

Analisi di Equazioni Differenziali

Debora Botturi

ALTAIR

<http://metropolis.sci.univr.it>



Introduzione

- Argomenti
- Osservazioni
- Osservazioni
- Riassumendo

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Introduzione



Argomenti

Introduzione

● Argomenti

● Osservazioni

● Osservazioni

● Riassumendo

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Equazioni differenziali omogenee del primo e secondo ordine
- Equazioni differenziali non omogenee
- Risposte del primo e secondo ordine
- Cenni ad elementi non lineari

Obiettivo: sviluppare equazioni esplicite che descrivono la risposta di un sistema



Osservazioni

Introduzione

● Argomenti

● Osservazioni

● Osservazioni

● Riassumendo

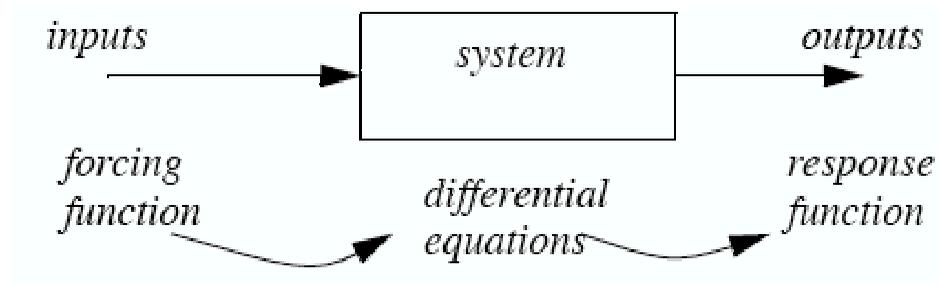
Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Le equazioni di moto possono essere utilizzate per analizzare il comportamento del sistema
- Il metodo piú comune é quello di forzare una funzione in input e delle condizioni iniziali e quindi risolvere l'equazione differenziale.



Osservazioni

Introduzione

- Argomenti
- Osservazioni
- Osservazioni
- Riassumendo

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Ci sono vari tipi di input usati per testare un sistema:

- step - un veloce cambiamento di input
- rampa - un input continuamente crescente
- sinusoidale - input ciclico che varia continuamente
- paraboloidale - un input che cresce esponenzialmente



Riassumendo

Introduzione

- Argomenti
- Osservazioni
- Osservazioni
- Riassumendo

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Le fasi per analizzare un sistema sono:

- ✦ Costruzione del modello matematico
- ✦ Scelta dei tipi di input
- ✦ Scelta condizioni iniziali
- ✦ Determinare il comportamento del sistema risolvendo le equazioni differenziali



Soluzioni di Equazioni

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Debora Botturi

Laboratorio di Sistemi e Segnali



Osservazioni

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

● Osservazioni

- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- ✦ Le equazioni differenziali danno una risposta generica del sistema come funzione del tempo
- ✦ Corrispondono a sistemi senza input (risposta libera)
- ✦ Le equazioni differenziali si possono distinguere nei seguenti tipi:
 - ✦ $A\dot{x} + Bx = 0$ omogenea del primo ordine
 - ✦ $A\dot{x} + Bx = Cf(t)$ non-omogenea del primo ordine
 - ✦ $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$ omogenea del secondo ordine
 - ✦ $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Df(t)$ non-omogenea del secondo ordine
- ✦ Sono lineari e x é la variabile di integrazione.



Soluzione omogenea del primo ordine

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- ✦ La forma generale della soluzione viene indovinata (Xe^{-Yt})
- ✦ Si procede alla sostituzione fino alla determinazione del coefficiente Y
- ✦ Le condizioni iniziali sono usate per trovare il valore del coefficiente X
- ✦ L'equazione finale inizia ad una determinata distanza e tende a zero per il tempo tendente all'infinito



Esempio

Given the general form of a first-order homogeneous equation,

$$A\dot{x} + Bx = 0 \quad \text{and} \quad x(0) = x_0$$

Guess a solution form and solve.

$$x = Xe^{-Yt} \quad \dot{x} = -YXe^{-Yt}$$

$$A(-YXe^{-Yt}) + B(Xe^{-Yt}) = 0$$

$$A(-Y) + B = 0$$

$$Y = \frac{B}{A}$$

Therefore the general form is,

$$x_h = Xe^{-\frac{B}{A}t}$$

Next, use the initial conditions to find the remaining unknowns.

$$x_h = Xe^{-\frac{B}{A}t}$$

$$x_0 = Xe^{-\frac{B}{A}0}$$

$$x_0 = X$$

Therefore the final equation is,

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{B}{A}t}$$

initial condition

Note: The general form below is useful for finding almost all homogeneous equations

$$x_h(t) = Xe^{-Yt}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine

● **Esempio**

● Esercizio

- Soluzione omogenea del secondo ordine

● Esempio

- Esempio di soluzione complessa

- Esempio di soluzione complessa-nota

● Esercizio

- Soluzione non-omogenea del secondo ordine

● Esempio

- Esempio - parte I

- Esempio - parte II

- Soluzioni Particolari

● Esercizio

- Esercizio - parte I

- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esercizio

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- **Esercizio**
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esempio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Risolvere la seguente equazione differenziale date le condizioni iniziali

$$\dot{x} + 2x = 0 \quad x(0) = 3$$

soluzione:

$$x(t) = 3e^{-2t}$$



Soluzione omogenea del secondo ordine

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- ✦ Indovinare la soluzione dell'omogenea e della equazione quadratica
- ✦ I casi di soluzione della forma quadratica sono:
 - ✦ due differenti soluzioni reali
 - ✦ due soluzioni identiche reali
 - ✦ due radici complesse (oscillazioni sinusoidali)
- ✦ Dopo aver trovato la soluzione alla equazione omogenea le condizioni iniziali vengono utilizzate per trovare i valori dei rimanenti coefficienti.



Esempio

Given,

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0 \quad x(0) = x_0 \quad \text{and} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Guess a general equation form and substitute it into the differential equation,

$$x_h = Xe^{Yt} \quad \dot{x}_h = YXe^{Yt} \quad \ddot{x}_h = Y^2Xe^{Yt}$$

$$A(Y^2Xe^{Yt}) + B(YXe^{Yt}) + C(Xe^{Yt}) = 0$$

$$A(Y^2) + B(Y) + C = 0$$

$$Y = \frac{-B \pm \sqrt{(B)^2 - 4(AC)}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

If the values for Y are both real, but different, the general form is,

$$Y = R_1, R_2 \quad x_h = X_1e^{R_1t} + X_2e^{R_2t}$$

Note: The initial conditions are then used to find the values for X_1 and X_2 .

If the values for Y are both real, and identical, the general form is,

$$Y = R_1, R_1 \quad x_h = X_1e^{R_1t} + X_2te^{R_1t}$$

The initial conditions are then used to find the values for X_1 and X_2 .

If the values for Y are complex, the general form is,

$$Y = \sigma \pm \omega j \quad x_h = X_3e^{\sigma t} \cos(\omega t + X_4)$$

The initial conditions are then used to find the values of X_3 and X_4 .

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- **Esempio**
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esempio di soluzione complessa

$$Y = R \pm Cj$$

This gives the general result, as shown below:

$$x = X_1 e^{(R + Cj)t} + X_2 e^{(R - Cj)t}$$

$$x = X_1 e^{Rt} e^{Cjt} + X_2 e^{Rt} e^{-Cjt}$$

$$x = e^{Rt} (X_1 e^{Cjt} + X_2 e^{-Cjt})$$

$$x = e^{Rt} (X_1 (\cos(Ct) + j \sin(Ct)) + X_2 (\cos(-Ct) + j \sin(-Ct)))$$

$$x = e^{Rt} (X_1 (\cos(Ct) + j \sin(Ct)) + X_2 (\cos(Ct) - j \sin(Ct)))$$

$$x = e^{Rt} ((X_1 + X_2) \cos(Ct) + j(X_1 - X_2) \sin(Ct))$$

$$x = e^{Rt} ((X_1 + X_2) \cos(Ct) + j(X_1 - X_2) \sin(Ct))$$

$$x = e^{Rt} \frac{\sqrt{(X_1 + X_2)^2 + j^2 (X_1 - X_2)^2}}{\sqrt{(X_1 + X_2)^2 + j^2 (X_1 - X_2)^2}} ((X_1 + X_2) \cos(Ct) + j(X_1 - X_2) \sin(Ct))$$

$$x = e^{Rt} \frac{\sqrt{X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - (X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2)}}{\sqrt{X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - (X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2)}} ((X_1 + X_2) \cos(Ct) + j(X_1 - X_2) \sin(Ct))$$

$$x = e^{Rt} \frac{\sqrt{4X_1X_2}}{\sqrt{4X_1X_2}} ((X_1 + X_2) \cos(Ct) + j(X_1 - X_2) \sin(Ct))$$

$$x = e^{Rt} \sqrt{4X_1X_2} \left(\frac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{4X_1X_2}} \cos(Ct) + j \frac{(X_1 - X_2)}{\sqrt{4X_1X_2}} \sin(Ct) \right)$$

$$x = e^{Rt} \sqrt{4X_1X_2} \cos \left(Ct + \operatorname{atan} \left(\frac{(X_1 - X_2)}{(X_1 + X_2)} \right) \right)$$

$$x = e^{Rt} X_3 \cos(Ct + X_4)$$

frequency

phase shift

$$\text{where, } X_3 = \sqrt{4X_1X_2}$$

$$X_4 = \operatorname{atan} \left(\frac{(X_1 - X_2)}{(X_1 + X_2)} \right)$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio

● Esempio di soluzione complessa

- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio

- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio

- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esempio di soluzione complessa-nota

Occasionalmente la soluzione di un problema presenta entrambi i termini (seno e coseno) con la stessa frequenza. Questo é generalmente cobinato in un singolo termine con uno shift di fase

Recall the double angle formula,

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega t$$

This can be written in a more common form,

$$A(\sin \omega t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$A \cos \theta \sin \omega t + A \sin \theta \cos \omega t = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$B \sin \omega t + C \cos \omega t = A \sin(\omega t + \theta) \quad \text{where,}$$

$$B = A \cos \theta$$

$$C = A \sin \theta$$

$$A = \frac{B}{\cos \theta} = \frac{C}{\sin \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{C}{B}$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{C}{B}\right)$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

Consider the example,

$$3 \sin 5t + 4 \cos 5t = \sqrt{3^2 + 4^2} \sin\left(5t + \text{atan}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 5 \sin(5t + 0.927)$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- **Esempio di soluzione complessa-nota**
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esercizio

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- **Esercizio**
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Risolvere la seguente equazione differenziale date le condizioni iniziali

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 2$$

soluzione:

$$x(t) = e^{-t} + 3te^{-t}$$



Soluzione non-omogenea del secondo ordine

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- ✦ Trovare la soluzione dell'equazione omogenea associata
- ✦ Indovinare la forma finale della soluzione
- ✦ Si sostituisce all'interno dell'equazione e si trovano i valori dei coefficienti
- ✦ Si sommano la soluzione omogenea e quella particolare (assumendo la linearità utilizziamo il principio di sovrapposizione degli effetti)
- ✦ La risposta libera è condizionata dai valori iniziali
- ✦ La soluzione particolare è detta risposta forzata ed è condizionata dall'input del sistema.



Esempio

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- **Esempio**
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

$$6\dot{x} + 2x = 5e^{4t}$$

A reasonable guess for the particular solution is,

$$x_p = C_1 e^{4t} \quad \dot{x}_p = 4C_1 e^{4t}$$

Substitute these into the differential equation and solve for A.

$$6(4C_1 e^{4t}) + 2(C_1 e^{4t}) = 5e^{4t}$$

$$24C_1 + 2C_1 = 5 \quad \therefore C_1 = \frac{5}{26}$$

Combine the particular and homogeneous solutions.

$$x = x_p + x_h = \frac{5}{26}e^{4t} + x_0 e^{-\frac{6}{2}t}$$



Esempio - parte I

Generally,

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Df(t) \quad x(0) = x_0 \quad \text{and} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

1. Find the homogeneous solution as before.

$$\begin{aligned} x_h &= X_3 e^{\sigma t} \cos(\omega t + X_4) \\ \text{or} \quad x_h &= X_1 e^{\sigma_1 t} + X_2 t e^{\sigma_1 t} \\ \text{or} \quad x_h &= X_1 e^{\sigma_1 t} + X_2 e^{\sigma_2 t} \end{aligned}$$

2. Guess the particular solution by looking at the form of 'f(t)'. This step is highly subjective, and if an incorrect guess is made it will be unsolvable. When this happens, just make another guess and repeat the process. For the purpose of illustration an example is given below. In the case below it should be similar to the sine function.

For example, if we are given

$$2\ddot{x} + 6\dot{x} + 2x = 2 \sin(3t + 4)$$

A reasonable guess is,

$$\begin{aligned} x_p &= A \sin(3t) + B \cos(3t) \\ \dot{x}_p &= 3A \cos(3t) - 3B \sin(3t) \\ \ddot{x}_p &= -9A \sin(3t) - 9B \cos(3t) \end{aligned}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- **Esempio - parte I**
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esempio - parte II

Substitute these into the differential equation and solve for A and B.

$$2(-9A \sin(3t) - 9B \cos(3t)) + 6(3A \cos(3t) - 3B \sin(3t)) + 2(A \sin(3t) + B \cos(3t)) = 2 \sin(3t + 4)$$

$$(-18A - 18B + 2A) \sin(3t) + (-18B + 18A + 2B) \cos(3t) = 2 \sin(3t + 4)$$

$$(-16A - 18B) \sin(3t) + (18A - 16B) \cos(3t) = 2(\sin 3t \cos 4 + \cos 3t \sin 4)$$

$$(-16A - 18B) \sin(3t) + (18A - 16B) \cos(3t) = (2 \cos 4) \sin(3t) + (2 \sin 4) \cos(3t)$$

$$-16A - 18B = 2 \cos 4 \quad 18A - 16B = 2 \sin 4$$

$$\begin{bmatrix} -16 & -18 \\ 18 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos 4 \\ 2 \sin 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -18 \\ 18 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.307 \\ -1.514 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0109 \\ 0.0823 \end{bmatrix}$$

Next, rearrange the equation to phase shift form.

$$x_p = -0.0109 \sin(3t) + 0.0823 \cos(3t)$$

$$x_p = \sqrt{-0.0109^2 + 0.0823^2} \sin\left(3t + \operatorname{atan}\left(\frac{0.0823}{-0.0109}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Use the initial conditions to determine the coefficients in the homogeneous solution.

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- **Esempio - parte II**
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Soluzioni Particolari

Le forme in tabella possono servire nella risoluzione della soluzione particolare

<i>Forcing Function</i>	<i>Guess</i>
A	C
$Ax + B$	$Cx + D$
e^{Ax}	Ce^{Ax} or Cxe^{Ax}
$B \sin(Ax)$ or $B \cos(Ax)$	$C \sin(Ax) + D \cos(Ax)$ or $Cx \sin(Ax) + xD \cos(Ax)$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esercizio

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- **Esercizio**
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Risolvere la seguente equazione differenziale date le condizioni iniziali

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

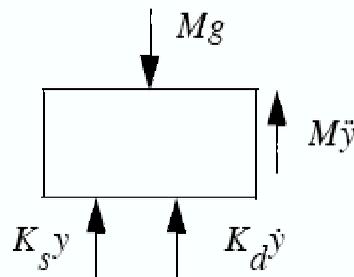
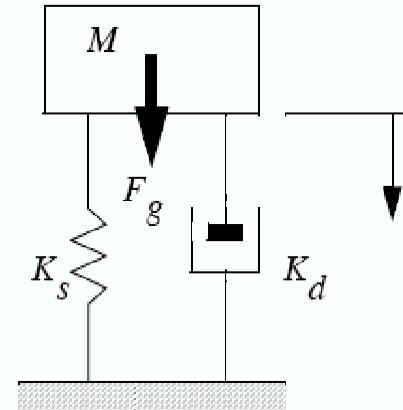
soluzione:

$$x(t) = -e^{-t} - te^{-t} + 1$$



Esercizio - parte I

Assume the system illustrated to the right starts from rest at a height 'h'. At time 't=0' the system is released and allowed to move.



$$+\uparrow \sum F_y = -Mg + K_s y + K_d \dot{y} = -M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + K_d \dot{y} + K_s y = Mg$$

Find the homogeneous solution.

$$y_h = e^{At} \quad \dot{y}_h = Ae^{At} \quad \ddot{y}_h = A^2 e^{At}$$

$$M\ddot{y} + K_d \dot{y} + K_s y = 0$$

$$M(A^2 e^{At}) + K_d(Ae^{At}) + K_s(e^{At}) = 0$$

$$MA^2 + K_d A + K_s = 0$$

$$A = \frac{-K_d \pm \sqrt{K_d^2 - 4MK_s}}{2M}$$

Let us assume that the values of M , K_d and K_s lead to the case of two different positive roots. This would occur if the damper value was much larger than the spring and mass values. Thus,

$$A = R_1, R_2$$

$$y_h = C_1 e^{R_1 t} + C_2 e^{R_2 t}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- **Esercizio - parte I**
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esercizio - parte II

Next, find the particular solution.

$$y_p = C \quad \dot{y}_h = 0 \quad \ddot{y}_h = 0$$

$$M(0) + K_d(0) + K_s(C) = Mg$$

$$C = \frac{Mg}{K_s}$$

Now, add the homogeneous and particular solutions and solve for the unknowns using the initial conditions.

$$y(t) = y_p + y_h = \frac{Mg}{K_s} + C_1 e^{R_1 t} + C_2 e^{R_2 t}$$

$$y(0) = h \quad y'(0) = 0$$

$$h = \frac{Mg}{K_s} + C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$C_1 + C_2 = h - \frac{Mg}{K_s}$$

$$y'(t) = R_1 C_1 e^{R_1 t} + R_2 C_2 e^{R_2 t}$$

$$0 = R_1 C_1 e^0 + R_2 C_2 e^0$$

$$0 = R_1 C_1 + R_2 C_2 \quad C_1 = \frac{-R_2}{R_1} C_2$$

$$-\frac{R_2}{R_1} C_2 + C_2 = h - \frac{Mg}{K_s}$$

$$C_2 = \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s} \right) \left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2} \right) \quad C_1 = \frac{-R_2}{R_1} \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s} \right) \left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2} \right)$$

Now, combine the solutions and solve for the unknowns using the initial conditions.

$$y(t) = \frac{Mg}{K_s} + \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s} \right) \left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2} \right) e^{R_1 t} + \frac{-R_2}{R_1} \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s} \right) \left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2} \right) e^{R_2 t}$$

$$y(t) = \frac{Mg}{K_s} + \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s} \right) \left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2} \right) e^{R_1 t} + \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s} \right) \left(\frac{R_2}{R_1 - R_2} \right) e^{R_2 t}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

- Osservazioni
- Soluzione omogenea del primo ordine
- Esempio
- Esercizio
- Soluzione omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio di soluzione complessa
- Esempio di soluzione complessa-nota
- Esercizio
- Soluzione non-omogenea del secondo ordine
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Soluzioni Particolari
- Esercizio
- Esercizio - parte I
- Esercizio - parte II

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Risposte di Sistemi

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale
- Esercizio
- Altre risposte
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Debora Botturi

Laboratorio di Sistemi e Segnali



Sistemi del primo ordine

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

● Sistemi del primo ordine

● Esempio

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine -
misure

● Relazione tra smorzamento e
frequenza naturale

● Esercizio

● Altre risposte

● Esempio

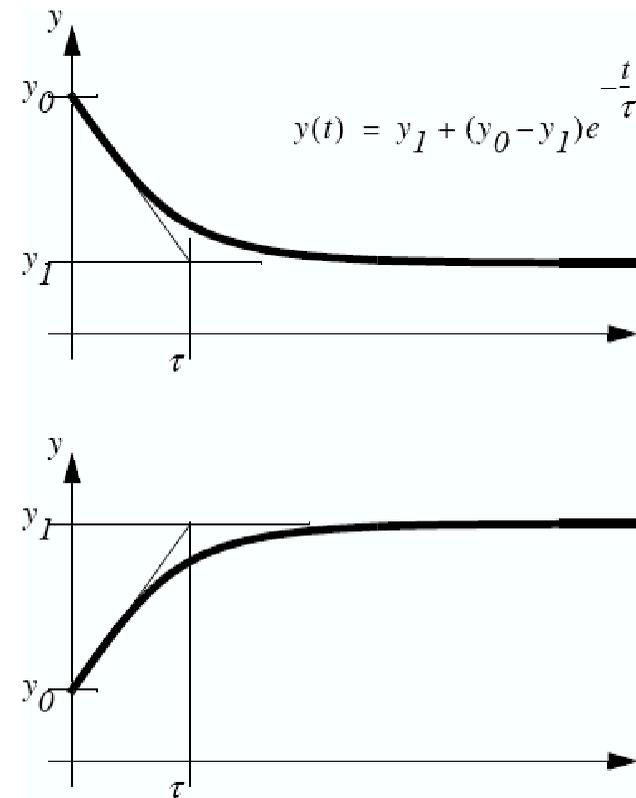
● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

Analisi della Risposta

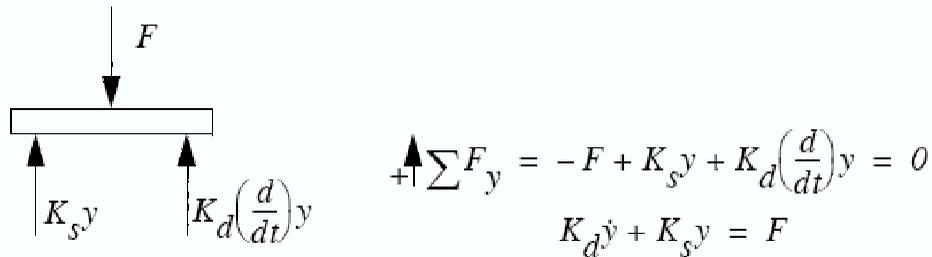
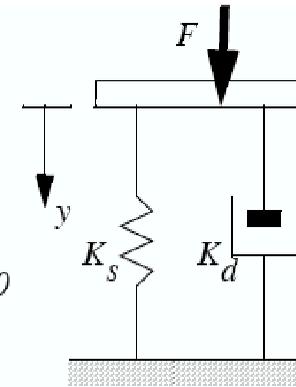
Sistemi non lineari

- Descritti da un'equazione differenziale del primo ordine
- La risposta per questi sistemi é il naturale decadimento oppure la crescita
- La costante di tempo del sistema per andare a regime (la misura del tempo di reazione del sistema ai cambiamenti) può essere trovata direttamente dall'equazione differenziale
- Tendono ad essere passivi
- Non sono oscillanti a meno che l'input non sia oscillante.



Esempio

Find the response to the applied force if the force is applied at $t=0s$. Assume the system is initially deflected a height of h .



Find the homogeneous solution.

$$y_h = Ae^{Bt} \quad \dot{y}_h = ABe^{Bt}$$

$$K_d(ABe^{Bt}) + K_s(Ae^{Bt}) = 0$$

$$K_d B + K_s = 0$$

$$B = \frac{-K_s}{K_d}$$

Next, find the particular solution.

$$y_p = C \quad \dot{y}_p = 0$$

$$K_d(0) + K_s(C) = F \quad \therefore C = \frac{F}{K_s}$$

Combine the solutions, and find the remaining unknown.

$$y(t) = y_p + y_h = Ae^{\frac{-K_s}{K_d}t} + \frac{F}{K_s}$$

$$y(0) = h$$

$$h = Ae^0 + \frac{F}{K_s} \quad \therefore A = h - \frac{F}{K_s}$$

The final solution is,

$$y(t) = \left(h - \frac{F}{K_s}\right)e^{\frac{-K_s}{K_d}t} + \frac{F}{K_s}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

● Sistemi del primo ordine

● **Esempio**

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine - misure

● Relazione tra smorzamento e frequenza naturale

● Esercizio

● Altre risposte

● Esempio

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Sistemi del secondo ordine

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

● Sistemi del primo ordine

● Esempio

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine - misure

● Relazione tra smorzamento e frequenza naturale

● Esercizio

● Altre risposte

● Esempio

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

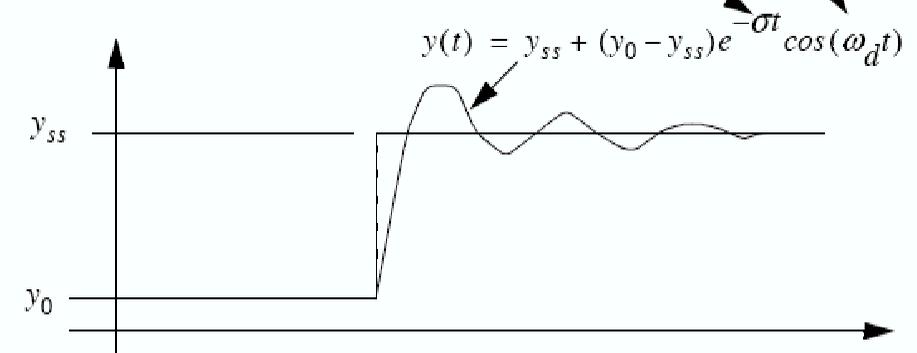
Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Tipicamente contengono due risposte del primo ordine o una risposta del primo ordine ed una componente sinusoidale
- I coefficienti dell'equazione differenziale includono frequenza naturale e smorzamento
- Questi ultimi possono essere usati per progettare un sistema con una risposta finale desiderata
- Lo smorzamento è minore della frequenza naturale quando il coefficiente di smorzamento è tra 0 ed 1
- Se il coefficiente di smorzamento è maggiore di 1 il sistema non oscilla (smorzato).

A second-order system, and a typical response to a stepped input.

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = f(t) \longrightarrow \sigma = \zeta\omega_n \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



ω_n Natural frequency of system - Approximate frequency of control system oscillations.

ξ Damping factor of system - If < 1 underdamped, and system will oscillate. If $= 1$ critically damped. If > 1 overdamped, and never any oscillation (more like a first-order system). As damping factor approaches 0, the first peak becomes infinite in height.

ω_d The actual frequency of oscillation - It is below the natural frequency because of the damping.

Sistemi del secondo ordine

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

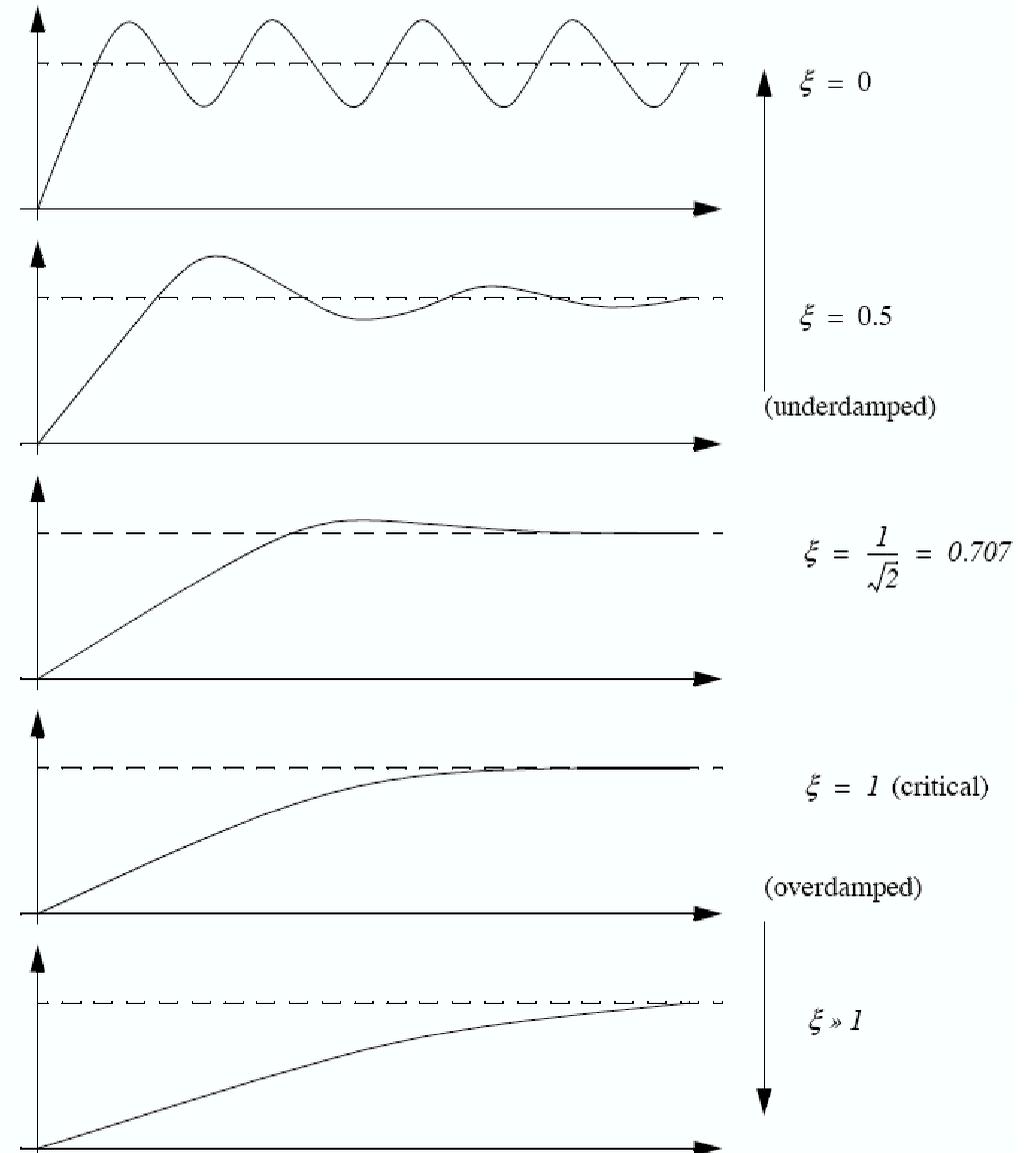
Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale
- Esercizio
- Altre risposte
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

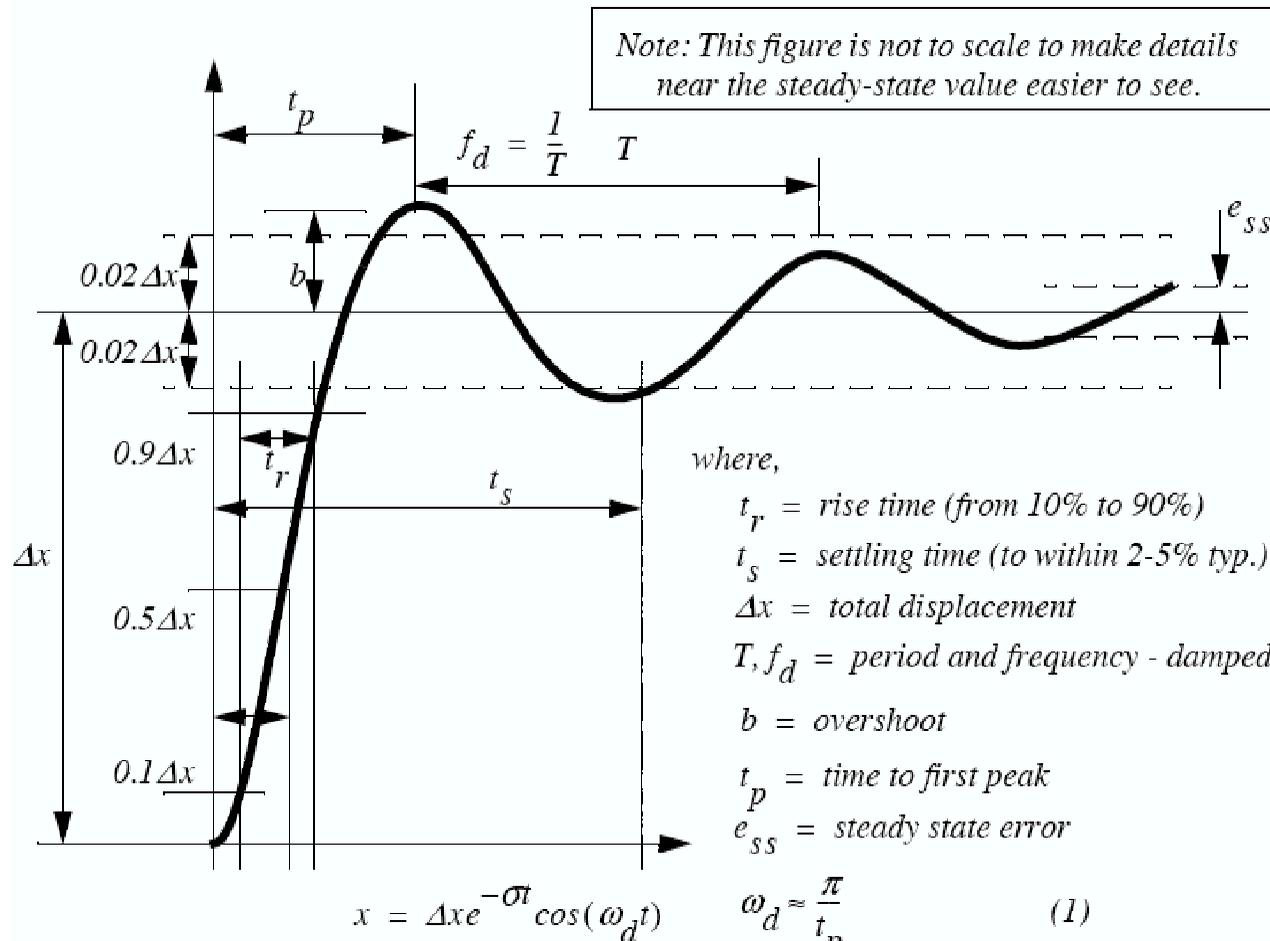
Sistemi non lineari

- Quando solo il coefficiente di smorzamento aumenta, la frequenza di oscillazione assieme alla risposta totale rallenta
- Quando il coefficiente di smorzamento è 0 il sistema oscillerà infinitamente
- Lo smorzamento critico si ha quando il coefficiente ha valore 1
- Se il coefficiente è maggiore o uguale ad 1 il sistema non oscilla.



Sistemi del secondo ordine - misure

Misurazioni dirette della risposta di un sistema del secondo ordine ci possono spiegare il comportamento del sistema



$$\omega_d \approx \frac{\pi}{t_p} \quad (1)$$

$$\sigma = \xi \omega_n \quad (2)$$

$$\frac{b}{\Delta x} = e^{-\sigma t_p} \quad (3)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{t_p \sigma}\right)^2 + 1}} \quad (4)$$

Relazione tra smorzamento e frequenza naturale

Calcoliamo questa relazione usando la forma complessa dell'equazione omogenea associata e la forma generica di equazione del secondo ordine

$$A^2 + 2\xi\omega_n A + \omega_n^2 = 0$$

$$A = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \sigma \pm j\omega_d$$
$$\frac{-2\xi\omega_n}{2} = \sigma = -\xi\omega_n \quad \omega_n = \frac{\sigma}{-\xi} \quad (1)$$
$$\frac{\sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = j\omega_d$$

$$4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4(-1)\omega_d^2$$
$$\omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2 = \omega_d^2 \quad \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_d \quad (2)$$

$$\frac{\sigma^2}{\xi^2} - \xi^2\frac{\sigma^2}{\xi^2} = \omega_d^2$$
$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{\omega_d^2}{\sigma^2} + 1 \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_d^2}{\sigma^2} + 1}} \quad (3)$$

The time to the first peak can be used to find the approximate decay constant

$$x(t) = C_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + C_2)$$
$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} \quad (4)$$

$$b \approx \Delta x e^{-\sigma t_p} (1)$$
$$\sigma = -\frac{\ln\left(\frac{b}{\Delta x}\right)}{t_p} \quad (5)$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale

- Esercizio
- Altre risposte

- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esercizio

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale

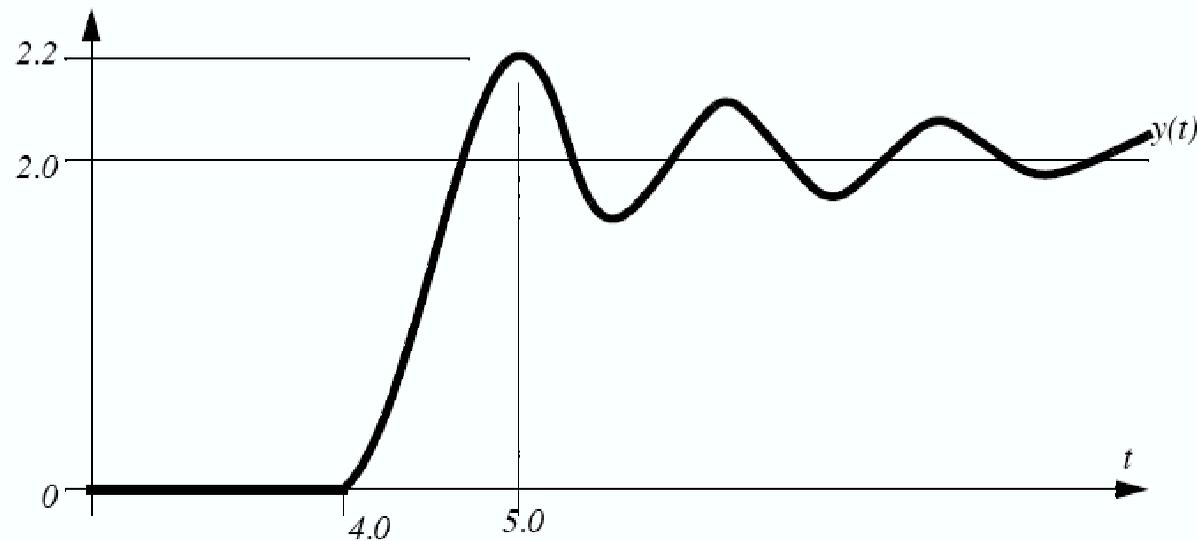
● **Esercizio**

- Altre risposte
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Scrivere una funzione nel dominio del tempo per il grafico (Trovare la frequenza naturale ed il coefficiente di smorzamento per l'equazione differenziale)



Altre risposte

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

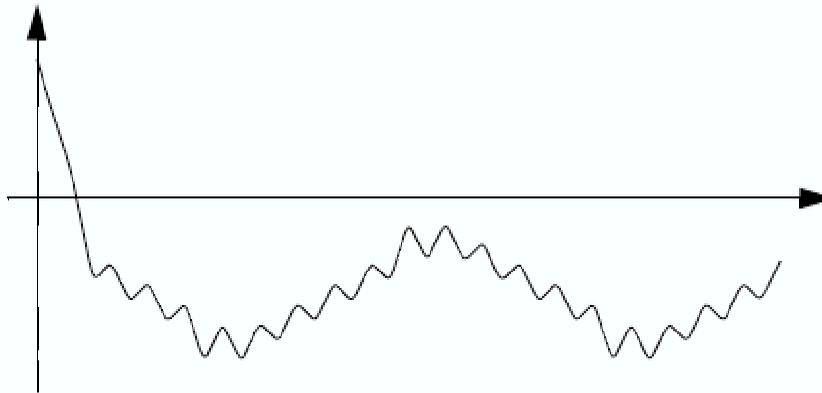
Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale
- Esercizio
- Altre risposte
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- La risposta di sistemi di ordine elevato ha molti termini esponenziali e/o sinusoidali
- Per questo tipo di risposte si usano le stesse tecniche di risoluzione usate per equazioni di primo e secondo ordine
- Nella figura è rappresentata una possibile risposta di un sistema di ordine elevato. Si nota un profilo di base corrispondente ad un sistema del primo ordine a cui vengono superimposti tre risposte sinusoidali ad alte frequenze.



Esempio

Given the homogeneous differential equation

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^4 x + 13\left(\frac{d}{dt}\right)^3 x + 34\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x + 42\left(\frac{d}{dt}\right)x + 20x = 5$$

Guess a solution for the homogeneous equation,

$$x_h = e^{At}$$
$$\frac{d}{dt}x_h = Ae^{At} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x_h = A^2 e^{At} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^3 x_h = A^3 e^{At} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^4 x_h = A^4 e^{At}$$

Substitute the values into the differential equation and find a value for the unknown.

$$A^4 e^{At} + 13A^3 e^{At} + 34A^2 e^{At} + 42Ae^{At} + 20e^{At} = 0$$

$$A^4 + 13A^3 + 34A^2 + 42A + 20 = 0$$

$$A = -1, -10, -1 - j, -1 + j$$

$$x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-10t} + C_3 e^{-t} \cos(t + C_4)$$

Guess a particular solution, and then solve for the coefficient.

$$x_p = A \quad \frac{d}{dt}x_p = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x_p = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^3 x_p = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^4 x_p = 0$$

$$0 + 13(0) + 34(0) + 42(0) + 20A = 5 \quad A = 0.25$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale
- Esercizio
- Altre risposte
- **Esempio**
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esempio - parte I

Solve for the unknowns, assuming the system starts at rest and undeflected.

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-10t} + C_3 e^{-t} \cos(t + C_4) + 0.25$$

$$0 = C_1 + C_2 + C_3 \cos(C_4) + 0.25 \quad (1)$$

$$C_3 \cos(C_4) = -C_1 - C_2 - 0.25 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} x_h(t) = -C_1 e^{-t} - 10C_2 e^{-10t} - C_3 e^{-t} \cos(t + C_4) - C_3 e^{-t} \sin(t + C_4)$$

$$0 = -C_1 - 10C_2 - C_3 \cos(C_4) - C_3 \sin(C_4) \quad (3)$$

Equations (1) and (3) can be added to get the simplified equation below.

$$0 = -9C_2 - C_3 \sin(C_4) + 0.25$$

$$C_3 \sin(C_4) = -9C_2 + 0.25 \quad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x_h(t) = C_1 e^{-t} + 100C_2 e^{-10t} + C_3 e^{-t} \cos(t + C_4) + C_3 e^{-t} \sin(t + C_4) + C_3 e^{-t} \sin(t + C_4) - C_3 e^{-t} \cos(t + C_4)$$

$$0 = C_1 + 100C_2 + C_3 \cos(C_4) + C_3 \sin(C_4) + C_3 \sin(C_4) - C_3 \cos(C_4)$$

$$0 = C_1 + 100C_2 + 2C_3 \sin(C_4) \quad (5)$$

Equations (4) and (5) can be combined.

$$0 = C_1 + 100C_2 + 2(-9C_2 + 0.25)$$

$$0 = -17C_1 + 100C_2 + 0.5 \quad (6)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^3 x_h(t) = -C_1 e^{-t} + (-1000)C_2 e^{-10t} - 2C_3 e^{-t} \sin(t + C_4) + 2C_3 e^{-t} \cos(t + C_4)$$

$$0 = -C_1 + (-1000)C_2 - 2C_3 \sin(C_4) + 2C_3 \cos(C_4) \quad (7)$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

● Sistemi del primo ordine

● Esempio

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine

● Sistemi del secondo ordine -
misure

● Relazione tra smorzamento e
frequenza naturale

● Esercizio

● Altre risposte

● Esempio

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Esempio - parte II

Equations (2 and (4) are substituted into equation (7).

$$\begin{aligned}0 &= -C_1 + (-1000)C_2 - 2(-9C_2 + 0.25) + 2(-C_1 - C_2 - 0.25) \\0 &= -3C_1 + (-984)C_2 - 1 \\C_1 &= \left(-\frac{984}{3}\right)C_2 - \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{8}$$

Equations (6) and (8) can be combined.

$$\begin{aligned}0 &= -17\left(\left(-\frac{984}{3}\right)C_2 - \frac{1}{3}\right) + 100C_2 + 0.5 \\0 &= 5676C_2 + 6.1666667 & C_2 &= -0.00109 \\C_1 &= \left(-\frac{984}{3}\right)(-0.00109) - \frac{1}{3} & C_1 &= 0.0242\end{aligned}$$

Equations (2) and (4) can be combined.

$$\begin{aligned}\frac{C_3 \sin(C_4)}{C_3 \cos(C_4)} &= \frac{-9C_2 + 0.25}{-C_1 - C_2 - 0.25} \\ \tan(C_4) &= \frac{-9(-0.00109) + 0.25}{-(0.0242) - (-0.00109) - 0.25} & C_4 &= -0.760\end{aligned}$$

Equation (4) can be used to find the remaining unknown.

$$C_3 \sin(-0.760) = -9(-0.00109) + 0.25 \quad C_3 = -0.377$$

The final response function is,

$$x(t) = 0.0242e^{-t} + (-0.00109)e^{-10t} + (-0.377)e^{-t} \cos(t - 0.760) + 0.25$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine
- Sistemi del secondo ordine - misure
- Relazione tra smorzamento e frequenza naturale
- Esercizio
- Altre risposte
- Esempio
- Esempio - parte I
- **Esempio - parte II**

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari



Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

- Osservazioni
- Osservazioni

Sistemi non lineari

Analisi della Risposta



Debora Botturi

Laboratorio di Sistemi e Segnali



Osservazioni

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

● Osservazioni

● Osservazioni

Sistemi non lineari

- Calcolata la risposta si procede nell'analisi
- La proprietà più importante che viene richiesta ad un sistema e da analizzare è la stabilità
- Semplici metodi per determinare la stabilità sono:
 - Se lo scalino come input porta il sistema all'infinito, il sistema sarà instabile
 - Se la rampa come input porta il sistema all'infinito, il sistema potrebbe non rispondere bene ai cambiamenti costanti
 - Se la risposta ad un input sinusoidale cresce per ogni ciclo, il sistema diventerà instabile.
- Oltre alla stabilità dobbiamo decidere per un sistema le prestazioni (tempo, frequenza, smorzamento)



Osservazioni

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

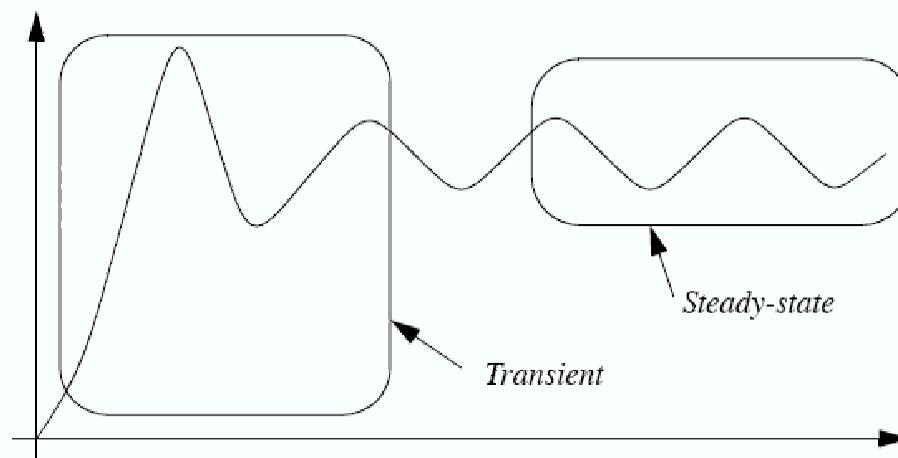
Analisi della Risposta

● Osservazioni

● Osservazioni

Sistemi non lineari

- Si può distinguere nel comportamento di un sistema:
 - transiente: soggetto agli effetti iniziali
 - steady-state: a lungo termine
- L'effetto transitorio è strettamente connesso con la soluzione omogenea ed alle condizioni iniziali, include un veloce tempo di salita e sovraelongazione
- L'effetto a regime si predice con la soluzione particolare, si vede dopo un pó di tempo di funzionamento e si stabilizza ad una onda sinusoidale sempre piú smorzata.



Sistemi non lineari

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Osservazioni

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

● Osservazioni

● Esempio

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Linearizzazione

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Sistemi che cambiano

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Esempio - parte V

● Esempio - parte VI

● Caso studio - parte I

● Caso studio - parte II

● Caso studio - parte III

● Caso studio - parte IV

● Caso studio - parte V

❖ I sistemi non lineari non possono essere descritti da equazioni differenziali lineari (come quelle fino ad ora incontrate)

❖ Le condizioni piú comuni che portano alla non linearitá sono: forze che sono la radice quadrata della distanza, condizioni aerodinamiche

❖ Nella figura a fianco esempio di equazione differenziale non lineare (con le fonti di non linearitá cerchiate)

$$\dot{x} + x^2 = 5$$

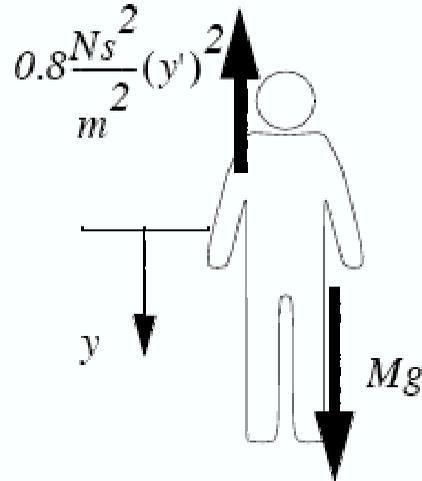
$$\dot{x}^2 + x = 5$$

$$\dot{x} + \log(x) = 5$$

$$\dot{x} + (5t)x = 5$$

Esempio

Si consideri l'equazione differenziale per una persona di $100kg$ lanciata da un aereo (le forze di trascinamento rendono l'equazione non lineare)



$$\sum F_y = 0.8(\dot{y})^2 - Mg = -M\ddot{y}$$

$$100kg\ddot{y} + 0.8\frac{Ns^2}{m^2}(\dot{y})^2 = 100kg \cdot 9.81\frac{N}{kg}$$

$$100kg\ddot{y} + 0.8\frac{Ns^2}{m^2}(\dot{y})^2 = 981N$$

$$100kg\ddot{y} + 0.8kg\frac{m}{s^2}\frac{s^2}{m^2}(\dot{y})^2 = 981kg\frac{m}{s^2}$$

$$100\ddot{y} + 0.8m^{-1}(\dot{y})^2 = 981ms^{-2}$$

$$\ddot{y} + 8 \times 10^{-3}m^{-1}(\dot{y})^2 = 9.81ms^{-2}$$

The terminal velocity can be found by setting the acceleration to zero.

$$(0) + 8 \times 10^{-3}m^{-1}(\dot{y})^2 = 9.81ms^{-2}$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{9.81ms^{-2}}{8 \times 10^{-3}m^{-1}}} = \sqrt{\frac{9.81}{8 \times 10^{-3}}m^2s^{-2}} = 35.0\frac{m}{s} = 126\frac{km}{h}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

● Osservazioni

● **Esempio**

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Linearizzazione

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Sistemi che cambiano

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Esempio - parte V

● Esempio - parte VI

● Caso studio - parte I

● Caso studio - parte II

● Caso studio - parte III

● Caso studio - parte IV

● Caso studio - parte V

Esempio - parte I

Una risoluzione alternativa é quella di usare l'integrazione esplicita

$$100\ddot{y} + 0.8m^{-1}(\dot{y})^2 = 981ms^{-2}$$

$$100\dot{v} + 0.8m^{-1}v^2 = 981ms^{-2}$$

$$100\frac{dv}{dt} + 0.8m^{-1}v^2 = 981ms^{-2}$$

$$100\frac{dv}{dt} = 981ms^{-2} - 0.8m^{-1}v^2$$

$$\frac{100}{981ms^{-2} - 0.8m^{-1}v^2}dv = dt$$

$$\int \frac{100}{\frac{-0.8m^{-1}}{981ms^{-2} + v^2} - 0.8m^{-1}}dv = \int dt$$

$$\int \frac{-125m}{v^2 - 1226.25m^2s^{-2}}dv = t + C_1$$

$$\int \frac{-125m}{\left(v + 35.02\frac{m}{s}\right)\left(v - 35.02\frac{m}{s}\right)}dv = t + C_1$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

● Osservazioni

● Esempio

● **Esempio - parte I**

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Linearizzazione

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Sistemi che cambiano

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Esempio - parte V

● Esempio - parte VI

● Caso studio - parte I

● Caso studio - parte II

● Caso studio - parte III

● Caso studio - parte IV

● Caso studio - parte V



Esempio - parte II

This can be reduced with a partial fraction expansion.

$$\int \left[\frac{A}{\left(v + 35.02 \frac{m}{s}\right)} + \frac{B}{\left(v - 35.02 \frac{m}{s}\right)} \right] dv = t + C_1$$

$$Av - A\left(35.02 \frac{m}{s}\right) + Bv + B\left(35.02 \frac{m}{s}\right) = -125m$$

$$v(A + B) + 35.02 \frac{m}{s}(-A + B) = -125m$$

$$A + B = 0$$

$$A = -B$$

$$35.02 \frac{m}{s}(-A + B) = -125m$$

$$(-(-B) + B) = -\frac{125}{35.02} s$$

$$B = -1.785 s$$

$$A = 1.785 s$$

$$\int \left[\frac{1.785 s}{\left(v + 35.02 \frac{m}{s}\right)} + \frac{-1.785 s}{\left(v - 35.02 \frac{m}{s}\right)} \right] dv = t + C_1$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- **Esempio - parte II**
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Esempio - parte III

L'integrale può essere risolto usando una forma equivalente

$$1.785s \ln \left| v + 35.02 \frac{m}{s} \right| - 1.785s \ln \left| v - 35.02 \frac{m}{s} \right| = t + C_1$$

$$1.785s \ln \frac{v + 35.02 \frac{m}{s}}{v - 35.02 \frac{m}{s}} = t + C_1$$

$$\int (a + bx)^{-1} dx = \frac{\ln |a + bx|}{b} + C$$

$$\ln \frac{v + 35.02 \frac{m}{s}}{v - 35.02 \frac{m}{s}} = e^{\frac{t}{1.785s}} + C_1$$

$$\frac{v + 35.02 \frac{m}{s}}{v - 35.02 \frac{m}{s}} = e^{C_1} e^{\frac{t}{1.785s}}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- **Esempio - parte III**
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Esempio - parte IV

$$\left| \frac{v + 35.02 \frac{m}{s}}{v - 35.02 \frac{m}{s}} \right| = C_2 e^{\frac{t}{1.785s}}$$

An initial velocity of zero can be assumed to find the value of the integration constant

$$\left| \frac{0 + 35.02 \frac{m}{s}}{0 - 35.02 \frac{m}{s}} \right| = C_2 e^{\frac{0}{1.785s}} \quad 1 = C_2$$

This can then be simplified, and the absolute value sign eliminated.

$$\frac{v + 35.02 \frac{m}{s}}{v - 35.02 \frac{m}{s}} = \pm e^{\frac{t}{1.785s}}$$

$$v + 35.02 \frac{m}{s} = \pm v e^{\frac{t}{1.785s}} \mp 35.02 \frac{m}{s} e^{\frac{t}{1.785s}}$$

$$v \left(1 \mp e^{\frac{t}{1.785s}} \right) = \mp 35.02 \frac{m}{s} e^{\frac{t}{1.785s}} - 35.02 \frac{m}{s}$$

$$v = 35.02 \frac{m}{s} \left(\frac{\mp e^{\frac{t}{1.785s}} - 1}{1 \mp e^{\frac{t}{1.785s}}} \right)$$

$$0 = 35.02 \frac{m}{s} \left(\frac{\mp 1 - 1}{1 \mp 1} \right) = \left(\frac{1 - 1}{1 + 1} \right) = \frac{0}{2}$$

$$v = 35.02 \frac{m}{s} \left(\frac{e^{\frac{t}{1.785s}} - 1}{1 + e^{\frac{t}{1.785s}}} \right)$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III

● **Esempio - parte IV**

- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Linearizzazione

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- **Linearizzazione**
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

- La risoluzioni di equazioni differenziali non lineari non utilizza metodi di routine
- Tipicamente vengono usati metodi numerici (che vedremo nelle prossime lezioni)
- Un sistema non lineare può essere approssimato con una equazione lineare nei seguenti modi:
 - Scegliendo un punto di operazione od un range per le componenti
 - Trovare una costante che relaziona i cambiamenti dell'input con quelli dell'output
 - Sviluppare un'equazione lineare
 - Usare comunque una equazione lineare per l'analisi
- Una equazione differenziale linearizzata può essere risolta usando tecniche note a condizione che il sistema non si muova troppo lontano dal punto di linearizzazione



Esempio - parte I

Assumiamo di avere una equazione non lineare. Può essere risolta linearizzandola nell'intorno del punto di operazione (la derivata non si discosti troppo da 100)

Given,

$$\dot{y}^2 + 4y = 200 \quad y(0) = 10$$

We can make the equation linear by replacing the velocity squared term with the velocity times the actual velocity. As long as the system doesn't vary too much from the given velocity the model should be reasonably accurate.

$$\dot{y} = \pm\sqrt{200 - 4y}$$
$$\dot{y}(0) = \pm\sqrt{200 - 4(10)} = \pm 12.65$$
$$12.65\dot{y} + 4y = 20$$

This system may now be solved as a linear differential equation. If the velocity (first derivative of y) changes significantly, then the differential equation should be changed to reflect this.

Homogeneous:

$$12.65\dot{y} + 4y = 0$$
$$12.65A + 4 = 0 \quad A = -0.316$$
$$y_h = Ce^{-0.316t}$$

Particular:

$$y_p = A$$
$$12.65(0) + 4A = 20 \quad A = 50$$

Initial conditions:

$$y(t) = Ce^{-0.316t} + 50$$
$$10 = Ce^0 + 50 \quad C = -40$$
$$y(t) = -40e^{-0.316t} + 50$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- **Esempio - parte I**
- Esempio -parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Esempio -parte II

Se la velocità cambia significativamente allora l'equazione differenziale deve cambiare. Ricalcoliamo l'equazione dopo 0.1s.

$$y(0.1) = -40e^{-0.316(0.1)} + 50 = 11.24$$

$$\frac{d}{dt}y(0.1) = -40(-0.316)e^{-0.316(0.1)} = 12.25 \quad \text{Note: a small change}$$

$$12.25y' + 4y = 20$$

Now recalculate the solution to the differential equation.

Homogeneous:

$$12.25\dot{y} + 4y = 0$$

$$12.25A + 4 = 0 \quad A = -0.327$$

$$y_h = Ce^{-0.327t}$$

Particular:

$$y_p = A$$

$$12.25(0) + 4A = 20 \quad A = 50$$

Initial conditions:

$$y(t) = Ce^{-0.327t} + 50$$

$$11.24 = Ce^{0.1} + 50 \quad C = -35.070575$$

$$y(t) = -35.07e^{-0.316t} + 50$$

Notice that the values have shifted slightly, and as the analysis progresses the equations will adjust slowly. Higher accuracy can be obtained using smaller steps in time.

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- **Esempio -parte II**
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Sistemi che cambiano

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

● Osservazioni

● Esempio

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Linearizzazione

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Sistemi che cambiano

● Esempio - parte I

● Esempio - parte II

● Esempio - parte III

● Esempio - parte IV

● Esempio - parte V

● Esempio - parte VI

● Caso studio - parte I

● Caso studio - parte II

● Caso studio - parte III

● Caso studio - parte IV

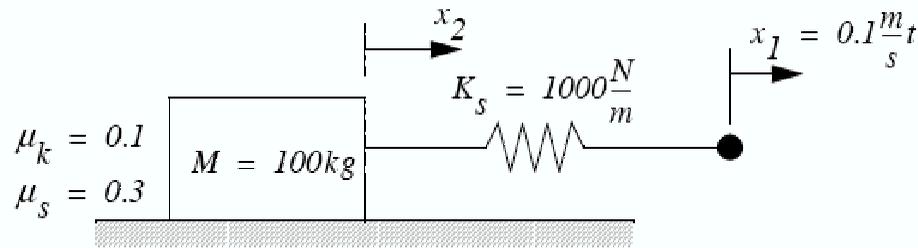
● Caso studio - parte V

- Nei sistemi reali le forze continuano a cambiare
- Esempi sono:
 - Forze di attrito statico all'inizio del moto che si trasformano in più piccole forze di attrito cinetico
 - La forza su un cavo in tensione agisce come una molla, quando è compresso la forza va a zero



Esempio - parte I

Massa solidale ad un cavo



An FBD and equation can be developed for the system. The friction force will be left as a variable at this point.

For the cable/spring in tension $x_1 - x_2 \gtrsim 0$

$$\sum F_x = -F_F + K_s(x_1 - x_2) = M\ddot{x}_2$$

$$-F_F + 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left(0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} - x_2 \right) = 100 \text{ kg} \ddot{x}_2$$

$$100 \text{ kg} \ddot{x}_2 + 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} x_2 = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} - F_F$$

$$\ddot{x}_2 + 10 \frac{\text{N}}{\text{kgm}} x_2 = 1 \frac{\text{N}}{\text{kg s}} t - \frac{F_F}{100 \text{ kg}}$$

$$\ddot{x}_2 + 10 \text{ s}^{-2} x_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t - \frac{F_F}{100 \text{ kg}}$$

For the cable/spring in compression $x_1 - x_2 < 0$

$$\sum F_x = -F_F = M\ddot{x}_2$$

$$-F_F = 100 \text{ kg} \ddot{x}_2$$

$$100 \text{ kg} \ddot{x}_2 = -F_F$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{F_F}{100 \text{ kg}}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Esempio - parte II

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

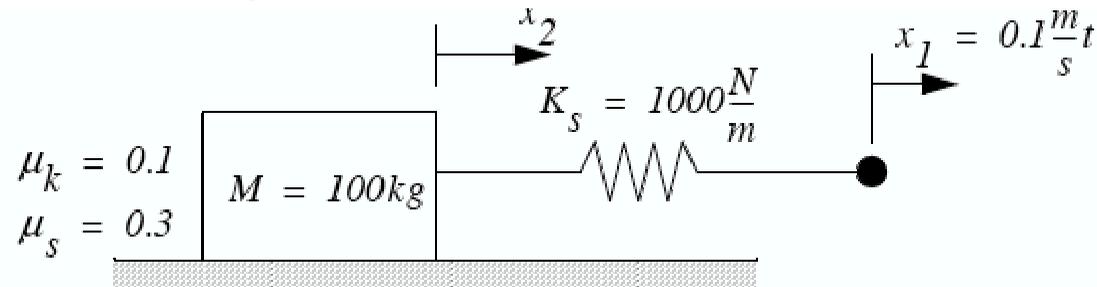
Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- **Esempio - parte II**
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

Forze di attrito per la massa



An *FBD* and equation can be developed for the system. The friction force will be left as a variable at this point.

$$N = 100 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 981 \text{ N}$$

$$\text{static friction} \quad \frac{d}{dt} x_2 \leq 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$0 \text{ N} \leq F_F < \mu_s N < 294.3 \text{ N}$$

$$\text{kinetic friction} \quad \frac{d}{dt} x_2 > 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$F_F = \mu_k N = 98.1 \text{ N}$$

Esempio - parte III

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- **Esempio - parte III**
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

Analisi dell'oggetto prima dell'inizio del moto. Si assume che il sistema parta da fermo e non deflesso. Il blocco quindi stará fermo fino a che le forze del cavo in tensione non supereranno quelle di attrito statico (il sistema é statico da 0 a 2.943s)

$$x_2 = 0 \quad \ddot{x}_2 = 0 \quad F_F = 294.3N$$

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{F_F}{100kg}$$

$$0 + 10s^{-2}0 = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{294.3N}{100kg}$$

$$1\frac{m}{s^3}t = \frac{294.3kgm}{100kgs^2}$$

$$t = 2.943s$$



Esempio - parte IV

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- **Esempio - parte IV**
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

Analisi dell'oggetto dopo l'inizio del moto

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 1\frac{m}{3}t - \frac{98.1N}{100kg}$$

For the homogeneous,

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 0$$

$$A + 10s^{-2} = 0 \quad A = \pm 3.16js^{-1}$$

$$x_h = C_1 \sin(3.16t + C_2)$$

For the particular,

$$x_p = At + B \quad \dot{x}_p = A \quad \ddot{x}_p = 0$$

$$0 + 10s^{-2}(At + B) = 1\frac{m}{3}t - \frac{98.1N}{100kg}$$

$$10s^{-2}A = 1\frac{m}{3} \quad A = 0.1\frac{m}{s}$$

$$10s^{-2}B = -\frac{98.1N}{100kg} \quad B = -0.0981m$$



Esempio - parte V

Analisi dell'oggetto dopo l'inizio del moto

For the initial conditions,

$$x(2.943s) = 0m \quad \frac{d}{dt}x(2.943s) = 0\frac{m}{s}$$

$$x(t) = C_1 \sin(3.16t + C_2) + 0.1\frac{m}{s}t - 0.0981m$$

$$0 = C_1 \sin(3.16(2.943s) + C_2) + 0.1\frac{m}{s}(2.943s) - 0.0981m$$

$$C_1 \sin(9.29988 + C_2) = -0.1962$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = 3.16C_1 \cos(3.16t + C_2) + 0.1\frac{m}{s}$$

$$0 = 3.16C_1 \cos(3.16(2.943) + C_2) + 0.1\frac{m}{s}$$

$$C_1 \cos(9.29988 + C_2) = -0.0316$$

$$\frac{C_1 \sin(9.29988 + C_2)}{C_1 \cos(9.29988 + C_2)} = \frac{-0.1962}{-0.0316}$$

$$\tan(9.29988 + C_2) = 6.209 \quad C_2 = (-7.889 + \pi n)rad \quad n \in \mathbb{I}$$

$$C_1 = \frac{-0.1962}{\sin(9.29988 - 7.889)} = -0.199m$$

$$x(t) = -0.199m \sin(3.16t - 7.889rad) + 0.1\frac{m}{s}t - 0.0981m$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -0.199(3.16)m \cos(3.16t - 7.889rad) + 0.1\frac{m}{s}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- **Esempio - parte V**
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Esempio - parte VI

Le equazioni di moto cambiano dopo che il cavo non oppone piú nessuna forza al moto (punto finale del cavo e blocco hanno lo stesso spostamento)

$$0.1 \frac{m}{s} t = -0.199m \sin(3.16t - 7.889rad) + 0.1 \frac{m}{s} t - 0.0981m$$

$$-0.199m \sin(3.16t - 7.889rad) = 0.0981m$$

$$3.16t - 7.889 + \pi n = -0.51549413 \quad t = 3.328s$$

$$x(3.328) = 0.137m \quad \frac{d}{dt}x(2.333) = 0.648 \frac{m}{s}$$

After this the differential equation without the cable/spring is used.

$$x_2'' = -\frac{98.1N}{100kg} = -0.981 \frac{m}{s^2}$$

$$\dot{x}_2 = \left(-0.981 \frac{m}{s^2}\right)t + C_1$$

$$0.648 \frac{m}{s} = \left(-0.981 \frac{m}{s^2}\right)(3.328s) + C_1$$

$$C_1 = 3.913 \frac{m}{s}$$

$$x_2 = \left(-\frac{0.981m}{2s^2}\right)t^2 + 3.913 \frac{m}{s}t + C_2$$

$$0.137m = \left(-\frac{0.981m}{2s^2}\right)(3.328s)^2 + 3.913 \frac{m}{s}(3.328s) + C_2$$

$$C_2 = -7.453m$$

$$x_2(t) = \left(-\frac{0.981m}{2s^2}\right)t^2 + 3.913 \frac{m}{s}t - 7.453m$$

This motion continues until the block stops moving.

$$0 = \left(-0.981 \frac{m}{s^2}\right)t + 3.913 \frac{m}{s}$$

$$t = 3.989s$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- **Esempio - parte VI**
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V



Caso studio - parte I

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

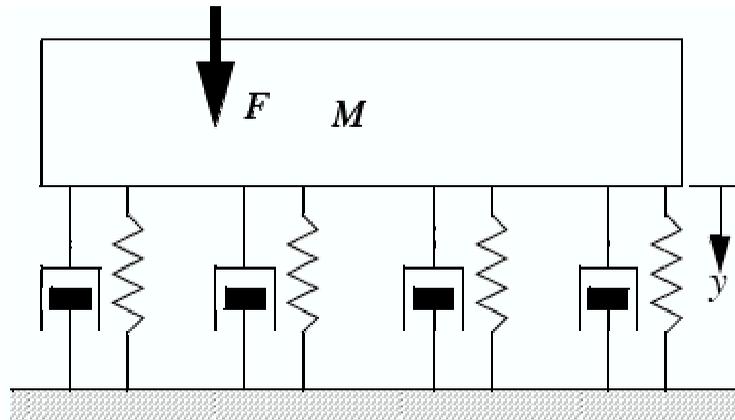
Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- **Caso studio - parte I**
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

La massa é $10000kg$. Il sistema opera in modo che una forza di $1000N$ con una frequenza di $2Hz$ sia applicata alla massa. Progettare un sistema isolante per le vibrazioni (I criteri sono: gli isolanti, molla smorzatore devono essere lunghi $30cm$ quando non caricati ed $25cm$ quando caricati, le oscillazioni non possono essere piú di $2cm$)



Caso studio - parte II

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- **Caso studio - parte II**
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

Scomposizione a termini di froza

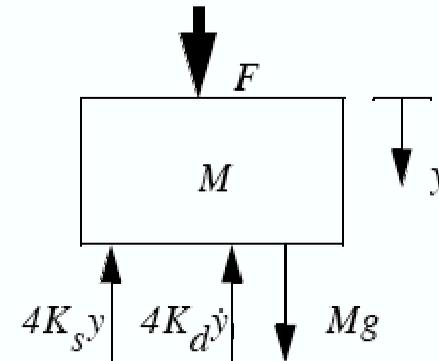
$$+\downarrow \sum F_y = F - 4K_s y - 4K_d \dot{y} + Mg = M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + 4K_d \dot{y} + 4K_s y = F + Mg$$

$$\ddot{y} + \frac{4K_d \dot{y}}{M} + \frac{4K_s y}{M} = \frac{F}{M} + g$$

$$\ddot{y} + \frac{4K_d \dot{y}}{10000Kg} + \frac{4K_s y}{10000Kg} = \frac{1000N}{10000Kg} \sin(2(2\pi)t) + 9.81ms^{-2}$$

$$\ddot{y} + 0.0004Kg^{-1} K_d \dot{y} + 0.0004Kg^{-1} K_s y = 0.1ms^{-2} \sin(4\pi t) + 9.81ms^{-2}$$



Caso studio - parte III

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- **Caso studio - parte III**
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

Calcolo del coefficiente della molla

When the system is at rest the equation is simplified; the acceleration and velocity terms both become zero. In addition, we will assume that the cyclic force is not applied for the unloaded/loaded case. This simplifies the differential equation by eliminating several terms.

$$0.0004\text{Kg}^{-1}K_s y = 9.81\text{ms}^{-2}$$

Now we can consider that when unloaded the spring is 0.30m long, and after loading the spring is 0.25m long. This will result in a downward compression of 0.05m, in the positive y direction.

$$0.0004\text{Kg}^{-1}K_s(0.05\text{m}) = 9.81\text{ms}^{-2}$$

$$K_s = \frac{9.81}{0.0004(0.05)}\text{Kgms}^{-2}\text{m}^{-1}$$

$$\therefore K_s = 491\text{KNm}^{-1}$$



Caso studio - parte IV

Soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$\ddot{y} + 0.0004K_d g^{-1} K_d \dot{y} + 0.0004K_d g^{-1} (491KNm^{-1})y = 0.1ms^{-2} \sin(4\pi t) + 9.81ms^{-2}$$

$$\ddot{y} + 0.0004K_d g^{-1} K_d \dot{y} + 196s^{-2}y = 0.1ms^{-2} \sin(4\pi t) + 9.81ms^{-2}$$

The particular solution can now be found by guessing a value, and solving for the coefficients. (Note: The units in the expression are uniform (i.e., the same in each term) and will be omitted for brevity.)

$$y = A \sin(4\pi t) + B \cos(4\pi t) + C$$

$$y' = 4\pi A \cos(4\pi t) - 4\pi B \sin(4\pi t)$$

$$y'' = -16\pi^2 A \sin(4\pi t) - 16\pi^2 B \cos(4\pi t)$$

$$\begin{aligned} \therefore (-16\pi^2 A \sin(4\pi t) - 16\pi^2 B \cos(4\pi t)) + 0.0004K_d (4\pi A \cos(4\pi t) - 4\pi B \sin(4\pi t)) \\ + 196(A \sin(4\pi t) + B \cos(4\pi t) + C) = 0.1 \sin(4\pi t) + 9.81 \end{aligned}$$

$$-16\pi^2 B + 0.0004K_d 4\pi A + 196A = 0$$

$$B = A(31.8 \times 10^{-6} K_d + 1.24)$$

$$-16\pi^2 A + 0.0004K_d(-4\pi B) + 196A = 0.1$$

$$A(-16\pi^2 + 196) + B(-5.0 \times 10^{-3} K_d) = 0.1$$

$$A(-16\pi^2 + 196) + A(31.8 \times 10^{-6} K_d + 1.24)(-5.0 \times 10^{-3} K_d) = 0.1$$

$$A = \frac{0.1}{-16\pi^2 + 196 + (31.8 \times 10^{-6} K_d + 1.24)(-5.0 \times 10^{-3} K_d)}$$

$$A = \frac{0.1}{K_d^2(-159 \times 10^{-9}) + K_d(-6.2 \times 10^{-3}) + 38.1}$$

$$B = \frac{3.18 \times 10^{-6} K_d - 0.124}{K_d^2(-159 \times 10^{-9}) + K_d(-6.2 \times 10^{-3}) + 38.1}$$

$$C = 9.81ms^{-2}$$

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- **Caso studio - parte IV**
- Caso studio - parte V



Caso studio - parte V

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- **Caso studio - parte V**

Determinazione coefficiente di smorzamento

In the previous particular solution the values were split into cosine and sine components. The magnitude of oscillation can be calculated with the Pythagorean formula

$$\begin{aligned} \text{magnitude} &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \text{magnitude} &= \frac{\sqrt{(0.1)^2 + \left((3.18 \cdot 10^{-6})K_d - 0.124\right)^2}}{K_d^2(-159 \cdot 10^{-9}) + K_d(-(6.2 \cdot 10^{-3})) + 38.1} \end{aligned}$$

The design requirements call for a maximum oscillation of 0.02m, or a magnitude of 0.01m.

$$0.01 = \frac{\sqrt{(0.1)^2 + \left((3.18 \cdot 10^{-6})K_d - 0.124\right)^2}}{K_d^2(-159 \cdot 10^{-9}) + K_d(-(6.2 \cdot 10^{-3})) + 38.1}$$

$$K_d = 3411N \frac{s}{m}$$

