LA FORMULA CHIUSA PER I NUMERI DI FIBONACCI

ENRICO GREGORIO

I numeri di Fibonacci costituiscono una successione numerica molto interessante, che si ritrova in molti campi applicativi. La definizione è la seguente, per ricorrenza:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \quad (n > 2).$$

Perciò $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$, $f_7 = 13$ e così via.

Introduciamo una matrice e un vettore che ci saranno utili:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Porremo anche $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$ e, in generale,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n.$$

Proposizione. *Per ogni n, si ha*

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

dove f_k denota il k-esimo numero di Fibonacci.

Dimostrazione. La parte $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_n$ è ovvia. Vediamo, per induzione, il resto. Il caso $n = 0$ è ovvio. Per il passo induttivo

$$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{bmatrix}$$

e $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$, per la definizione dei numeri di Fibonacci. $\square$

Possiamo considerare l'applicazione lineare $f_{\mathbf{A}} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definita da $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$. Se riuscissimo a trovare una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbb{C}$ rispetto alla quale la matrice associata a $f_{\mathbf{A}}$ sia "semplice", potremmo forse calcolare la potenza $\mathbf{A}^n$. Ne cerchiamo una $\mathbf{D}$ che sia diagonale e quindi dovremmo avere $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ con, evidentemente,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Infatti la matrice associata a $f_{\mathbf{A}}$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ su dominio e codominio è

$$[C_{\mathscr{B}}(f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}_1)) \quad C_{\mathscr{B}}(f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}_2))];$$

se $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1$ e $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_2$, la matrice associata sarebbe proprio

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Dunque ci serve trovare i valori λ per i quali esista un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$: con la terminologia appropriata, sono autovalori e autovettori di $\mathbf{A}$. Se $\mathbf{v} = [x\ y]^T$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

cioè, fissato λ, un sistema omogeneo che vogliamo con soluzioni non nulle. La condizione è dunque che la matrice dei coefficienti abbia rango minore di 2, cioè determinante nullo. Quindi, essendo

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

la condizione è che $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Le radici sono

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

dove, evidentemente, $\widehat{\varphi} = 1 - \varphi = -1/\varphi$.

Una soluzione non nulla del sistema nel caso di $\lambda = \varphi$ è data dall'equazione $-\varphi x + y = 0$, quindi possiamo prendere $x = 1$ e ne otteniamo il vettore $\mathbf{v}_1 = [1\ \varphi]^T$.

Nel caso di $\lambda = \widehat{\varphi}$ otteniamo il vettore $\mathbf{v}_2 = [1\ \widehat{\varphi}]^T$ e quindi la matrice del cambiamento di base da $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ alla base canonica è

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \widehat{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Dunque abbiamo la relazione $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$, dove $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\varphi, \widehat{\varphi})$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{SDS}^{-1}\mathbf{SDS}^{-1} = \mathbf{SD}^2\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{SD}^2\mathbf{S}^{-1}\mathbf{SDS}^{-1} = \mathbf{SD}^3\mathbf{S}^{-1} \end{aligned}$$

e, in generale, $\mathbf{A}^n = \mathbf{SD}^n\mathbf{S}^{-1}$. La potenza $\mathbf{D}^n$ è facilmente calcolabile:

$$\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \widehat{\varphi}^n \end{bmatrix}$$

proprio perché $\mathbf{D}$ è diagonale.

Calcoliamo dunque l'inversa di $\mathbf{S}$, il cui determinante è

$$\widehat{\varphi} - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}.$$

Perciò abbiamo

$$\mathbf{S}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \widehat{\varphi} & -1 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\widehat{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{bmatrix}.$$

Ci serve ora calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 &= \mathbf{S}\mathbf{D}^n\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{S}\mathbf{D}^n \begin{bmatrix} -\widehat{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{S}\mathbf{D}^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{S} \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \widehat{\varphi}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{S} \begin{bmatrix} \varphi^n \\ -\widehat{\varphi}^n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \widehat{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^n \\ -\widehat{\varphi}^n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \varphi^n - \widehat{\varphi}^n \\ \varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Siccome sappiamo che $\mathbf{x}_n = [f_n\ f_{n+1}]^T$, abbiamo ottenuto la formula richiesta, cioè

$$\boxed{f_n = \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.}$$

Si può semplificare la formula con un trucco: dal momento che $\widehat{\varphi} = (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0{,}61803$, abbiamo

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\sqrt{5}} \approx -0{,}27639 \quad \frac{\widehat{\varphi}^2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}17082 \quad \frac{\widehat{\varphi}^3}{\sqrt{5}} \approx -0{,}10557$$

e, in generale, $|\widehat{\varphi}^n| < 0,3$. Poiché sappiamo che f_n è intero, possiamo scrivere

$$f_n = \text{intero più vicino a } \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Per esempio, $\varphi^{42} \approx 599074577{,}999999998$ e quindi $\varphi^{42}/\sqrt{5} \approx 267914296{,}0000000007$, da cui

$$f_{42} = 267\,914\,296$$

come si può facilmente verificare a mano, avendo il tempo occorrente. Con il calcolatore 'bc' si ottiene

$$\frac{\varphi^{100}}{\sqrt{5}} \approx 354224848179261914976.03688702705572920492$$

mentre il calcolo manuale dà

$$f_{100} = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075.$$