Curve

Geometria course, part 2/3 – outline and diary of notes day by day

Warning: notes very likely contain typos!

May 21, 2014

Contents

Part I
Curve

1 Definizioni e terminologia

1.1 Prime definizioni

Definizione. *Un* intervallo *è un sottoinsieme connesso di* $\mathbb{R}$.

Esercizio 1. *Dimostrare che gli intervalli sono:*

- (a, b), $a \leq b$
- $(a, b]$, $a \leq b$
- $[a, b), a \leq b$,
- $[a, b]$, $a \leq b$,
- $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$
- $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$
- $(-\infty, a], a \in \mathbb{R}$
- $[a, \infty), a \in \mathbb{R}$,
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

N.B. L'intervallo $(a, a) = [a, a) = (a, a] = \emptyset$*, l'intervallo* $[a, a] = \{a\}$.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un'intervallo, e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definizione. *Una curva parametrizzata di classe* C^k *è un'applicazione* $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ *di classe* C^k.

- La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ è uguale alla topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ (c.f. Esercizio **??**). Quindi una funzione $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ è una (tupla??) $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ di funzioni $\sigma_i : I \to \mathbb{R}$. La funzione σ è continua nella topologia prodotto (quindi nella topologia euclidea) se e solo se ogni $\sigma_i : I \to \mathbb{R}$ è continua.
- *"Di classe* C^k*"* significa che σ è differenziabile k volte e le applicazioni $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(k)}$ sono tutte continue come funzione da I a $\mathbb{R}^n$. Equivalentemente, per ogni i, le funzioni $\sigma_i, \sigma_i', \sigma_i'', \ldots, \sigma_i^{(k)}$ sono tutte funzioni continue da I a $\mathbb{R}$.
- Abbiamo $C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^k \supset \ldots$,. Per definizione $C^\infty = \bigcap\limits_{k \in N} C^k$, quindi $C^\infty \subset C^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Tutte le inclusioni sono strette.

Esempio. La curva parametrizzata $\sigma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ dato da $\sigma(t) = (t, |t|)$ è di classe C^0. Non è di classe C^1 perchè non è differenziabile a $t = 0$.

Per le regole delle derivate:

- Il *prodotto* di due funzioni è al meno differenziabile come i fattori. Il prodotto può essere più differenziabile: ad esempio, $f(t) = |t|$ è di classe C^0 ma non è di classe C^1, mentre $f(t)f(t) = |t|^2 = t^2$ è di classe C^∞.
- Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono di classe C^k allora la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è al meno di classe C^k. La funzione composta può essere più differenziabile: ad esempio, lo stesso esempio che di sopra, ponendo $f(t) = t^2$ e $g(t) = |t|$, allora $(f \circ g)(t) = t^2$ è di classe C^∞.

Esempio. La curva parametrizzata $\sigma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos(t)\ln(t), e^{\sin(t)})$ è di classe C^∞. La funzione $\cos(t)\ln(t))$ è di classe C^∞ perchè è il prodotto di due funzioni di classe C^∞ sul dominio $(0, \infty)$.

Definizioni: Curva parametrizzata, di classe C^k, il sostegno/la traccia di una curva, curve chiuse, cambiamento di parametro.

Arco di Jordan/arco semplice, curva di Jordan/curva chiusa semplice.

Curve equivalenti. Curve equivalenti con la stessa orientazione.

Il vettore tangente σ'.

Lunghezza di una curva rispetto ad una partizione $L(\sigma, \mathcal{P})$; curve rettificabili.

Esempio. La curva piana $\sigma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t, t\sin(\frac{1}{t}))$ è di classe C^0. Non è rettificabile:

Proposizione 1.1.1. *Se* $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è di classe* C^k*,* $k \geq 1$*, allora* σ *è rettificabile e* $L(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(\tau)\| d\tau$*. La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione – se due curve parametrizzate di classe* C^k *con* $k \geq 1$ *sono equivalenti tramite un cambiamento di parametro, le lunghezze sono uguali.*

1.2 Parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco

Una curva parametrizzata è *regolare* se $\|\sigma'(t)\| > 0 \ \forall \ t \in I$.

Definizione. *Una curva è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco se* $t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|\sigma'(\tau)\| d\tau$ *per* $t_2, t_1 \in I$.

Lemma 1.2.1. *La parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco è unica a meno di traslazione* $\widehat{\sigma}(t) := \sigma(t+c)$.

Proposizione 1.2.2. σ *è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* $\iff \|\sigma'(t)\| = 1 \ \forall \ t$.

Proposizione 1.2.3. *Ogni curva regolare ammette una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco.*

Dimostrazione. Fissando un $c \in I$ si pone $s(t) = \int_c^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$. Allora $s'(t) = \|\sigma'(t)\| > 0$ per la regolarità di σ. Quindi $s : I \to s(I) = \widehat{I}$ è un cambiamento di parametro, percui esiste l'inversa $t(s) : s(I) \to I$. Poniamo $\widehat{\sigma} : \widehat{I} \to \mathbb{R}^n, \widehat{\sigma}(s) = \sigma(t(s))$. Verifichiamo che è una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\widehat{\sigma}(s)\right) &= \frac{d}{ds}\left(\sigma(t(s))\right) \\
&= \sigma'(t) \cdot \frac{dt}{ds} \\
&= \sigma'(t) \cdot \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} \\
\implies \left\| \frac{d}{ds}\left(\widehat{\sigma}(s)\right) \right\| &= \|\sigma'(t)\| \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} = 1.
\end{aligned}
$$

□

1.3 Curvatura

Definizione. *Il versore tangente alla curva* σ *è* $T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$.

Cioè $T(t)$ è il vettore unitario avente la direzione del vettore tangente $\sigma'(t)$. Si nota che due curve equivalenti parametrizzate con la stessa orientazione hanno lo stesso versore tangente. Se σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, allora $T(s) = \frac{d}{ds}\sigma$.

Per distinguere tra un parametro qualsiasi t e il parametro s rispetto alla lunghezza d'arco, scriveremo $\sigma'(t), \sigma''(t)$ per le derivate rispetto a t, e $\dot{\sigma}(s), \ddot{\sigma}(s)$ per le derivate rispetto ad s.

La curvatura è una quantità che misura quanto cambia la direzione del vettore tangente.

Definizione. *Sia* $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. L'applicazione*

$$\kappa(s) = \|\dot{T}(s)\| = \|\ddot{\sigma}(s)\|$$

si dice la curvatura della curva in s.

Definizione. *Se* $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ *è una qualsiasi curva regolare con parametro* $t \in I$*, allora la curvatura è definita come* $\kappa(t) := \kappa(s(t))$ *dove* $s(t)$ *è un cambiamento di parametro ad una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco.*

N.B. La curvatura è una proprietà della *traccia* della curva, non della *parametrizzazione* della curva.

Proposizione 1.3.1. *La curvatura è data dalla formula*

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\sigma'(t)\|} = \frac{\sqrt{\|\sigma''(t)\|^2 \|\sigma'(t)\|^2 - \langle \sigma', \sigma'' \rangle}}{\|\sigma'(t)\|^3}$$

Dimostrazione.

$$\kappa(t) := \kappa(s(t)) = \|\dot{T}(s)\| = \frac{\|\dot{T}(s)s'(t)\|}{s'(t)} = \frac{\|T'(t)\|}{\|\sigma'(t)\|}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\sigma'\| &= \frac{d}{dt}\sqrt{\langle \sigma', \sigma' \rangle} = \frac{1}{2}\left(\langle \sigma', \sigma' \rangle\right)^{-1/2} 2\langle \sigma', \sigma'' \rangle \\ &= \frac{\langle \sigma', \sigma'' \rangle}{\|\sigma'\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\right) \\ &= \frac{\sigma''(t)\|\sigma'(t)\| - \sigma'(t)\frac{d}{dt}\|\sigma'\|}{\|\sigma'(t)\|^2} \\ &= \frac{\sigma''(t)\|\sigma'(t)\| - \sigma'(t)\langle \sigma', \sigma'' \rangle \|\sigma'(t)\|^{-1}}{\|\sigma'(t)\|^2} \\ \|T'(t)\|^2 &= \frac{1}{\|\sigma'(t)\|^4}\left(\|\sigma''(t)\|^2\|\sigma'(t)\|^2 - 2\langle \sigma', \sigma'' \rangle + \langle \sigma', \sigma'' \rangle\right) \\ &= \frac{1}{\|\sigma'(t)\|^4}\left(\|\sigma''(t)\|^2\|\sigma'(t)\|^2 - \langle \sigma', \sigma'' \rangle\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|T'(t)\| &= \frac{\sqrt{\|\sigma''(t)\|^2\|\sigma'(t)\|^2 - \langle \sigma', \sigma'' \rangle}}{\|\sigma'(t)\|^2} \\ \implies \kappa(t) &= \frac{\sqrt{\|\sigma''(t)\|^2\|\sigma'(t)\|^2 - \langle \sigma', \sigma'' \rangle}}{\|\sigma'(t)\|^3} \end{aligned}$$

$\square$

Esempio. $\sigma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$. La traccia di σ è l'elisse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Abbiamo $\sigma'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)), \sigma''(t) = (-a\cos(t), -b\sin(t))$, percui

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)} = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2(t) + b^2}, \quad \|\sigma''(t)\| = \sqrt{(a^2 - b^2)\cos^2(t) + b^2},$$
$$\langle \sigma'(t), \sigma''(t) \rangle = (a^2 - b^2)\sin(t)\cos(t).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))(a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)) - (a^2 - b^2)\sin(t)\cos(t)}}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{((a^2 - b^2)\sin^2(t) + b^2)((a^2 - b^2)\cos^2(t) + b^2) - (a^2 - b^2)\sin(t)\cos(t)}}{((a^2 - b^2)\sin^2(t) + b^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Quando $t = 0$, $\sigma(0) = (a, 0)$, e $\kappa(0) = \frac{\sqrt{b^2a^2}}{b^3} = \frac{a}{b^2}$.

Quando $t = \pi/2$, $\sigma(\pi/2) = (0, b)$ e $\kappa(\pi/2) = \frac{\sqrt{b^2a^2}}{a^3} = \frac{b}{a^2}$.

Se $0 < a < b$, allora $a^3 < b^3 \implies \frac{a^3}{a^2b^2} < \frac{b^3}{a^2b^2} \implies \frac{a}{b^2} < \frac{b}{a^2}$, cioè la curvatura dell'elisse è più grande a $(0, b)$ che a $(a, 0)$.

2 Curve nel piano

Consideriamo curve regolari nel piano euclideo $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$.

2.1 Turning angle

L'angolo $\theta(s)$ tra il versore tangente $T(s)$ e il vettore $e_1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ si chiama il *turning angle* della curva. Inoltre, poichè il versore tangente $T(s)$ è un vettore unitario,

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))).$$

La relazione tra la curvatura e il turning angle è la seguente:

$$\begin{aligned} \kappa(s) = \|\dot{T}(s)\| &= \sqrt{\sin^2(\theta(s))(\dot{\theta}(s))^2 + \cos^2(\theta(s))(\dot{\theta}(s))^2} \\ &= |\dot{\theta}(s)| \end{aligned}$$

cioè la curvatura è il valore assoluto della derivata del turning angle.

2.2 Il riferimento di Frenet

Nel piano euclideo, dato qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, esiste un unico vettore unitario $\mathbf{n}$ tale che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ e la matrice $(\mathbf{v}\ \mathbf{n})$ ha determinante > 0.

La condizione $\det(\mathbf{v}\ \mathbf{n}) > 0$ è equivalente alla condizione che la coppia $\{\mathbf{v}, \mathbf{n}\}$ ha la stessa orientazione della coppia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, ossia $\mathbf{n}$ è ottenuto da $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ tramite una rotazione di $\pi/2$,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Esempio. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Allora

$$\mathbf{n} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo che tutte le condizioni sono soddisfate:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 4/5 \\ -4 & 3/5 \end{pmatrix} &= 5 > 0 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{5}(12 - 12) = 0 \\ \|\mathbf{n}\| &= \frac{1}{5}\sqrt{25} = 1. \end{aligned}$$

Definizione. *Sia σ una curva parametrizzata regolare, con il versore tangente $T(t) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$. Il* versore normale orientato *alla curva è l'applicazione $N : I \to \mathbb{R}^2$ data dalla formula*

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t).$$

Cioè per ogni $t \in I$, la coppia $\{T(t), N(t)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ con la stessa orientazione della base $\{e_1, e_2\}$.

Definizione. *La coppia $\{T(t), N(t)\}$ è detta il* riferimento di Frenet *associato alla curva σ.*

Se $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, abbiamo

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1,$$

e prendendo la derivata rispetto a s otteniamo $2\langle \dot{T}(s), T(s) \rangle = 0$, ossia $\dot{T}(s)$ è sempre ortogonale a $T(s)$. Quindi, per ogni s, il vettore $\dot{T}(s)$ è un multiplo di $N(s)$,

$$\dot{T}(s) = \widetilde{\kappa}(s) N(s)$$

per un numero $\kappa(s) \in \mathbb{R}$. La funzione $\widetilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$ si chiama la *curvatura orientata* della curva σ. La curvatura è il valore assoluto della curvatura orientata,

$$\kappa(s) = |\widetilde{\kappa}(s)|.$$

Poichè $\det(T(s)\ N(s)) = 1$, abbiamo

$$\det\left(T(s), \dot{T}(s)\right) \quad = \quad \det\left(T(s), \widetilde{\kappa}(s)N(s)\right) = \widetilde{\kappa}(s)\det(T(s), N(s)) = \widetilde{\kappa}(s).$$

Rispetto ad un parametro qualsiasi, abbiamo $T'(t) = T'(s(t)) = \dot{T}(s)s'(t) = \dot{T}(s)\|\sigma'(t)\|$ percui

$$\widetilde{\kappa}(t) = \widetilde{\kappa}(s(t)) \quad = \quad \frac{1}{\|\sigma'(t)\|}\det(T(t), T'(t)).$$

Poichè $T'(t) = \frac{\sigma''(t)\|\sigma'(t)\| - \sigma'(t)\frac{d}{dt}\left(\|\sigma'(t)\right)}{\|\sigma'(t)\|^2}$ e $\det(\sigma', \sigma') = 0$, vediamo che $\det(T(t), T'(t)) = \det(\frac{1}{\|\sigma'(t)\|}\sigma'(t), \frac{1}{\|\sigma'(t)}\sigma''(t))$, percui

$$\widetilde{\kappa}(t) \quad = \quad \frac{1}{\|\sigma'(t)\|^3}\det(\sigma'(t), \sigma''(t)).$$

2.3 Formule di Frenet per le curve nel piano

Proposizione 2.3.1. *Sia σ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia $\{T(s), N(s)\}$ il riferimento di Frenet associato alla curva. Allora*

$$\begin{aligned}
\dot{T}(s) &= \widetilde{\kappa}(s)N(s) \\
\dot{N}(s) &= -\widetilde{\kappa}(s)T(s).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima formula è la definizione di $\widetilde{\kappa}(s)$, quindi dobbiamo solo dimostrare la seconda formula. Dato che

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(s),$$

allora

$$\begin{aligned}
\dot{N}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(s)\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{T}(s) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\kappa}(s)N(s) \\
&= \widetilde{\kappa}(s)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(s) \\
&= \widetilde{\kappa}(s)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T(s) \\
&= -\widetilde{\kappa}(s)T(s).
\end{aligned}$$

□

2.4 Teorema fondamentale delle curve nel piano

Teorema 2.4.1. *Se $\widetilde{\kappa} : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria di classe C^k, allora esiste una curva $\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ di classe C^{k+2}, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, la cui curvatura orientata è la funzione $\widetilde{\kappa}(s)$. Inoltre, σ è unica a meno di traslazione e rotazione nel piano.*

Dimostrazione. Abbiamo $\kappa_\pm(s) = \dot{\theta}(s)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale esiste una primitiva $\theta(s)$ di classe C^{k+1}, ed è univocamente determinata a meno di una costante additiva. Una primitiva, ad esempio, è $\theta(s) = \int_a^s \kappa_\pm(s_1)ds_1$ per qualsiasi scelta di $a \in I$.

Dato una primitiva $\theta(s)$, abbiamo $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$.

N.B. Se avessimo scelto una diversa primitiva $\widehat{\theta}(s)$, siccome $\widehat{\theta}(s) = \theta(s) + c$ per un $c \in \mathbb{R}$, avremmo

$$\begin{aligned} \widehat{T}(s) &= (\cos(\widehat{\theta}(s)), \sin(\widehat{\theta}(s))) \\ &= (\cos(\theta(s) + c), \sin(\theta(s) + c) \\ &= \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} (\cos\theta(s), \sin\theta(s)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} T(s) \end{aligned}$$

ossia il versore tangente $\widehat{T}(s)$ è una rotazione di $T(s)$ per lo stesso angolo per ogni s. Una matrice di rotazione significa una matrice della forma $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ per un $a \in \mathbb{R}$. Il versore tangente $T(s)$ è quindi univocamente determinato dalla funzione $\kappa_\pm(s)$ *a meno di una rotazione.*

Abbiamo $\dot{\sigma}(s) = T(s)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, esistono primitive σ_1 e σ_2 per le equazioni differenziali $\dot{\sigma}_1(s) = \cos\theta(s), \dot{\sigma}_2(s) = \sin\theta(s)$, ciascuna univocamente determinata a meno di una costante additiva. Inoltre, siccome $\cos\theta(s)$ e $\sin\theta(s)$ sono di classe C^{k+1}, le primitive $\sigma_1(s)$ e $\sigma_2(s)$ sono di classe C^{k+2}. Due primitive esplicite sono $\sigma_1(s) = \int_{a_1}^{s} \cos\theta(s_1) ds_1$ e $\sigma_2(s) = \int_{a_2}^{s} \sin\theta(s_1) ds_1$ per qualsiasi scelta di $a_1, a_2 \in I$.

N.B. Se $\widehat{\sigma}(s) = (\widehat{\sigma}_1(s), \widehat{\sigma}_2(s))$ fosse una diversa scelta di primitive, avremmo

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}(s) = (\widehat{\sigma}_1(s), \widehat{\sigma}_2(s)) &= (\sigma_1(s) + b_1, \sigma_2(s) + b_2) \\ &= (\sigma_1(s), \sigma_2(s)) + (b_1, b_2) \\ &= \sigma(s) + \mathbf{b} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, ossia $\widehat{\sigma}(s)$ è una traslazione di $\sigma(s)$ per lo stesso vettore $\mathbf{b}$ per ogni $s \in I$. Cioè la curva $\sigma(s)$ è univocamente determinata dal versore tangente $T(s)$ *a meno di una traslazione.*

Allora $\sigma(s) = (\sigma_1(s), \sigma_2(s))$ è una curva $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ di classe C^{k+1} tale che

- σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco perchè $\|\dot{\sigma}(s)\| = \|T(s)\| = 1$,
- la curvatura orientata di σ è $\dot{\theta}(s) = \kappa_\pm(s)$.

N.B. Se $\widehat{\sigma} : I \to \mathbb{R}^2$ è un'altra curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura orientata $\kappa_\pm(s)$, l'uguaglianza delle curvature orientate implica che $\widehat{T}(s) = A_c T(s)$ dove A_c è una matrice di rotazione. Segue che $\dot{\widehat{\sigma}}(s) = A_c \dot{\sigma}(s)$, percui $\widehat{\sigma}(s) = A_c \sigma(s) + \mathbf{b}$. □

Definizione. *Un movimento rigido del piano è un'applicazione $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ della forma $x \mapsto Ax + b$ per A una matrice di rotazione, e $b \in \mathbb{R}^2$ un vettore.*

Esercizio 2. *Verificare che l'insieme delle matrici di rotazione è esattamente il sottoinsieme $SO(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) \cap O(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AA^T = I, \det A = 1\}$ di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Quindi il teorema fondamentale dice che una curva piana di classe C^2 è univocamente determinata dalla sua curvatura orientata a meno di un movimento rigido.

Esempio. Sia $\widetilde{\kappa}(s) = -4$. Cerchiamo una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco avente questa curvatura. Calcoliamo il turning angle per primo:

$$\theta(s_1) = \int_0^{s_1} \kappa_\pm(s) ds = -4s_1 + c.$$

Scegliamo $c = 0$. Allora $\dot{\sigma}(s) = T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) = (\cos(-4s), \sin(-4s))$. Quindi $\sigma(s) = (\sin(-4s)/(-4) + c_1, \cos(-4s)/(4) + c_2) = \frac{1}{4}(-\sin(-4s) + c_1, \cos(-4s) + c_2)$. Questa curva è una circonferenza centrata a (c_1, c_2) di raggio $1/4$, tracciata in senso orario.

Esempio. Sia $\widetilde{\kappa}(s) = s$. Troveremo una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco avente questa curvatura. Calcoliamo il turning angle per primo:

$$\theta(s) = s^2/2 + c.$$

Possiamo scegliere $c = 0$. Quindi $\dot{\sigma}(s) = T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) = (\cos(s^2/2), \sin(s^2/2))$, perciò $\sigma(s_1) = (\int_0^{s_1} \cos(s^2/2)ds + c_1, \int_0^{s_1} \sin(s^2/2))ds + c_2)$.

2.5 Retta tangente, retta normale, circonferenza osculatrice

Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana.

Definizione. *La* retta tangente *(the tangent line) a σ in s è la retta passante per $\sigma(s)$ ed avente la direzione del versore tangente. Quindi una parametrizzazione è $\lambda \mapsto \sigma(s) + \lambda T(s)$.*

Definizione. *La* retta normale *(the normal line) a σ in s è la retta passante per $\sigma(s)$ ed avente la direzione del versore normale. Quindi una parametrizzazione è $\lambda \mapsto \sigma(s) + \lambda N(s)$.*

Definizione. *La* circonferenza osculatrice *(the osculating circle) alla curva a $\sigma(s)$ è la circonferenza di raggio $1/\kappa(s)$, che è tangente a σ in s e ha il centro sulla retta normale a σ in s, sul lato del vettore $\dot{T}(s)$. È la circonferenza che meglio approssima la curva a $\sigma(s)$. Più esplicitamente, è centrata al punto $\overline{\sigma}(s) = \sigma(s) + \frac{1}{\kappa_\pm(s)} N(s)$. Il centro della circonferenza osculatrice è anche detto* il centro di curvatura *della curva σ in s.*

Definizione. *L'evoluta (the evolute) è la curva $\overline{\sigma}(s) = \sigma(s) + \frac{1}{\kappa_\pm(s)} N(s)$. Cioè è la curva parametrizzando il centro della circonferenza osculatrice della curva σ (ossia il centro di curvatura di σ al punto s).*

Proposizione 2.5.1. *La retta tangente all'evoluta $\overline{\sigma}$ in s è uguale alla retta normale a σ in s.*

Proof. La retta tangente a $\overline{\sigma}$ in s ha direzione

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{\sigma}}(s) &= \dot{\sigma}(s) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa_\pm(s)}\right) N(s) + \frac{1}{\kappa_\pm(s)} \dot{N}(s) \\
&= T(s) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa_\pm(s)}\right) N(s) + \frac{1}{\kappa_\pm(s)} (-\kappa_\pm(s) T(s)) \\
&= \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa_\pm(s)}\right)\right) N(s)
\end{aligned}$$

quindi è parallela alla retta normale che ha direzione $N(s)$. Dato che entrambe le rette passano per $\overline{\sigma}(s)$, devono essere la stessa retta. □

3 Curve in $\mathbb{R}^3$

Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare. In 3 dimensioni non c'è più una preferita vettore unitario ortogonale al versore tangente. Però, se $\dot{T}(s) \neq 0$, il vettore $\dot{T}(s)$ è ortogonale a $T(s)$ quindi fornisce un vettore normale preferito.

Definizione. *Una curva regolare si dice* biregolare *se $\dot{T}(s) \neq 0$ per ogni s. (Equivalentemente, è biregolare se $\kappa(s) \neq 0 \ \forall \ s$).*

N.B. Alcuni autori usano il termine *regolare* invece di *biregolare*.

Per una curva biregolare,

1. $T(s)$ è mai nulla,
2. $\dot{T}(s)$ è mai nulla,
3. $\dot{T}(s)$ è ortogonale al versore tangente $T(s)$ per ogni $s \in I$,

e definiamo *il versore normale* $N(s) = \frac{\dot{T}(s)}{\|\dot{T}(s)\|}$.

Definizione. *Se σ è una curva biregolare,* il versore normale *alla curva in s è*

$$N(s) := \frac{\dot{T}(s)}{\|\dot{T}(s)\|}$$

cioè il vettore unitario nella direzione di $\dot{T}(s)$.

Dati due vettori T, N unitari e ortogonali in $\mathbb{R}^3$, il loro prodotto vettoriale $B = T \times N$ è l'unico vettore soddisfacente le condizioni

1. $\|B\| = 1$
2. $B \perp T, B \perp N$,
3. $\det(T, N, B) = 1$.

Le prime due condizioni significano che la tripla $\{T, N, B\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e la terza condizione implica che quella base ha la stessa orientazione della base standard $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Definizione. *Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Allora* il versore binormale *in s è $B(s) = T(s) \times N(s)$. La tripla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ si dice un riferimento di Frenet per la curva σ.*

Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare.

Definizione. *La* curvatura *di σ è l'applicazione $\kappa : I \to \mathbb{R}$ definita da $\kappa(s) = \|\dot{T}(s)\|$. Quindi, per definizione,*

$$\dot{T}(s) = \kappa(s)N(s).$$

Prendendo le derivate delle identità $\langle B(s), B(s)\rangle = 1$ $\forall s$, vediamo che $\langle \dot{B}(s), B(s)\rangle = 0$ ossia $\dot{B}(s) \perp B(s)$ $\forall s$. Dato che $B(s) = T(s) \times N(s)$ percui $\dot{B}(s) = \dot{T}(s) \times N(s) + T(s) \times \dot{N}(s)$, e $\dot{T}(s) \times N(s) = 0$ perchè $N(s)$ è un multiplo di $\dot{T}(s)$ per definizione, vediamo che $\dot{B}(s) = T(s) \times \dot{N}(s)$. Quindi, $\dot{B}(s)$ è ortogonale a $T(s)$, ed è anche ortogonale a $B(s)$, perciò è un multiplo di $N(s)$,

$$\dot{B}(s) = -\tau(s)N(s).$$

Definizione. *L'applicazione $\tau(s)$ determinata da $\dot{B}(s) = -\tau(s)N(s)$ si chiama la* torsione *della curva σ.*

Esempio. La torsione dell'elica $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Per primo dobbiamo trovare una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco, che è

$$\sigma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} T(s) &= (-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ N(s) &= (-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0) \\ B(s) &= (\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{B}(s) &= (-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0) \\ &= -\frac{1}{2} N(s) \end{aligned}$$

quindi $\tau(s) = \frac{1}{2}$.

Proposizione 3.0.2 (Le formule di Frenet)**.**

$$\begin{aligned}\dot{T}(s) &= \kappa(s)N(s)\\ \dot{N}(s) &= -\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)\\ \dot{B}(s) &= -\tau(s)N(s).\end{aligned}$$

Proof. La prima e la terza seguono per le definizioni di $\kappa(s)$ e $\tau(s)$; bisogna provare solo la seconda formula. Poichè $\{T(s),N(s),B(s)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ con la stessa orientazione della base standard, abbiamo $T\times N=B, N\times B=T, B\times T=N$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}N(s) &= \frac{d}{ds}B(s)\times T(s)\\ &= \dot{B}(s)\times T(s)+B(s)\times\dot{T}(s)\\ &= -\tau(s)N(s)\times T(s)+B(s)\times\kappa(s)N(s)\\ &= \tau(s)B(s)-\kappa(s)T(s).\end{aligned}$$

□

Un piano $P\subset\mathbb{R}^3$ è determinato da un normale $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ al piano, e un punto $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ nel piano. I punti $\mathbf{x}=(x,y,z)\in P$ soddisfano $\langle\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{n}\rangle=0$, ossia $\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle=c$. Il valore del costante c determina un punto $\mathbf{x}_0\in P$ e vice-versa.

Definizione. *Una curva $\sigma:I\to\mathbb{R}^3$ la cui traccia è contenuta in un piano $P\subset\mathbb{R}^3$ si dice una curva* piana.

Proposizione 3.0.3. *Una curva biregolare $\sigma:I\to\mathbb{R}^3$ è piana $\iff\ \tau(s)=0$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$:) Supponiamo che $\sigma(I)\subset P$, per un piano P. Quindi esistono un vettore unitario $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ ed un costante $c\in\mathbb{R}$ tali che $\langle\sigma(s),\mathbf{b}\rangle=c$ per ogni s. Prendendo la derivata abiamo $0=\langle\dot{\sigma}(s),\mathbf{b}\rangle=\langle T(s),\mathbf{b}\rangle$ percui $\mathbf{b}\perp T(s)\ \forall\ s$. Prendendo la derivata ancora: $0=\langle\dot{T}(s),\mathbf{b}\rangle=\|\dot{T}(s)\|\langle N(s),\mathbf{b}\rangle$ percui $\mathbf{b}\perp N(s)\ \forall\ s$. Concludiamo che o $B(s)=\mathbf{b}$ o $B(s)=-\mathbf{b}$. In ogni caso $B(s)$ è costante percui $\dot{B}(s)=0=-\tau(s)N(s)\implies\tau(s)=0$.

($\Longleftarrow$:) Supponiamo che $\tau(s)=0\ \forall\ s$. Allora $\dot{B}(s)=0$ percui $B(s)=\mathbf{b}$ per un vettore unitario $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$. Per definizione di $B(s)$ abbiamo $0=\langle T(s),B(s)\rangle=\langle\dot{\sigma}(s),\mathbf{b}\rangle$ e quindi $\langle\sigma(s),\mathbf{b}\rangle=c$ per un costante $c\in\mathbb{R}$. Quindi $\sigma(s)$ è contenuta in un piano. □

3.1 Movimenti rigidi

Definizione. *L'applicazione $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ data da $\Phi(\mathbf{x})=A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ si dice* un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ *se $A\in SO(3,\mathbb{R})$.*

In $\mathbb{R}^3$ un movimento rigido che fissa l'origine è una rotazione; un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ è una rotazione seguita da una traslazione. La matrice A è la matrice di una rotazione, il vettore $\mathbf{b}$ è il vettore di traslazione. In $\mathbb{R}^3$ una rotazione attorno l'origine è determinata dalle immagini di e_1 e e_2.

Si nota che Ae_i è la colonna i della matrice A, e una rotazione non cambia la lunghezza di nè quindi A è una matrice le cui colonne sono vettori ortonormali, per cui $AA^T=I$, e quindi $A\in O(3,\mathbb{R})$. La base $\{Ae_1,Ae_2,Ae_3\}$ ha la stessa orientazione di $\{e_1,e_2,e_3\}$ se e solo se $\det(A)=1$. Quindi, A appartiene alle matrici ortogonali speciali, $SO(3,\mathbb{R})=SL(3,\mathbb{R})\cap O(3,\mathbb{R})=\{A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})\big|AA^T=I,\det A=1\}$.

Esercizio 3. *Siano $T:I\to\mathbb{R}^3$, $N:I\to\mathbb{R}^3$ e $B:I\to\mathbb{R}^3$ tre funzioni continue, percui il determinante $\det(T(s)N(s)B(s)):I\to\mathbb{R}$ è continua. Dimostrare che se $T(s),N(s),B(s)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ per ogni s, allora $\det(T(s)N(s)B(s))$ è costante.*

3.2 Teorema fondamentale delle curve in $\mathbb{R}^3$

Teorema 3.2.1 (Teorema fondamentale delle curve in $\mathbb{R}^3$)**.** *Siano $\kappa,\tau:I\to\mathbb{R}$ due funzioni continue arbitrarie, con $\kappa(s)\geq 0\ \forall\ s$. Allora esiste una curva $\sigma:I\to\mathbb{R}^3$ parametrizzata rispetto alla lungezza d'arco la cui curvatura è $\kappa(s)$ e la cui torsione è $\tau(s)$. Inoltre, σ è unica a meno di movimento rigido in $\mathbb{R}^3$ – ossia, se $\beta:I\to\mathbb{R}^3$ è un'altra curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco che ha la stessa curvatura e la stessa torsione, allora esiste una matrice $A\in SO(3,\mathbb{R})$ e un vettore $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ tale che $\beta(s)=A\sigma(s)+\mathbf{b}$.*

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione alle equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{T}(s) &= \kappa(s)N(s)\\ \dot{N}(s) &= -\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)\\ \dot{B}(s) &= -\tau(s)N(s)\end{aligned}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali di ordine 1 del tipo $\dot{\mathbf{v}} = A(s)\mathbf{v}$, ponendo $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_9)$, $T = (v_1,v_2,v_3), N = (v_4,v_5,v_6), B = (v_7,v_8,v_9)$ e

$$A(s) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa(s) & 0 & 0 & 0\\ \hline -\kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0\\ 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0\\ 0 & 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s)\\ \hline 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} O & \mathcal{K} & O\\ -\mathcal{K} & O & \mathcal{T}\\ O & -\mathcal{T} & O \end{pmatrix}$$

Per la teoria di equazioni differenziali ordinarie (ODE), data una condizione iniziale $\mathbf{v}(a_0) = \mathbf{v}_0$, esiste una unica soluzione $\mathbf{v}(s)$ alla ODE soddisfacente la condizione iniziale.

Nella nostra situazione una condizione iniziale sarà un vettore $\mathbf{v}_0 = (T_0, N_0, B_0) \in \mathbb{R}^9$ dove T_0, $N_0 \in \mathbb{R}^3$ sono un paio qualsiasi di vettori unitari ed ortogonali, e $B_0 = T_0 \times N_0$. Cioè una condizione iniziale per noi è data dalla scelta di T_0 e N_0.

Vogliamo ponere $T(s) = (v_1(s), v_2(s), v_3(s)), N(s) = (v_4(s), v_5(s), v_6(s))$ e $B(s) = (v_7(s), v_8(s), v_9(s))$. Bisogna verificare che

1. se la terna T_0, N_0, B_0 della condizione iniziale è un riferimento di Frenet, allora la terna $T(s), N(s)$ e $B(s)$ è un riferimento di Frenet per ogni s,

2. una qualsiasi primitiva $\sigma(s)$ di $T(s)$ è una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco avente curvatura $\kappa(s)$ e torsione $\tau(s)$.

Si verifica 1. mostrando che $\forall s$

$$\begin{aligned}\langle T(s), T(s)\rangle &= 1\\ \langle N(s), N(s)\rangle &= 1\\ \langle B(s), B(s)\rangle &= 1\\ \langle T(s), N(s)\rangle &= 0\\ \langle T(s), B(s)\rangle &= 0\\ \langle N(s), B(s)\rangle &= 0\end{aligned}$$

ossia la terna $T(s), N(s), B(s)$ è un riferimento ortonormale. Il determinante $\det(T(s)N(s)B(s))$ di una base ortonormale può essere 1 o -1. Per la continuità rispetto al parametro s, deve essere 1 perchè è 1 a $s = 0$ dalla condizione iniziale, perciò $B(s) = T(s) \times N(s)$.

Poniamo $w_1 = \langle T(s), T(s)\rangle, w_2 = \langle N(s), N(s)\rangle, w_3 = \langle B(s), B(s)\rangle, w_4 = \langle T(s), N(s)\rangle, w_5 = \langle T(s), B(s)\rangle, w_6 = \langle N(s), B(s)\rangle$, e consideriamo $\mathbf{w}(s) \in \mathbb{R}^6$. Le formule di Frenet producono un sistema lineare di equazioni di ordine 1 in 6 variabili,

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= 2\kappa(s)w_4\\ \dot{w}_2 &= -2\kappa(s)w_4 + 2\tau(s)w_6\\ \dot{w}_3 &= -2\tau(s)w_6\\ \dot{w}_4 &= -\kappa(s)w_1 + \kappa(s)w_2 + \tau(s)w_5\\ \dot{w}_5 &= -\tau(s)w_4 + \kappa(s)w_6\\ \dot{w}_6 &= -\tau(s)w_2 + \tau(s)w_3 - \kappa(s)w_5\end{aligned}$$

con condizione iniziale $\mathbf{w}(0) = (1,1,1,0,0,0)$. Per la teoria di ODE la soluzione $\mathbf{w}(s)$ esiste ed è unica. Dato che la funzione costante $\mathbf{w}(s) = (1,1,1,0,0,0)$ soddisfa il sistema di equazioni e la condizione iniziale, deve essere la soluzione.

Ora verifichiamo 2. Sia $\sigma(s) : I \to \mathbb{R}^3$ una primitiva soddisfacente $\dot{\sigma}(s) = T(s)$. Per 1. sappiamo che $\|\dot{\sigma}(s)\| = \|T(s)\| = 1 \implies \sigma$ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Poi $\dot{\sigma}(s) = \kappa(s)N(s)$ dove $N(s)$ è un vettore unitario ortogonale a $\dot{\sigma}(s)$, quindi $\kappa(s)$ è la curvatura della curva σ per definizione. E la torsione di σ è $\tau(s)$ perchè viene da $\dot{B}(s) = -\tau(s)N(s)$.

Per verificare la unicità della curva a meno di movimenti rigidi, osserviamo che se $\sigma(s)$ è una curva con curvatura $\kappa(s)$ e torsione $\tau(s)$, allora dati una matrice $O \in SO(3,\mathbb{R})$ e un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, anche la curva $\widehat{\sigma}(s) = O\sigma(s) + \mathbf{b}$ ha curvatura $\kappa(s)$ e torsione $\tau(s)$ e soddisfa le formule di Frenet. Siccome $\widehat{\sigma}$ passa per $\mathbf{c} = O\sigma(0) + \mathbf{b}$ e ha condizioni iniziali $\widehat{T}_0 = OT_0, \widehat{N}_0 = ON_0$, per la teoria di ODE è l'unica curva soddisfacente le formule di Frenet passante per $\mathbf{c}$ con riferimento di Frenet iniziale $(\widehat{T}_0, \widehat{N}_0, \widehat{B}_0)$. E siccome per qualsiasi $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e coppia $\widehat{T}_0, \widehat{N}_0$ si trovano $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, O \in SO(3,\mathbb{R})$ tali che

$$O(T_0) = \widehat{T}_0, O(N_0) = \widehat{N}_0, O(B_0) = \widehat{B}_0,\ \mathbf{c} = O\sigma(0) + \mathbf{b},$$

vediamo che qualsiasi curva avente curvatura $\kappa(s)$ e torsione $\tau(s)$ si ottiene da una tale curva $\sigma(s)$ tramite un movimento rigido.

□

Esercizio 4. *Verificare che*

$$\mathbf{v}(s) = e^{\int_0^s A(s_1)ds_1}\mathbf{v}_0,$$

è una soluzione al sistema lineare $\dot{\mathbf{v}} = A(s)\mathbf{v}(s)$ con condizione iniziale $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Per una matrice quadrata B, e^B significa la matrice $I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}B^j$, e l'integrale $\int_0^s A(s_1)ds_1$ significa la matrice avente elementi $\int_0^s A_{i,j}(s_1)ds_1$.

Esercizio 5. *Dimostrare che per qualsiasi matrice anti-simmetrica B, $(e^B)^t = e^{-B}$, ossia e^B è una matrice ortogonale (la trasposta di e^B è uguale all'inversa: $(e^B)^t e^B = I$).*

3.3 Formule per la curvatura e la torsione rispetto ad un parametro qualsiasi

Proposizione 3.3.1. *Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare, parametrizzata rispetto ad un qualsiasi parametro t. Se $\sigma'(t) \times \sigma''(t) \neq 0\ \forall\ t$, allora σ è biregolare e abbiamo le seguenti formule per la curvatura e torsione:*

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3} \\
\tau(t) &= \frac{\langle \sigma'(t) \times \sigma''(t), \sigma'''(t)\rangle}{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2}
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $s(t)$ il parametro di lunghezza d'arco. Allora:

$$\sigma'(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{d}{dt}\sigma(s(t)) = \dot{\sigma}(s)\frac{ds}{dt} = T(s)\frac{ds}{dt}$$

$$\sigma''(t) = \frac{d}{dt}\left(T(s(t))\frac{ds}{dt}\right) = \dot{T}(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T(s(t))\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \kappa(s(t))N(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T(s(t))\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\sigma'''(t) = \frac{d}{dt}\left(\kappa(s(t))N(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T(s(t))\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

$$= \left(\kappa'(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \kappa(t)2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right)N(s(t)) + \kappa(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\dot{N}(s(t)) + \dot{T}(s)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + T(s)\frac{d^3s}{dt^3}$$

$$= \left(\kappa'(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 3\kappa(t)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right)N(s(t)) + \left(-(\kappa(t))^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \frac{d^3s}{dt^3}\right)T(s(t)) + \left(\tau(t)\kappa(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\right)B(s(t))$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\sigma'(t) \times \sigma''(t) &= (T(s)\frac{ds}{dt}) \times (\kappa(s(t))N(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T(s(t))\frac{d^2s}{dt^2}) \\
&= \frac{ds}{dt}\kappa(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 T \times N \\
&= \kappa(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 B \\
\implies \|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\| &= \kappa(t)\|\sigma'(t)\|^3 \\
\implies \kappa(t) &= \frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3}
\end{aligned}$$

e otteniamo la formula per la curvatura. La curva σ è biregolare se e solo se è regolare e la curvatura non è nulla, e si vede dalla formula che questo è il caso se e solo se $\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\| \neq 0$. Poi per l'ortonormalità del riferimento di Frenet, abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle \sigma'(t) \times \sigma''(t), \sigma'''^{(t)} \rangle &= \left(\tau(t)\kappa(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\right)\kappa(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \\
&= \tau(t)\kappa(t)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \\
&= \tau(t)\frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2}{\|\sigma'(t)\|^6}\|\sigma'(t)\|^6 \\
&= \tau(t)\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2 \\
\implies \tau(t) &= \frac{\langle \sigma'(t) \times \sigma''(t), \sigma'''^{(t)} \rangle}{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2}
\end{aligned}$$

□

3.4 Formule per T, N, B rispetto ad un parametro qualsiasi

Proposizione 3.4.1. *Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata rispetto ad un parametro t. Se σ è biregolare (cioè la curvatura $\kappa(t) \neq 0\ \forall t$), allora il riferimento di Frenet rispetto al parametro t è dato dalle formule*

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}, \\
B(t) &= \frac{\sigma' \times \sigma''}{\|\sigma' \times \sigma''\|} \\
N(t) &= B(t) \times T(t) = \frac{(\sigma' \times \sigma'') \times \sigma'}{\|\sigma'\|\|\sigma' \times \sigma''\|}
\end{aligned}$$

Proof. Per definizione $T(t) = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}$. Indichiamo $s = s(t)$ il parametro di lunghezza d'arco. Indichiamo le derivate rispetto ad s con il simbolo $\dot{}$ e le derivate rispetto a t con il simbolo $'$. Allora,

$$\begin{aligned}
T'(t) &= \dot{T}(s(t))\frac{ds}{dt} \\
&= \kappa(t)N(t)\frac{ds}{dt} \\
&= \kappa(t)N(t)\|\sigma'\| \\
\implies N(t) &= \frac{1}{\|\sigma'\|\kappa(t)}T'(t) \\
&= \frac{1}{\|\sigma'\|\kappa(t)}\left(\frac{\sigma''\|\sigma'\| - \sigma'\frac{d}{dt}(\|\sigma'\|)}{\|\sigma'\|^2}\right) \\
&= \frac{1}{\|\sigma'\|^3\kappa(t)}\left(\sigma''\|\sigma'\| - \sigma'\frac{d}{dt}(\|\sigma'\|)\right)
\end{aligned}$$

Per definizione $B(t) = T(t) \times N(t)$, quindi

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \times \left[\frac{1}{\|\sigma'\|^3 \kappa(t)} \left(\sigma'' \|\sigma'\| - \sigma' \frac{d}{dt} \left(\|\sigma'\| \right) \right) \right] \\ &= \frac{\sigma' \times \sigma''}{\kappa(t) \|\sigma'\|^3} \end{aligned}$$

Dato che $B(t)$ deve essere unitario, $\kappa(t)\|\sigma'\|^3 = \|\sigma' \times \sigma''\|$ (oppure si vede la stessa cosa dalla formula ottenuta sopra per $\kappa(t)$), percui

$$B(t) = \frac{\sigma' \times \sigma''}{\|\sigma' \times \sigma''\|}$$

Finalmente, tornando a $N(t)$, dato che $N(t) = B(t) \times T(t)$ vediamo che

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\sigma' \times \sigma''}{\|\sigma' \times \sigma''\|} \times \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \\ &= \frac{(\sigma' \times \sigma'') \times \sigma'}{\|\sigma' \times \sigma''\| \|\sigma'\|} \end{aligned}$$

□

Definizione. *Il* piano osculatore *di σ in s è il piano contenente $\sigma(s)$ generato dai vettori $T(s)$ e $N(s)$.*

Quindi il piano osculatore è determinato dall'equazione $\langle \mathbf{x} - \sigma(s), B(s) \rangle = 0$.

Esempio. Il piano osculatore dell'elica $\sigma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ in s ha l'equazione $0 = \langle \mathbf{x} - \sigma(s), B(s) \rangle \implies \langle \mathbf{x}, B(s) \rangle = \langle \sigma(s), B(s) \rangle$, dove $B(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, quindi

$$\langle \mathbf{x}, B(s) \rangle = \frac{s}{2}.$$

4 Esercizi

Esercizio 6. *Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (-2t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t)$.*

1. *Calcolare il versore tangente di γ.*
2. *Calcolare il versore normale di γ.*
3. *Calcolare il versore binormale di γ.*
4. *Calcolare la curvatura di γ.*
5. *Calcolare la torsione di γ.*

Esercizio 7. *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e tale che $\gamma(I) \subset S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2\}$, ossia la traccia è contenuta nella sfera unitaria centrata a $(0, 0, 0)$.*

1. *Dimostrare che $\dot{\gamma}(s) \perp \gamma(s)\ \forall s \in I$.*
2. *Dimostrare che quindi $\gamma(s) = a(s)N(s) + b(s)B(s)$ per due funzioni $a(s), b(s)$ tali che $a(s)^2 + b(s)^2 = 1$.*
3. *Dimostrare che*

$$T(s) = -a(s)\kappa(s)T(s) + (\dot{a}(s) - b(s)\tau(s))N(s) + (\dot{b}(s) + a(s)\tau(s))B(s)$$

e che quindi, per l'indipendenza lineare di $T(s), N(s), B(s)$,

$$\begin{aligned} 1 &= -a(s)\kappa(s), \\ 0 &= \dot{a}(s) - b(s)\tau(s), \\ 0 &= \dot{b}(s) + a(s)\tau(s). \end{aligned}$$

4. *Concludere che* $a(s) = \frac{-1}{\kappa(s)}$, $b(s) = \frac{\dot{a}(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{\tau(s)} \frac{-\dot{\kappa}(s)}{\kappa(s)^2}$

Esercizio 8. *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva biregolare con velocità unitaria. Si supponga che*

$$\gamma(\mathbb{R}) \subset S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e che la terna ordinata $(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s))$ *formi una base orientata positivamente per ogni* $s \in \mathbb{R}$. *La curva* $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *è definita da*

$$\delta(t) = \int_0^t \gamma(\tau) \times \dot{\gamma}(\tau) dt$$

1. *Calcolare la velocitδ, e far vedere che* δ *è regolare.*

2. *Calcolare la curvatura di* δ *e far vedere che* δ *è biregolare.*

3. *Calcolare il versore binormale di* δ.

4. *Calcolare la torsione di* δ.

(Le risposte saranno espressioni che coinvolgono γ *e le sue derivate.)*

Esercizio 9. *Sia* $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regolare con sostegno contenuto in una sfera di raggio* r. *Mostrare che la curvatura di* σ *è maggiore o uguale a* $\frac{1}{r}$ *in ogni punto. Cioè la curvatura di* σ *è limitato inferiormente dalla curvatura della sfera.*

Esercizio 10. *Sia* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *l'elica circolare data da* $\sigma(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$.

1. *Il versore tangente determina una curva* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. *La traccia di* T *è contenuta nella sfera di raggio unitario* S^2. *Dimostrare che la traccia di* T *è una circonferenza di raggio* $\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}$.

2. *Il versore normale ha la direzione di* $\dot{T}(s)$. *Quindi, se la traccia di* T *è una circonferenza* C, $\dot{T}(s)$ *sara un vettore tangente a* C. *Quindi il versore normale* $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *sara tangente alla traccia di* T. *Dimostrare che la traccia di* N *è la circonferenza di raggio 1 centrata all'origine nel piano* $z = 0$.

3. *Verificare che il prodotto scalare* $\langle T(t), \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ *è costante; ossia l'angolo tra il versore tangente all'elica e l'asse* z *è costante.*

4. *Trovare l'equazione dell'elica* $\widehat{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *avente la stessa curvatura e torsion dell'elica* σ, *con* $\widehat{\sigma}(0) = (0, -1, 0)$, *versore tangente* $\widehat{T}(0) = (1, 0, 0)$, *e versore normale* $\widehat{N}(0) = (0, 1, 0)$.

A Isometrie e movimenti rigidi

A.1 Isometrie

Definizione. *Un'isomorfismo* $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *che conserva le distanze tra punti, cioè*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\|$$

$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, *si dice* un'isometria *di* $\mathbb{R}^3$.

Partendo da questa definizione, vogliamo dimostrare che:

Proposizione A.1.1. *Un'applicazione* $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *è un'isometria* $\iff$ $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ *per una matrice* $A \in O(3, \mathbb{R})$ *ed un vettore* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

La dimostrazione di Proposizione A.1.1 procede in una serie di piccoli passi. Il primo passo è di dimostrare che ogni isometria è una traslazione di un'isometria che fissa l'origine 0:

Lemma A.1.2. *Sia* $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un'isometria. Allora l'applicazione* $\widehat{\Phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *data da* $\widehat{\Phi}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(0)$ *è un'isometria, e* $\widehat{\Phi}(0) = 0$.

Esercizio 11. *Dimostrare Lemma A.1.2.*

Poi dimostriamo che un'isometria Φ che fissa l'origine è una funzione lineare:

Lemma A.1.3. *Un'isometria $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(0) = 0$ è una funzione lineare, cioè*

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha\Phi(\mathbf{x}) \;\forall\; \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) \;\forall\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Quindi, $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per una matrice $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Poi troviamo una caraterizzazione della matrice A:

Lemma A.1.4. *Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'isometria tale che $\Phi(0) = 0$. Allora $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per una matrice $A \in O(3, \mathbb{R})$.*

Dati questi ingredienti la dimostrazione di Proposizione A.1.1 è facile:

Dimostrazione di Proposizione A.1.1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'isometria. Poniamo $\mathbf{b} = \Phi(0)$. Allora l'isometria $\widehat{\Phi}$ definita da $\widehat{\Phi}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$ è un'isometria che fissa l'origine, quindi esiste una matrice $A \in O(3, \mathbb{R})$ tale che $\widehat{\Phi}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, percui $\Phi(\mathbf{x}) = \widehat{\Phi}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. $\square$

Ora diamo una definizione di un *movimento rigido*:

Definizione. *Un* movimento rigido *di $\mathbb{R}^3$ è un'isometria che non cambia orientazione.*

Si ricorda che $SO(3, \mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) | AA^T = I,\ \det A = 1\} = \underbrace{O(3, \mathbb{R})}_{AA^T=I} \cap \underbrace{SL(3, \mathbb{R})}_{\det A=1}$.

Corollario A.1.5. *Un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione del tipo $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ per una matrice $A \in SO(3, \mathbb{R})$ e un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.*

Dimostrazione. Poichè una traslazione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$ non cambia orientazione, si vede che un'isometria $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ non cambia orientazione se e solo se la matrice $A \in O(3, \mathbb{R})$ non cambia orientazione, ossia la base ordinata $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}$ ha la stessa orientazione della base ordinata $\{e_1, e_2, e_3\}$. Le due basi ordinate hanno la stessa orientazione se e solo se $\det(e_1e_2e_3)$ e $\det(Ae_1Ae_2Ae_3)$ hanno lo stesso segno. Abbiamo $(e_1e_2e_3) = I$ e $(Ae_1Ae_2Ae_3) = A$. Dato che $\det I = 1$, e $A \in O(3, \mathbb{R}) \implies \det A = \pm 1$, hanno lo stesso segno se e solo se $\det A = 1$, ossia $A \in SO(3, \mathbb{R})$. $\square$

Dimostrazione di Lemma A.1.3. Poichè $\Phi(0) = 0$, abbiamo $\langle \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{z}) \rangle = \langle \Phi(\mathbf{y}) - \Phi(0), \Phi(\mathbf{z}) - \Phi(0) \rangle = \langle \mathbf{y} - 0, \mathbf{z} - 0 \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ per ogni paio di vettori $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$. Consideriamo $\lambda\Phi(\mathbf{x})$ e $\Phi(\lambda\mathbf{x})$. Allora

$$\begin{aligned} \langle \lambda\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\lambda\mathbf{x}), \lambda\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\lambda\mathbf{x}) \rangle &= \lambda^2 \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle - 2\lambda \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\lambda\mathbf{x}) \rangle + \langle \Phi(\lambda\mathbf{x}), \Phi(\lambda\mathbf{x}) \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

e quindi, $\lambda\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\lambda\mathbf{x}) = 0$, percui $\lambda\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\lambda\mathbf{x})$. Nello stesso modo abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \rangle &= \langle \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \rangle - 2\langle \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle \\ &\quad -2\langle \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle - 2\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle \\ &\quad +\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle + \langle \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle - 2\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad -2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

percui $\Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y})$. $\square$

Dimostrazione di Lemma A.1.4. Abbiamo (vedi le prime 2 righe della dimostrazione precedente) $\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Dato che $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, significa che

$$(A\mathbf{e_i})^T A\mathbf{e_j} = \langle A\mathbf{e_i}, A\mathbf{e_j} \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Le colonne di A sono i vettori Ae_i, quindi le identità precedenti dicono che le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, ossia $A \in O(3, \mathbb{R})$. □

B Derivate di vettori e matrici

Se $A : I \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$ è una matrice, la derivata $A' : I \to M_{n\times m}$ significa la matrice ottenuta dalla matrice A prendendo la derivata di ogni entrata. Se $B : I \to M_{m\times p}(\mathbb{R})$ è una seconda curva di matrici parametrizzata per lo stesso intervallo, allora la derivata del loro prodotto $AB : I \to M_{n\times p}(\mathbb{R})$ soddisfa

$$(AB)' = A'B + AB'$$

per via delle regole delle derivate di prodotti.

Il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w}$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle' = \langle \mathbf{v}', \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle.$$

Il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}'.$$