A. Insiemi convessi

1) Dare un esempio di una famiglia di insiemi convessi tali che ogni loro sottofamiglia finita abbia intersezione $\neq \emptyset$, mentre la famiglia ha intersezione $= \emptyset$.

2) Sia $\| * \|$ la norma euclidea su R^n. Dimostrare che $\{x \in R^n : \|x - \bar{x}\| < e\}$ con $\bar{x} \in R^n$ ed $e > 0$ è un insieme convesso.

3) Determinare l'involucro convesso e la chiusura convessa dei seguenti insiemi

(a) $$\left\{x \in Z_+^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 2\right\} \cup \left\{x \in Z_+^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\right\} ;$$

(a') $$\left\{x \in B^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 2\right\} \cup \left\{x \in B^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\right\} \text{ dove } B = \{0,1\} ;$$

(b) $$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 > 0, x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\} \cup$$
$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 > 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \cup$$
$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 > 0, x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\} ;$$

(c) $$\{x \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_3 = 1\} \cup \{x \in R^3 : x_2 = 0, x_3 = 0\} ;$$

(d) $$\{x \in R^2 : 2x_1^2 - x_2 < 0,\ x_1^2 - x_2 + 2 > 0\} ;$$

(e) $$\{x \in R^2 : x_1 x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 0\} .$$

4) Determinare i punti estremi, l'involucro convesso e la chiusura convessa dei seguenti insiemi

(a) $$\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \leq e^{-x_1} \wedge x_2 \leq e^{x_1}\}$$

(b) $$\{x \in R^3 : x_3 = 1\} \cup \{(1,0,0), (0,1,0)\}$$

5) Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in R^2 : y \geq x^2, y \leq 1\} \ ; \quad B = \left\{(x, y) \in R^2 : x > 0, y \leq \frac{1}{x}, y \geq 1\right\} ;$$

- dire quali di questi insiemi è convesso;
- trovare i punti estremi di A e di B;
- determinare l'involucro convesso e la chiusura convessa di $A \cup B$.

6) Dato un numero finito di punti nel piano, si consideri la loro chiusura convessa. I primi sono sempre punti estremi della seconda? Giustificare. Illustrare con esempi numerici.

7) Dire, giustificando, se l'uguaglianza $conv X = conv\, cl X$ è necessaria, sufficiente affinché l'insieme convesso X sia chiuso. E se X non è convesso?

8) Dimostrare che l'insieme $\{x \in R^n : Ax \geq b\}$ con A matrice $m \times n$ e $b \in R^m$ è convesso. Determinare casi in cui non possiede punti estremi.

9) Siano $K \subseteq R^n$ convesso e $f : R^n \to R^m$ affine. Dimostrare che $\{y \in R^m : y = f(x), x \in K\}$ è convesso.

10) Considerare ciascuna delle seguenti affermazioni e dire, giustificando, se è vera o falsa.

- Un insieme convesso $X \subset R^n$ possiede (almeno) un iperpiano di supporto in ogni punto della sua frontiera;
- un insieme $X \subset R^n$ è convesso se e solo se possiede (almeno) un iperpiano di supporto in ogni punto della sua frontiera;
- un insieme è convesso se e solo se il suo involucro convesso ha la stessa frontiera dell'insieme.

B. Funzioni convesse

1) Dimostrare che se $\{f_i\}_{i \in I}$ è una famiglia (non necessariamente finita) di funzioni reali convesse definite su un insieme convesso $A \subseteq R^n$ allora la funzione $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ è una funzione convessa su A.

2) Sia data una funzione $f : A \subseteq R^n \to R$. Dire, giustificando, se è vera o falsa la seguente affermazione: Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa è che l'insieme $lev_{\leq a} f = \{x \in A : f(x) \leq a\} \subseteq A \subseteq R$ sia convesso $\forall a \in R$.

3) Sia data la funzione $q : A \to R_+$ con $A \subseteq R^n$ aperto e convesso. Dimostrare che se $\log q$ è una funzione convessa su A allora q è convessa su A. Vale il viceversa?

4) Data una funzione $f : R \to R$ continua e monotona non decrescente dire, giustificando, se è vero o falso che la sua funzione integrale è convessa.

5) Sia $f : R \to R$ una funzione convessa. Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

- la funzione $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ è convessa;
- la funzione $f(x) \circ f(x) = f(f(x))$ è convessa.

In ognuno dei due casi, se l'affermazione è falsa, aggiungere un'ipotesi affinché risulti vera.

6) Sia data una funzione concava $f : R \to R$ tale che $f \in C^2$ e $f(x) \leq 0$ $\forall x \in R$. Studiare, rispetto alla concavità e alla convessità, le funzioni f^n, $n \in N$.

7) Studiare la convessità e la stretta convessità delle seguenti funzioni $f : R \to R$:

a) $f(x) = |x| + 1$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = \begin{cases} c & x \geq 0 \\ -c & x < 0 \end{cases}$ dove c è un numero reale > 0

d) $f(x) = \max\{0, \quad x^2 - 1\}$

e) $f(x) = \max\{x^2, \quad (x-1)^2\}$.

Nel caso in cui f sia convessa e non derivabile, determinare il sottodifferenziale di f in ciascuno dei punti di non derivabilità.

8) Data la norma euclidea su R^n dire se è vero o falso che
- è una funzione convessa;
- una funzione strettamente convessa.

9) Dire se è vera o falsa la seguente affermazione: Se f è una funzione quasi convessa su un insieme convesso X ogni punto di minimo locale di f su X è anche di minimo globale.

C. Problemi di estremo libero

1) Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari, specificando se sono punti di massimo, di minimo (locale o globale) o nessuno di questi:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 - 3x_1 x_2 + 3x_2^2$

b) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2$

c) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2)(2x_1 - x_2)$

d) $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2 + x_2^2 + 1$

2) Sia B una matrice $m \times n$, con $m \geq n$, di rango massimo. Posto $Q = B^T B$ mostrare che il problema

$$\min_{x \in R^n} \langle x, Qx \rangle$$

ha come unica soluzione la n-pla nulla.

3) Dato il problema $\min_{x \in R^n} \|y - Ax\|$ con $y \in R^m$ ed A matrice $m \times n$, dimostrare che:

a) ogni soluzione ottima del problema è soluzione di $A^T Ax = A^T y$ e viceversa;

b) se le colonne di A sono linearmente indipendenti allora la soluzione è unica.

4) Sia Γ una matrice $n \times n$ simmetrica definita positiva ed A una matrice $m \times n$ di rango qualsiasi. Dimostrare che il problema

$$\min_{x \in R^n} \langle x, (\Gamma + A^T A)^{-1} x \rangle$$

ha soluzione e tale soluzione è unica.

D. Metodo di Frank-Wolfe

1) Eseguire un'iterazione del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 1)^2$$

sul poliedro di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(4,4)$, $(2,4)$, $(0,2)$ a partire dal punto $x^k = (2,3)$.

2) Eseguire un'iterazione del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 6x_1 x_2 - 4x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 3$$

sul poliedro di vertici $(2,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$, $(-1,1)$, $(1,2)$ a partire dal punto $x^k = (\frac{3}{2},1)$.

3) Eseguire un'iterazione del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_1 x_2 - 4x_2^2 - 2x_1 - 7x_2 + 3$$

sul poliedro di vertici $(-4,0)$, $(-3,-3)$, $(-1,-6)$, $(0,-6)$, $(0,0)$ a partire dal punto $x^k = (-\frac{1}{2},-6)$.

E. Problemi di estremo vincolato

1) Risolvere i seguenti problemi:

$$\text{(a)} \begin{cases} \max(4x_1 + x_2) \\ x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \min(2x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} \min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} \min(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 \ge 100 \\ x_2 \ge 50 \end{cases} \qquad \text{(e)} \begin{cases} \min(x_1^2 + x_2^2) \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

2) Dimostrare che il massimo della funzione $f(x_1) + f(x_2)$ soggetto ai vincoli

$$x_1 + x_2 = b\,;\ x_1 \ge 0\,;\ x_2 \ge 0\,,$$

con $b \ge 0$ e con $f : R \to R$ funzione convessa tale che $f(0) = 0$, uguaglia $f(b)$.

Caso particolare: $f(x) = x + ax^2, a \geq 0$.

3) Dato il problema:

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Determinare *f* in modo che gli eventuali punti stazionari non annullino il gradiente della Lagrangiana.

4) Tra tutti i rettangoli aventi i vertici sulla curva di equazione $x_1^2 + 3x_2^2 = 9$, determinarne uno di area massima. Si ha unicità della soluzione?

5) Determinare la distanza tra i seguenti insiemi di R^2:

$$A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 25\} \quad B = \{(x, y) \in R^2 : (x-12)^2 + (y-16)^2 \leq 100\}.$$

6) Si considerino i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\text{(a)} \begin{cases} \min(-x_1 - x_2) \\ x_1^3 + x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \min(2x_1 - x_2) \\ x_1^3 + x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} \min(x_1 - x_2) \\ x_1^2 + x_2^3 \leq 0 \\ x_2 + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Per ciascuno di essi:
- risolvere geometricamente il problema;
- discutere la condizione di qualifica dei vincoli (Constraint Qualification);
- risolvere il problema con uno dei teoremi noti di ottimizzazione vincolata.

7) Dato l'insieme $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$, si consideri il problema che consiste nel determinare il punto di S avente minima distanza (euclidea) dall'origine di R^2. Formulare tale problema come problema di minimo vincolato. Discutere la condizione di Kuhn-Tucker e risolvere il problema.

8) Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\left[-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2\right] \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases} ;$$

- dire se il problema è convesso;
- dire se il problema è regolare;
- dire se nel punto $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ vale la condizione di Kuhn-Tucker e verificare la risposta.

9) Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\left[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2\right] \\ x_1^2-2x_1-x_2 \geq -4 \\ x_1+x_2 \geq 2 \end{cases} ;$$

- dire se il problema è convesso;
- dire se il problema è regolare;
- risolvere il problema geometricamente e dire se nel punto di ottimo vale la condizione di Kuhn-Tucker. Dare una giustificazione teorica del risultato trovato.

10) Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min(x_1^2-2x_1+x_2^2+2x_2+2) \\ x_1^2-2x_1+x_2^2-2x_2+1 \leq 0 \\ 2x_2-x_1^2+x_1 \leq 0 \end{cases} ;$$

- risolvere geometricamente il problema;
- discutere la regolarità dei punti ammissibili;
- dire se le condizioni di Kuhn-Tucker sono necessarie;
- risolvere il sistema di Kuhn-Tucker e determinare il punto di minimo.

F. Punti di sella e dualità

1) Sia dato il problema

$$P \quad \begin{cases} \min(x_1+x_2) \\ 2x_1+x_2 \geq 1 \\ x_1+2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare i punti di sella della Lagrangiana del problema P; successivamente, scrivere il duale del problema P e discutere le soluzioni del duale rispetto ai punti di sella trovati. Quanto vale il gap di dualità?

2) Sia $f : R \to R$. E' dato il problema di estremo vincolato non differenziabile

$$\begin{cases} \min \dfrac{|f(x)|+f(x)}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} ;$$

risolverlo, usando la condizione di punto di sella della Lagrangiana.

3) Sfruttando la condizione di punto di sella, dimostrare che $x=1$ è punto di minimo globale di $f(x)=|\log x|$ su $(0, \quad +\infty)$.

4) Dati i seguenti problemi

a) $\begin{cases} \min \; f(x) = x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\ x \in S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \min \; f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ x_1 - 1 \le 0 \\ x \in R^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \min \; f(x) = |x_1| + x_2 \\ x_1 \le 0 \\ x \in S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \ge 0\} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \min \; f(x) = -x \\ x - \frac{1}{2} \le 0 \\ x \in S = \{0,1\} \end{cases}$

per ciascuno di essi determinare il duale ed il gap di dualità.

5) Risolvere il duale del problema

$$\min_{x_1 \ge 0} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1 \right).$$

6) Dimostrare che il duale del problema

$$\min_{x_1 \ge 0} \left(\frac{1}{2} s x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_1 \right)$$

è un problema di massimizzazione in termini del moltiplicatore l. Analizzare in particolare il caso $s = +1$ ed il caso $s = -1$.