: se prendiamo $r \in A'$ e $s \in B'$, sappiamo che esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $r < a$ e $b < s$. Ma allora

$$r < a < b < s$$

perché $A < B$ e dunque $r < s$ come si voleva.

Ecco allora l'idea di Dedekind: un numero reale r è un qualsiasi insieme di numeri razionali con le seguenti proprietà:

- se $a \in r$ e $b < a$, allora $b \in r$;
- esiste c razionale tale che $c \notin r$;
- r non ha massimo.

Ogni numero razionale q definisce allora un numero reale $\hat{q}$, dove $\hat{q}$ è l'insieme di tutti i razionali a tali che $a < q$. Infatti la prima proprietà è ovvia; per la seconda è evidente che $q + 1 \notin \hat{q}$; per la terza, questo massimo dovrebbe essere un numero $a < q$, ma avremmo un assurdo da $a < (a + q)/2 < q$.

È facile definire la relazione d'ordine fra i numeri reali così definiti: $r < s$ esattamente quando $r \subset s$. Se $q_1 < q_2$ sono numeri razionali, è chiaro che $\hat{q}_1 \subset \hat{q}_2$.

L'assioma di continuità è piuttosto facile da verificare. Se S e T sono insiemi di reali con $S \leq T$, possiamo considerare l'insieme r di tutti i razionali che appartengono a qualche numero in S.

Per trovare un razionale che non appartiene a r, basta prendere un numero $t \in T$ e un razionale $q \notin t$. Allora $t < \hat{q}$ e quindi $\hat{q} \notin S$ perché $S \leq T$; in particolare $q \notin r$: se fosse $q \in R$ dovremmo avere $q \in s$ per un $s \in S$ e quindi l'assurdo $\hat{q} < s \leq t < \hat{q}$.

Siano $a \in r$ e $b < a$. Allora $a \in s$ per un certo $s \in S$; quindi da $b < a$ segue che $b \in s$ e perciò $b \in r$.

Se c fosse il massimo di r avremmo $c \in s$ per qualche $s \in S$. Ora, quando $q \in s$ è anche $q \in r$ e perciò $q \leq c$. Dunque c sarebbe il massimo di s: assurdo.

La definizione di addizione fra questi 'insiemi di Dedekind' è quasi immediata: in $r + s$ mettiamo tutti i numeri razionali della forma $a + b$ con $a \in r$ e $b \in s$. La verifica delle proprietà richieste è lunga e noiosa.

Vediamo, per esempio, che $r + \hat{0} = r$. Se $a \in r$ e $b \in \hat{0}$, allora $b < 0$ e quindi $a + b < a$, da cui $a + b \in r$: $r + \hat{0} \subseteq r$. Se $a \in r$, dal momento che r non ha massimo possiamo prendere $c \in r$ con $c > a$; allora $a = c + (a - c)$ e $a - c < 0$, quindi $a - c \in \hat{0}$.

Più complicato è dimostrare le altre proprietà dell'addizione e non è affatto semplice definire la moltiplicazione.

8.5 LA COSTRUZIONE DI WEIERSTRASS

Un modo diverso di costruire i numeri reali deriva dall'idea che ogni numero reale si può approssimare con numeri decimali (finiti): per ogni $k > 0$ prendiamo come 'k-esima cifra decimale' del numero reale r, con $0 \leq r < 1$, l'unica cifra a_k tale che

$$0 \leq r - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k}\right) < \frac{1}{10^k}.$$

L'esempio classico di $r = \sqrt{2} - 1 = 0{,}14142\dots$ può venirci in aiuto:

$$\begin{aligned}
& r - 0 > \frac{1}{10} \\
& 0 \leq r - 0{,}1 < \frac{1}{10} \quad (*) \\
& r - 0{,}2 < 0 \\[1ex]
& r - 0{,}13 > \frac{1}{100} \\
& 0 < r - 0{,}14 < \frac{1}{100} \quad (*) \\
& r - 0{,}15 < 0 \\
& \dots
\end{aligned}$$

Come si vede, si tratta di un procedimento ricorsivo: quando si conoscono le prime k cifre dello sviluppo decimale, si può calcolare la successiva. Per i numeri r che non sono nell'intervallo $[0 \mathrel{..} 1)$, si trova prima la *parte intera*, cioè il massimo numero intero n tale che $n \leq r$ e si applica il procedimento a $r - n$.

Fissiamo qualche notazione. Con r_0 indichiamo la parte intera di r e con r_k la k-esima cifra decimale ($k > 0$).

Non è possibile che tutte le cifre, da un certo punto in poi, siano uguali a 9. Lo verifichiamo nel caso più semplice, cioè $r_0 = 0$ e $r_k = 9$ per $k > 0$. Dalla definizione segue che, per ogni $k > 0$,

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^k} \le r < 1$$

cioè

$$1 - \frac{1}{10^k} \le r < 1$$

che è come dire $0 < 1 - r \le 10^{-k}$. Ma questo è assurdo: ogni numero positivo è maggiore di 10^{-n} per qualche intero positivo n.

Dati due numeri r e s, abbiamo che $r < s$ se e solo se

$$r_0 = s_0, \quad r_1 < s_1, \quad \dots r_{k-1} = s_{k-1}, r_k < s_k.$$

In altre parole si guarda per prima cosa la parte intera; se i due numeri hanno parti intere diverse, è chiaro qual è il più grande. Se le parti intere sono uguali, si guarda la prima cifra decimale e così via.

Come funziona l'addizione? Non possiamo certo cominciare dalla cifra più a destra, perché non c'è. Ma anche l'addizione usuale fra gli interi si può eseguire partendo da sinistra: proviamo con $634 + 197$. Abbiamo $6 + 1 = 7$ e ci spostiamo a destra; ora $3 + 9 = 12$ e quindi spostiamo 1 alla colonna precedente che diventa 8, dunque abbiamo 82?; ci spostiamo a destra dove troviamo $4 + 7 = 11$, quindi spostiamo 1 sulla colonna precedente e troviamo 831.

Di solito si comincia da destra perché così non abbiamo "riporti multipli".

Nel caso degli allineamenti decimali, però, c'è una complicazione: se sviluppiamo $2/3$ otteniamo l'allineamento $0{,}666\dots$ e da $1/3$ otteniamo $0{,}333\dots$. L'addizione partendo da sinistra produce $0{,}999\dots$, ma questo numero, per quanto visto prima, *è* 1.

Abbiamo dato per noti i numeri reali. Ma quello che si può trarre da questi discorsi è che gli allineamenti decimali danno una costruzione dei numeri reali.

8.6 LA COSTRUZIONE DI CANTOR

Una condizione necessaria affinché una successione (a_n) converga è che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista un $\bar{n}$ tale che, quando $m, n > \bar{n}$ si abbia $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Infatti, se (a_n) converge a l, possiamo trovare $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$ si abbia $|a_n - l| < \varepsilon/2$. Se $m, n > \bar{n}$, avremo

$$|a_m - a_n| = |a_m - l + (l - a_n)| \le |a_m - l| + |l - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

L'assioma di continuità garantisce che una successione che ha questa proprietà, chiamata *proprietà di Cauchy*, converge.

Vediamo per prima cosa che una successione di Cauchy è limitata. Basta prendere l'indice $\bar{n}$ relativo a $\varepsilon = 1$ per avere che, per ogni $m > \bar{n}$,

$$-1 + a_{\bar{n}+1} < a_m < 1 + a_{\bar{n}+1}$$

da cui ovviamente abbiamo che $|a_m| < 1 + |a_{\bar{n}+1}|$ e quindi

$$|a_n| \le \max\{\,|a_0|, |a_1|, \dots |a_{\bar{n}}|, 1 + |a_{\bar{n}+1}|\,\}.$$

Sia $r \le a_n \le s$, per ogni n. Se consideriamo la successione $b_n = (a_n - r)/(s - r)$ abbiamo che $0 \le b_n \le 1$; è facile vedere che anche (b_n) è una successione di Cauchy e che (b_n) converge se e solo se (a_n) converge.

Infiniti termini della successione cadono o in $[0 \mathrel{..} 1/2]$ oppure in $[1/2 \mathrel{..} 1]$; chiamiamo I_0 uno dei due intervalli, scegliendone uno in cui cadano infiniti termini; sia c_0 il primo termine b_n che cade in I_0. Ora dividiamo a metà I_0 e scegliamo una metà I_1 nella quale cadano infiniti termini; sia c_1 il primo termine successivo a c_0 che cade in I_1.

Proseguendo così otteniamo una successione (c_n) i cui termini cadono in una successione di intervalli inscatolati e che dunque converge a c. Ci basta ora vedere che anche (b_n) converge a c.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora abbiamo, per $m, n > \bar{n}$, sia $|b_m - b_n| < \varepsilon/2$ sia $|c_n - c| < \varepsilon/2$. Ora basta prendere anche c_n in modo che c_n venga dopo $b_{\bar{n}}$ (che è possibile per costruzione di c_n) e siamo a posto.

Due successioni di Cauchy determinano lo stesso numero reale se la loro differenza è una successione convergente a zero. La costruzione di Cantor è essenzialmente questa: i numeri reali sono le successioni di Cauchy di numeri razionali, identificando due di esse quando la differenza è zero.

Da un allineamento decimale è facile ottenere una successione di Cauchy di numeri razionali: basta considerare i successivi troncamenti. Il viceversa è un po' più complicato, ma solo tecnicamente. Come tecnicamente è complicato, ma non difficile, dimostrare che gli oggetti così ottenuti soddisfano gli assiomi dei numeri reali; l'addizione e la moltiplicazione si eseguono semplicemente sommando o moltiplicando le successioni termine a termine.

9 I NUMERI COMPLESSI

Nel sedicesimo secolo vari autori riuscirono nell'impresa di trovare una tecnica risolutiva delle equazioni di terzo grado: Scipione del Ferro (1465–1526), Nicolò Tartaglia (c. 1499–1557), Lodovico Ferrari (1522–1565), Girolamo Cardano (1501–1576) sono i nomi che compaiono nella famosa disputa sulla priorità della scoperta, con tanto di disfide e insulti.

Questa è la tecnica risolutiva di Tartaglia, che comparve nell'*Ars Magna* di Cardano. Consideriamo l'equazione

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

a cui si può ridurre ogni equazione di terzo grado. Con la sostituzione

$$y = x - \frac{a}{3}$$

è un facile calcolo ridurla ancora all'equazione

$$x^3 + px + q = 0.$$

Già prima di Tartaglia si sapeva che $-a/3$ è la media delle soluzioni dell'equazione, quindi la sostituzione non è altro che una traslazione per fare in modo che la media delle soluzioni sia 0.

A questo punto Tartaglia propone la nuova sostituzione

$$x = u - \frac{p}{3u}$$

che porta l'equazione nella forma

$$u^3 - pu + \frac{p^2}{3u} - \frac{p^3}{27u^3} + pu - \frac{p^2}{3u} + q = 0$$

cioè

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$$

che può essere trattata come un'equazione di secondo grado in u^3:

$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

il cui discriminante è

$$\Delta = 4\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right).$$

Se il discriminante è positivo, otteniamo un solo valore di x: se infatti $\delta^2 = \Delta$, le due soluzioni per u^3 sono

$$\frac{1}{2}(-q + \delta), \qquad \frac{1}{2}(-q - \delta)$$

e, sostituendo le radici cubiche, si ottiene lo stesso valore per x.

Tuttavia c'è un problema: se consideriamo l'equazione

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

il discriminante che otteniamo è

$$\Delta = 4\left(\frac{-7^3}{27} + \frac{6^2}{4}\right) = \frac{4}{27}(-343 + 9 \cdot 27) = -\frac{400}{27} < 0$$

quando la nostra equazione ha *tre* soluzioni! È ovvio infatti che 1 è una soluzione e, con la divisione, si trovano le altre due, cioè 2 e -3.

Un altro modo di affrontare la questione fu trovato dal francese François Viète (1540–1603). La sua idea fu di introdurre una nuova incognita y legata alla x da

$$y^2 + xy = \frac{p}{3}.$$

Se in $x^3 + px + q = 0$ sostituiamo $x = (p - 3y^2)/(3y)$, otteniamo

$$27y^6 - 27qy^3 - p^3 = 0.$$

Questa è una 'bicubica' il cui discriminante è $27(27q^2 + 4p^3)$, dove si riconosce la stessa limitazione di prima.

Per uscire dal dilemma ci sono due strade. Una di Viète che riportava in modo molto astuto le equazioni di terzo grado con discriminante negativo alla formula di triplicazione del coseno, l'altra di Cardano e dei successori che non si spaventarono al pensiero di maneggiare radici quadrate di numeri negativi.

La tecnica di Viète usa la formula di triplicazione del coseno: $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Cerchiamo dunque di scrivere l'espressione $x^3 + px$ in una forma simile: ponendo $x = a\cos\alpha$ otteniamo

$$x^3 + px = a^3\cos^3\alpha + ap\cos\alpha$$

e quindi ci serve $a^3 = 4b$, $ap = -3b$, cioè

$$\frac{a^3}{4} = -\frac{ap}{3}$$

da cui $a^2 = -4p/3$ che, naturalmente, è possibile solo quando $p < 0$. Con questo valore di a abbiamo l'equazione

$$4b\cos^3\alpha - 3b\cos\alpha + q = 0$$

cioè

$$b\cos(3\alpha) + q = 0$$

che ammette soluzione quando $-1 \le q/b \le 1$, cioè $q^2 \le b^2$ che equivale a

$$q^2 \le \frac{a^2p^2}{9} = -\frac{4p^3}{27}$$

cioè

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \le 0$$

che è esattamente la condizione che porta al problema delle radici quadrate di numeri negativi.

Nel caso di $p = -7$ e $q = 6$ abbiamo $a^2 = 28/3$ e

$$b = \frac{a^3}{4} = \frac{1}{4}\frac{28}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

e quindi l'equazione finale è

$$\cos 3\alpha = -\frac{q}{b} = -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \approx -0{,}8417$$

quindi

$$3\alpha \approx 2{,}57122 + 2k\pi \qquad (0 \le k \le 2)$$

e abbiamo le tre soluzioni (approssimate)

$$\alpha_1 \approx 0{,}85707, \quad \alpha_2 \approx 2{,}95147, \quad \alpha_3 \approx 5{,}04586.$$

Siccome $a \approx 3{,}05505$, avremo

$$\begin{aligned} x_1 &= a\cos\alpha_1 \approx 2{,}00000 \\ x_2 &= a\cos\alpha_2 \approx -3{,}00000 \\ x_3 &= a\cos\alpha_3 \approx 0{,}99999 \end{aligned}$$

che sono effettivamente i risultati attesi.

Decidiamo di non spaventarci neppure noi, ignorando la connotazione peggiorativa dell'aggettivo *immaginario* che Descartes affibbiò a questi "numeri". Secondo l'uso introdotto da Euler, indichiamo con i un numero tale che $i^2 = -1$; non è tanto diverso da indicare con $\sqrt{2}$ un numero che elevato al quadrato dia 2.

Già con questi nuovi numeri possiamo trovare radici quadrate di tutti i numeri reali: se $a > 0$ non c'è problema; se $a < 0$ possiamo scrivere

$$(i\sqrt{-a})^2 = i^2(-a) = a.$$

Naturalmente, una volta che abbiamo aggiunto questo numero, dobbiamo aggiungere anche tutti quelli della forma

$$a + bi$$

con a e b reali. Siccome siamo già abituati a maneggiare espressioni del tipo $3 + 2\sqrt{2}$, non ci facciamo problemi e proviamo a supporre che $a + bi = 0$. Allora anche $(a + bi)(a - bi) = 0$, cioè

$$0 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

Qui la faccenda è diversa: a e b sono numeri reali e quell'uguaglianza significa che $a = b = 0$. Dunque da $a + bi = 0$ segue $a = b = 0$. Può succedere che $a + bi = c + di$? Certo, ma in tal caso

$$(a - c) + (b - d)i = 0$$

e quindi $a = c$ e $b = d$.

9.1 OPERAZIONI SUI NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso è un'espressione della forma $a + bi$ dove a e b sono numeri reali. Per quanto visto prima, a e b sono univocamente determinati e si chiamano, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso. Le operazioni si eseguono usando le note proprietà:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Non occorre memorizzare formule: basta operare come al solito con le espressioni algebriche e ricordare che $i^2 = -1$. Esattamente come quando si deve razionalizzare $3/(\sqrt{2} - 1)$ si moltiplica numeratore e denominatore per $\sqrt{2} + 1$, usando il fatto che $(\sqrt{2})^2 = 2$.

In particolare $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Tanto per esercizio, cerchiamo di trovare i numeri complessi che elevati al quadrato danno i: dovremo avere

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

uguagliando la parte reale e quella immaginaria. Dalla prima otteniamo $a = b$ oppure $a = -b$; sostituendo nella seconda, vediamo che $a = -b$ porta a $-2a^2 = 1$ che non ha soluzioni. Dunque abbiamo $a = b$ e $2a^2 = 1$, quindi $a = b = 1/\sqrt{2}$ oppure $a = b = -1/\sqrt{2}$.

Più in generale, vediamo che ogni numero complesso diverso da 0 ha due radici quadrate. Se il numero è $h + ki$, la tecnica di prima ci porta al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = h \\ 2ab = k \end{cases}$$

che possiamo risolvere ricavando b dalla seconda equazione, almeno nel caso in cui $k \neq 0$, ma se $k = 0$ sappiamo già trovare a e b. Dunque possiamo scrivere $b = k/(2a)$ e sostituire nella prima equazione, trovando una risolvente biquadratica

$$4a^4 - 4ha^2 - k^2 = 0$$

che dà

$$a^2 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2} + h}{2}.$$

L'altra "soluzione" è da scartare perché negativa. Ogni valore trovato di a è legato a un valore di b e quindi abbiamo dimostrato l'asserzione fatta. Si ha, infatti, $b^2 = k^2/(4a^2)$ e quindi

$$b^2 = \frac{k^2}{4} \frac{2}{\sqrt{h^2 + k^2} + h} = \frac{k^2}{2} \frac{\sqrt{h^2 + k^2} - h}{k^2} = \frac{\sqrt{h^2 + k^2} - h}{2}.$$

Le soluzioni effettive si trovano scegliendo i valori positivi e negativi in modo che valga $2ab = k$. Si noti che queste espressioni valgono anche per il caso prima escluso di $k = 0$.

9.2 CONIUGATO DI UN NUMERO COMPLESSO

Se $u = a + bi$, con a e b reali, il *coniugato* di u è il numero complesso

$$\bar{u} = a - bi.$$

Si tratta di un ausilio molto importante: infatti sommando e sottraendo si trova

$$2a = u + \bar{u}, \qquad 2bi = u - \bar{u}$$

e quindi la conoscenza di $\bar{u}$ ci permette di trovare la parte reale e la parte immaginaria. Le proprietà del coniugato rispetto alle operazioni si verificano semplicemente:

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}, \qquad \overline{uv} = \bar{u}\bar{v}.$$

Particolarmente importante è l'espressione $u\bar{u} = a^2 + b^2$. In effetti

$$(uv)(\overline{uv}) = (u\bar{u})(v\bar{v})$$

e inoltre esiste un unico numero reale non negativo che elevato al quadrato dia $u\bar{u}$. Questo numero si chiama *modulo* di u:

$$|u| = \sqrt{u\bar{u}}.$$

Per esempio, il modulo di i è 1; il modulo di $2 + i$ è $\sqrt{5}$. Nel caso in cui u sia reale, cioè $u = \bar{u}$, il modulo è esattamente quello usuale.

È interessante notare che la disuguaglianza $|u + v| \leq |u| + |v|$ vale anche nei numeri complessi. Siccome si tratta di numeri reali non negativi, la disuguaglianza può essere verificata elevando al quadrato; siccome $|w|^2 = w\bar{w}$, dobbiamo verificare

$$(u + v)(\bar{u} + \bar{v}) \leq u\bar{u} + 2|u|\,|v| + v\bar{v}$$

che equivale, cancellando i termini uguali, a

$$v\bar{u} + u\bar{v} \leq 2|u|\,|v|.$$

Questa disuguaglianza è ovvia se il termine di sinistra è negativo. Se il termine di sinistra è non negativo, possiamo di nuovo elevare al quadrato e la disuguaglianza da verificare è

$$v^2\bar{u}^2 + 2u\bar{u}v\bar{v} + u^2\bar{v}^2 \le 4u\bar{u}v\bar{v}$$

che diventa

$$(v\bar{u} - u\bar{v})^2 \le 0.$$

Questa disuguaglianza è vera, anche se ciò sembra paradossale: se poniamo $w = v\bar{u}$, il termine da elevare al quadrato è $w - \bar{w}$ che ha parte reale nulla e quindi il suo quadrato è effettivamente ≤ 0.

Notiamo subito che non è possibile stabilire una relazione d'ordine sui numeri complessi in modo che valgano proprietà analoghe a quelle sui numeri reali. Non è un problema: in tutte le disuguaglianze che abbiamo scritto ambo i membri erano numeri reali; non è reale $v\bar{u} - u\bar{v}$, ma il suo quadrato sì.

Che succede ai numeri complessi di modulo 1? È evidente: $|u| = 1$ equivale a

$$u\bar{u} = 1$$

e quindi $\bar{u}$ è l'inverso di u. Come facciamo a trovare l'inverso di un numero complesso qualsiasi, diverso da 0? Semplice, razionalizziamo:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

e, siccome $a + bi \ne 0$, l'inverso esiste. Se lo vogliamo scrivere senza far ricorso alla parte reale e alla parte immaginaria, abbiamo

$$u^{-1} = |u|^{-2}\bar{u}.$$

Infatti

$$u(|u|^{-2}\bar{u}) = |u|^{-2}u\bar{u} = |u|^{-2}|u|^2 = 1.$$

Per ultimo, osserviamo che

$$||u|^{-1}u| = 1$$

e quindi ogni numero complesso non nullo si può scrivere (in modo unico) come prodotto di un numero reale positivo, il modulo, per un numero complesso di modulo 1.

9.3 FORMA TRIGONOMETRICA

Vediamo meglio che cosa possiamo fare con i numeri complessi di modulo 1: se $|u| = 1$ con $u = a + bi$, abbiamo evidentemente $a^2 + b^2 = 1$ e quindi sappiamo che esiste un numero reale α, determinato a meno di multipli interi di 2π tale che

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \sin\alpha.$$

Quindi $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$ e questo numero α si chiama *argomento* di u. Il fatto che non sia determinato univocamente non dà problemi. Proviamo a moltiplicare due numeri complessi di modulo 1:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &\qquad + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

I numeri complessi di modulo 1 si moltiplicano semplicemente sommando gli argomenti! Se ci ricordiamo di questo fatto, non occorre nemmeno ricordare le formule di addizione di seno e coseno.

Se $\beta = \alpha$, troviamo la formula di duplicazione o, più in generale, la formula per multipli qualsiasi, che si chiama *formula di De Moivre*:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

Per esempio possiamo sviluppare la potenza per $n = 3$ e trovare la formula di triplicazione:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3\\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + i^3\sin^3\alpha\\ &= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)\end{aligned}$$

che possono anche essere lette come

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha,\\ \sin 3\alpha &= 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.\end{aligned}$$

La forma trovata per i numeri di modulo 1 può essere estesa a tutti i numeri complessi diversi da 0. Infatti, come abbiamo visto, $|u|^{-1}u$ ha modulo 1, se $u \neq 0$; perciò

$$u = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

dove α è determinato a meno di multipli interi di 2π. Questa è la cosiddetta *forma trigonometrica* dei numeri complessi.

Il classico problema di trovare le radici n-esime dei numeri complessi si risolve facilmente: dato $u = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, dove $\rho = |u| > 0$, vogliamo trovare i numeri complessi $v = \sigma(\cos\beta + i\sin\beta)$ tali che $v^n = u$. La formula di De Morgan dice allora che deve valere

$$\sigma^n(\cos(n\beta) + i\sin(n\beta)) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

cioè $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$ e

$$n\beta = \alpha + 2k\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

Se vogliamo trovare le radici n-esime distinte, ci basterà far variare k tra 0 e $n - 1$, perché le altre 'soluzioni' corrispondono ad angoli che differiscono da quelli già trovati per multipli interi di 2π e quindi avremo

$$\frac{\alpha}{n}, \quad \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \quad \frac{\alpha + 4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}$$

dimostrando che ogni numero complesso diverso da 0 ha esattamente n radici n-esime distinte.

La notazione $\cos\alpha + i\sin\alpha$ è pesante, così spesso si abbrevia in $\operatorname{cis}\alpha$. Si noti la somiglianza, non casuale, di questa funzione con l'esponenziale:

$$\operatorname{cis}(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}\alpha\operatorname{cis}\beta.$$

Vogliamo risolvere il seguente problema: trovare una formula per

$$\begin{aligned}a_n &= \sin\alpha + \sin(2\alpha) + \dots + \sin(n\alpha),\\ b_n &= 1 + \cos\alpha + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(n\alpha).\end{aligned}$$

Se moltiplichiamo la prima per i e sommiamo le due, troviamo

$$b_n + ia_n = \operatorname{cis}(0\alpha) + \operatorname{cis}(1\alpha) + \dots + \operatorname{cis}(n\alpha)$$

che è la somma di una progressione geometrica:

$$\begin{aligned} b_n + ia_n &= (\operatorname{cis}\alpha)^0 + (\operatorname{cis}\alpha)^1 + (\operatorname{cis}\alpha)^2 + \dots + (\operatorname{cis}\alpha)^n \\ &= \frac{(\operatorname{cis}\alpha)^{n+1} - 1}{\operatorname{cis}\alpha - 1} \\ &= \frac{\operatorname{cis}((n+1)\alpha) - 1}{\operatorname{cis}\alpha - 1} \end{aligned}$$

naturalmente quando $\operatorname{cis}\alpha \neq 1$, cioè $\alpha \neq 0$ (o multipli interi di 2π), ma in questo caso la somma da cercare è banale.

Una forma molto interessante si trova raccogliendo $\operatorname{cis}((n+1)\alpha/2)$ al numeratore e $\operatorname{cis}(\alpha/2)$ al denominatore; per evitare notazioni pesanti poniamo $\beta = \alpha/2$ e $\gamma = (n+1)\beta$:

$$b_n + ia_n = \frac{\operatorname{cis}\gamma}{\operatorname{cis}\beta}\,\frac{\operatorname{cis}\gamma - \overline{\operatorname{cis}\gamma}}{\operatorname{cis}\beta - \overline{\operatorname{cis}\beta}}.$$

È facile dunque scrivere le espressioni per a_n e b_n, ricordando che $\operatorname{cis}\delta - \overline{\operatorname{cis}\delta} = 2i\sin\delta$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\cos\frac{n\alpha}{2}, \\ a_n &= \frac{\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\sin\frac{n\alpha}{2}. \end{aligned}$$

9.4 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

I numeri complessi rimasero un'entità vista con molto sospetto fino a che Argand e Gauß ne diedero un'evidente interpretazione geometrica: se vediamo un numero complesso come un punto del piano, adoperandone la parte reale e la parte immaginaria come coordinate in un sistema di riferimento cartesiano, l'addizione corrisponde alla nota regola del parallelogramma e la moltiplicazione a una rotazione attorno all'origine seguita da un allungamento o una contrazione.

Supponiamo di voler calcolare le coordinate del punto simmetrico rispetto a un asse del punto di coordinate (s,t). Facciamo l'ipotesi semplificatrice che l'asse passi per l'origine e che non sia l'asse delle ordinate (in questo caso non c'è alcuna difficoltà).

Se la retta ha equazione $y = mx$, sappiamo che $m = \tan\alpha$, dove α è l'angolo formato con il semiasse positivo delle ascisse. Possiamo allora ruotare il punto attorno all'origine di un angolo $-\alpha$, calcolare il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse e ruotare di un angolo α. Siccome il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse è il coniugato, le operazioni da eseguire sono, ponendo $u = s + ti$,

$$u \mapsto u\operatorname{cis}(-\alpha) \mapsto \overline{u\operatorname{cis}(-\alpha)} = \bar{u}\operatorname{cis}\alpha \mapsto \bar{u}\operatorname{cis}\alpha\operatorname{cis}\alpha = \bar{u}\operatorname{cis}(2\alpha).$$

Quindi il simmetrico è

$$(s - ti)\operatorname{cis}(2\alpha) = s\cos(2\alpha) + t\sin(2\alpha) + i(s\sin(2\alpha) - t\cos(2\alpha)).$$

Allora, ricordando le note formule e che $m = \tan\alpha$,

$$\cos(2\alpha) = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \qquad \sin(2\alpha) = \frac{2m}{1+m^2},$$

possiamo scrivere che il simmetrico di (s,t) ha coordinate

$$\left(\frac{s(1-m^2) + 2mt}{1+m^2}, \frac{2ms - t(1-m^2)}{1+m^2}\right),$$

formula decisamente più complicata.

Se vogliamo calcolare la semidistanza d tra un punto e il suo simmetrico, ci basta calcolare il modulo della differenza:

$$2d = |u - \bar{u}\operatorname{cis}(2\alpha)|.$$

Ricordando che $|\operatorname{cis}(-\alpha)| = 1$,

$$\begin{aligned} 2d &= |u - \bar{u}\operatorname{cis}(2\alpha)| \cdot |\operatorname{cis}(-\alpha)| \\ &= |u\operatorname{cis}(-\alpha) - \bar{u}\operatorname{cis}\alpha| \\ &= |u\operatorname{cis}(-\alpha) - \overline{u\operatorname{cis}(-\alpha)}| \end{aligned}$$

e il termine dentro il modulo è il doppio della parte immaginaria di

$$(s + ti)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

cioè

$$\begin{aligned} d &= |-s\sin\alpha + t\cos\alpha| \\ &= |\cos\alpha|\,|t - ms| \\ &= \frac{|t - ms|}{\sqrt{1 + m^2}} \end{aligned}$$

come ben noto dalla formula della distanza di un punto da una retta.

Il caso generale in cui la retta ha equazione $y = mx + q$ si tratta eseguendo una traslazione iniziale ($u \mapsto u - qi$) che poi viene eseguita a rovescio alla fine:

$$u \mapsto (\overline{u - qi})\operatorname{cis}(2\alpha) + qi$$

e il calcolo della distanza è molto simile. Si può anche traslare rispetto a un qualsiasi w che corrisponda a un punto della retta e così la formula funziona anche quando la retta è parallela all'asse delle ordinate: se prendiamo la retta di equazione $x = a$, abbiamo $\alpha = \pi/2$ e, per esempio, $w = a$; allora il corrispondente di u è il punto

$$(\overline{u - a})\operatorname{cis}\pi + a = -(\bar{u} - a) + a = -\bar{u} + 2a,$$

come ci si attende.

Per la simmetria centrale rispetto all'origine la trasformazione è $u \mapsto -u$; per la simmetria centrale rispetto al punto di coordinate (a, b), poniamo $w = a + bi$ e quindi la trasformazione è

$$u \mapsto -(u - w) + w = -u + 2w.$$

Se vogliamo invece una rotazione di un angolo α rispetto all'origine, la trasformazione è $u \mapsto u\operatorname{cis}\alpha$ che, per la rotazione attorno a w, inteso come punto del piano, la trasformazione è

$$u \mapsto (u - w)\operatorname{cis}\alpha + w.$$

Proviamo, come semplice applicazione, a calcolare la composizione di due simmetrie assiali rispetto a due rette incidenti. Se la prima ha coefficiente angolare $m = \tan\alpha$, la seconda coefficiente angolare $n = \tan\beta$ e il punto di intersezione è w, il risultato finale della composizione applicata al punto u è

$$(\overline{v - w})\operatorname{cis}2\beta + w = \bar{v}\operatorname{cis}2\beta - \bar{w}\operatorname{cis}2\beta + w$$

dove $v = (\overline{u - w})\operatorname{cis}2\alpha + w$. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} u \mapsto{} & (u - w)\overline{\operatorname{cis}2\alpha}\operatorname{cis}2\beta + \bar{w}\operatorname{cis}2\beta - \bar{w}\operatorname{cis}2\beta + w \\ &= (u - w)\operatorname{cis}(2\beta - 2\alpha) + w \end{aligned}$$

che è evidentemente una rotazione con centro w. Si provi che, invece, la composizione di due simmetrie assiali rispetto a due rette parallele è una traslazione.

9.5 IL TEOREMA FONDAMENTALE

I numeri complessi sono importanti per una proprietà che fu intuita fin dal sedicesimo secolo e dimostrata, seppure in modo incompleto, da Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert (1717–1783); la prima dimostrazione rigorosa fu data da Carl Friedrich Gauß (1777–1855) nella sua tesi di laurea (1799).

Siccome nei complessi si può parlare di somme e moltiplicazioni, ha senso il concetto di polinomio a coefficienti complessi: una funzione del tipo

$$z \mapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

dove a_0, a_1, …, a_n sono numeri complessi.

TEOREMA FONDAMENTALE. *Ogni polinomio di grado maggiore di zero a coefficienti complessi ha una radice complessa.*

La dimostrazione richiede tecniche fuori dalla portata di queste note; ne vediamo solo qualche conseguenza.

La prima conseguenza è che ogni polinomio di grado $n > 0$ si scrive come

$$a_n(z - u_1)(z - u_2)\dots(z - u_n)$$

dove le radici u_j possono anche essere ripetute. Infatti il teorema fondamentale dice che una radice u_1 esiste, quindi il polinomio è divisibile per $z - u_1$ con quoziente di grado $n - 1$ e si può ripetere il procedimento fino a che il grado del quoziente è 1. In effetti è chiaro che la dimostrazione del cosiddetto teorema di Ruffini si estende a polinomi a coefficienti complessi.

Seconda conseguenza: se un polinomio a coefficienti reali è irriducibile, allora ha grado 1 oppure 2.

LEMMA. *Se u è una radice complessa del polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ a coefficienti reali, allora anche $\bar{u}$ è radice di P.*

▶ Per ipotesi si ha $a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n = 0$; allora abbiamo

$$0 = \bar{0} = \overline{a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n} = a_0 + a_1 \bar{u} + \dots + a_n \bar{u}^n$$

che è esattamente la tesi. Si noti che abbiamo usato il fatto che $\bar{a}_j = a_j$ perché i coefficienti sono reali. ◀

TEOREMA. *Se P è un polinomio irriducibile a coefficienti reali di grado maggiore di 1, allora P ha grado 2 e discriminante negativo.*

▶ Se P ha una radice reale ed è irriducibile, allora ha grado 1, per il teorema di Ruffini. Quindi possiamo supporre che P non abbia radici reali. Ma siccome P ha una radice complessa u, ha anche la radice $\bar{u}$ e quindi è divisibile sia per $x - u$ (con x indichiamo la variabile del polinomio) sia per $x - \bar{u}$ che sono polinomi irriducibili distinti; quindi P è divisibile per

$$(x - u)(x - \bar{u}) = x^2 - (u + \bar{u})x + u\bar{u}$$

che è a coefficienti reali. Dunque il quoziente è un polinomio di grado 0, altrimenti P non sarebbe irriducibile. Il discriminante di P è negativo, perché P non ha radici reali. Del resto, a parte il quoziente di grado 0, il discriminante del polinomio appena scritto è

$$u^2 + 2u\bar{u} + \bar{u}^2 - 4u\bar{u} = (u - \bar{u})^2 < 0.$$ ◀

Questo naturalmente non significa che sappiamo calcolare la decomposizione in ogni caso: è più un risultato teorico che pratico, che dice l'importanza di considerare i complessi come strumenti effettivi per la matematica e non solo come passaggi intermedi da eliminare e nascondere.

9.6 L'ESPONENZIALE E IL LOGARITMO COMPLESSO

Proviamo a calcolare la "derivata" della funzione cis:

$$\operatorname{cis}' t = \cos' t + i \sin' t = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i \operatorname{cis} t.$$

Si tratta solo di un calcolo formale che per ora non tenteremo di giustificare. Seguendo Euler, possiamo scrivere allora

$$\operatorname{cis} t = \exp(it)$$

perché sappiamo che se una funzione f ha la proprietà che $f' = cf$, con c costante, allora $f(x) = \exp(cx)$. Euler allora *definì* la funzione esponenziale su un numero complesso come

$$\exp(x + yi) = \exp x \operatorname{cis} y$$

e osservò che vale l'usuale proprietà:

$$\exp(u + v) = \exp u \exp v$$

per numeri complessi qualsiasi u e v. In particolare

$$\begin{aligned}
\cos y &= \frac{1}{2}(\operatorname{cis} y + \operatorname{cis}(-y)) = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2}, \\
i \sin y &= \frac{1}{2}(\operatorname{cis} y - \operatorname{cis}(-y)) = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2}.
\end{aligned}$$

È molto utile definire due funzioni che hanno un comportamento molto simile alle funzioni trigonometriche:

$$\cosh t = \frac{\exp t + \exp(-t)}{2}, \qquad \sinh t = \frac{\exp t - \exp(-t)}{2}$$

che si chiamano *coseno iperbolico* e *seno iperbolico* rispettivamente. La relazione euleriana dice che si possono *definire* coseno e seno su ogni complesso con

$$\cos u = \cosh(iu), \qquad \sin u = \frac{1}{i} \sinh(iu)$$

ottenendo funzioni che hanno le stesse proprietà formali, per esempio le stesse formule di addizione, e periodo 2π.

La relazione che scrisse, cioè $\exp(\pi i) = -1$, si può anche scrivere

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

che è molto suggestiva. Si può obiettare che non ha senso elevare e a un 'numero immaginario', ma ha senso elevarlo a π? È esattamente la stessa cosa: finché ci limitiamo a ubbidire alle definizioni, non facciamo nulla di proibito e insensato.

Ci poniamo il problema di trovare un numero complesso $x + yi$, con x e y reali, tali che

$$\exp(x + yi) = \rho \operatorname{cis} \alpha$$

dove $z = \rho \operatorname{cis} \alpha$ è un numero complesso non nullo fissato. L'equazione diventa allora

$$\exp x \operatorname{cis} y = \rho \operatorname{cis} \alpha$$

che ha come soluzioni

$$x = \log \rho, \qquad y = \alpha + 2k\pi \ (k \text{ intero}).$$

Quindi $x = \log\rho$ e y è una qualsiasi delle determinazioni dell'argomento di z. I numeri che hanno "logaritmo complesso" puramente immaginario sono allora quelli per i quali $x = 0$, cioè $\rho = 1$: i numeri complessi di modulo 1. Quelli che hanno (almeno un) "logaritmo complesso" reale sono i numeri con $\alpha = 0$, cioè i numeri reali positivi. Un numero reale negativo ha come argomento $\alpha = \pi$: se x è reale e $x < 0$, un suo logaritmo complesso è

$$\log|x| + \pi i.$$

Il sogno di Johan Bernoulli che argomentava dicendo

$$\log x = \frac{1}{2}\log(x^2) = \frac{1}{2}\log(|x|^2) = \log|x|$$

non si è avverato. Purtroppo non si è avverato nemmeno il sogno di Euler che sperava di estendere le proprietà del logaritmo ai numeri complessi: l'indeterminazione dell'argomento non permette di fare calcoli.

Una potenza a^b può rappresentare un numero reale anche se a e b non sono reali: per definizione i valori assunti da a^b sono quelli assunti da $\exp(b\log a)$. Occorre dunque che $b\log a$ assuma almeno un valore reale. Per esempio, i logaritmi complessi di -1 sono i numeri complessi della forma $i(\pi+2k\pi)$, quindi i valori di $(-1)^{-i}$ sono i numeri della forma $e^{\pi+2k\pi}$. Quanto fa i^i?

9.7 SERIE DI TAYLOR

Supponiamo di avere una successione (c_n) a valori complessi. Siccome sappiamo scrivere $c_n = a_n + ib_n$, con a_n e b_n reali, possiamo *definire* il limite della successione come $c = a + ib$ dove a e b sono i limiti delle due successioni trovate, ammesso che esistano. La cosa interessante è che potremmo definire il limite in modo del tutto analogo a quanto fatto per le successioni a valori reali.

TEOREMA. *Il limite della successione complessa (c_n) vale c se e solo se, per ogni tolleranza $\varepsilon > 0$, esiste un k tale che per ogni $n \geq k$ si abbia*

$$|c_n - c| < \varepsilon.$$

▶ Supponiamo che il limite valga $c = a + ib$ secondo la definizione data e fissiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$. Allora sappiamo che esiste k tale che, per $n \geq k$, si abbia

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $z = x + iy$, sappiamo che

$$|z| \leq |x| + |iy| = |x| + |y|$$

e dunque, per $n \geq k$, abbiamo

$$|c_n - c| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Viceversa, supponiamo che la condizione dell'enunciato valga. Qui usiamo il fatto quasi ovvio che $|x| \leq |z|$ e $|y| \leq |z|$ per $z = x + iy$. Allora, da $|c_n - c| < \varepsilon$ seguono le disuguaglianze richieste

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |b_n - b| < \varepsilon$$

che provano la tesi. ◀

Una volta che sappiamo dare un senso al limite di una successione, possiamo anche parlare di serie. Si può anche definire la convergenza assoluta allo stesso modo di prima: la serie di termine generale (c_n) converge assolutamente quando la serie di termine generale $(|c_n|)$ converge. È un facile esercizio dimostrare che la convergenza assoluta implica la convergenza.

In particolare possiamo asserire che la serie di potenze $\sum_{n\ge0} z^n/n!$ converge per ogni z complesso e quindi *definire* l'esponenziale come

$$\exp z = \sum_{n\ge0} \frac{z^n}{n!}.$$

Se $z = iy$, abbiamo

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{n\ge0} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n\ge0} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n\ge0} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y = \operatorname{cis} y\end{aligned}$$

separando parte reale e parte immaginaria. Si può anche dimostrare la relazione fondamentale

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2,$$

che però richiede alcuni calcoli piuttosto complicati, sebbene non difficili.

La regola dello sviluppo del binomio vale anche per i numeri complessi, essendo basata solo sulle regole formali delle operazioni:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Possiamo dimostrarla considerando la funzione

$$f(x) = (x+b)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k b^{n-k}$$

che ha come derivata

$$f'(x) = n(x+b)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} b^{n-k}$$

(il termine per $k = 0$ sparisce). Nella somma cambiamo l'indice k ponendo $k = j + 1$:

$$f'(x) = n(x+b)^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n}{j+1} x^j b^{n-1-j}.$$

Ora consideriamo

$$(j+1)\binom{n}{j+1} = (j+1)\frac{n!}{(j+1)!\,(n-1-j)!} = n\frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} = n\binom{n-1}{j}$$

e dunque

$$f'(x) = n(x+b)^{n-1} - n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j b^{n-1-j}$$

e, per ipotesi induttiva, possiamo supporre che

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j b^{n-1-j} = (x+b)^{n-1}.$$

Dunque $f'(x) = 0$, cioè f è costante. Siccome $f(0) = b^n - b^n = 0$, abbiamo l'uguaglianza richiesta. Il passo base dell'induzione, cioè il caso di $n = 0$ è ovvio.

Estendiamo la definizione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ anche per $k > n$ ponendo $\binom{n}{k} = 0$. In questo modo possiamo scrivere $(a+b)^n = \sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ come se fosse una serie, almeno nel caso di $b \neq 0$. Siccome vogliamo provare che $\exp(a+b) = \exp a \exp b$, il caso di $b = 0$ non ci dà problemi e quindi non è restrittivo assumere $b \neq 0$. Consideriamo dunque

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k\ge 0}a^k\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}b^{n-k}.$$

La somma interna può essere scritta come

$$\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}b^{n-k} = \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{(n-k)!}b^{n-k} = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{m-k}\frac{b^l}{l!}.$$

La convenzione, che funziona, è che una somma in cui l'indice inferiore è maggiore dell'indice superiore vale 0. Dunque otteniamo

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{k\ge 0}\frac{a^k}{k!}\left(\sum_{l=0}^{m-k}\frac{b^l}{l!}\right).$$

Se ora calcoliamo il limite per $m \to +\infty$, la parentesi interna diventa $\exp b$ e quindi abbiamo esattamente l'uguaglianza richiesta. In alcuni passaggi occorrerebbe maggiore cautela, ma ci accontentiamo.

Questa nuova definizione dell'esponenziale è del tutto equivalente a quella data prima, visto che per le proprietà appena esaminate si ottiene

$$\exp(x+iy) = \exp x \operatorname{cis} y.$$

Si usa definire tramite questa funzione anche le funzioni trigonometriche:

$$\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}, \qquad \sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$$

per ogni z complesso. Quando z è reale, infatti, si hanno proprio le identità che derivano da $\exp(iy) = \operatorname{cis} y$. Si definisce di solito anche

$$\cosh z = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}, \qquad \sinh z = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$$

cosicché

$$\cos z = \cosh(iz), \qquad \sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz).$$