Esercizi – superfici

Esercizio 1. *Sia $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare piana semplice e chiusa con velocità unitaria. Siano $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa$ i dati di Frenet di γ. Sia $R > 0$ un numero reale fissato tale che $R < \frac{1}{\kappa(s)}$ per ogni $s \in [0,T]$. Sia $f : [0,T] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da*

$$f(s,\theta) = \gamma(s) + R(\cos\theta \mathbf{N}(s) + \sin\theta \mathbf{B}(s))$$

e sia S la superfice parametrizzata da f.

1. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n}$ per S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana K di S.*
5. *Calcolare le curvature principali di S.*
6. *Sia $S_+ \subset S$ il sottoinsieme di S dove la curvatura gaussiana $K > 0$. Calcolare $\iint_{S_+} K dS$.*

Soluzioni. 1. Usando il fatto che γ è piana $\implies$ torsione $\tau(s) = 0$, e le formule di Frenet per le derivate di T, N, B, abbiamo

$$\begin{aligned}
f_s &= \dot\gamma(s) + R(\cos\theta \dot N(s) + \sin\theta \dot B(s)) \\
&= T(s) + R(\cos\theta(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) + \sin\theta(-\tau(s)N(s))) \\
&= (1 - R\cos\theta\kappa(s))T(s) \\
f_\theta &= R(-\sin\theta N(s) + \cos\theta B(s)) \\
&= -R\sin\theta N(s) + R\cos\theta B(s)
\end{aligned}$$

Quindi, per l'ortonormalità della base T, N, B

$$\begin{aligned}
E &= \langle f_s, f_s\rangle = (1 - R\cos\theta\kappa(s))^2 \\
F &= \langle f_s, f_\theta\rangle = 0 \\
G &= \langle f_\theta, f_\theta\rangle = R^2
\end{aligned}$$

percui la prima forma fondamentale è

$$I_{(s,\theta)}(w_1, w_2) = (1 - R\cos\theta\kappa(s))^2 w_1^2 + R^2 w_2^2.$$

2. Una mappa di Gauss:

$$\begin{aligned}
f_s \times f_\theta &= (1 - R\cos\theta\kappa(s))T(s) \times (-R\sin\theta N(s) + R\cos\theta B(s)) \\
&= -R\sin\theta(1 - R\cos\theta\kappa(s))B(s) - R\cos\theta(1 - R\cos\theta\kappa(s))N(s) \\
\|f_s \times f_\theta\| &= \sqrt{R^2\sin^2\theta(1 - R\cos\theta\kappa(s))^2 + R^2\cos^2\theta(1 - R\cos\theta\kappa(s))^2} \\
&= \sqrt{R^2(1 - R\cos\theta\kappa(s))^2} \\
&= R(1 - R\cos\theta\kappa(s)) \\
\implies \mathbf{n}(s,\theta) &= \frac{f_s \times f_\theta}{\|f_s \times f_\theta\|} = -\sin\theta B(s) - \cos\theta N(s)
\end{aligned}$$

3. Seconda forma fondamentale:

$$\begin{aligned}
L &= \langle f_{ss}, \mathbf{n}(s,\theta)\rangle = \langle (1 - R\cos\theta\kappa'(s))T(s) + (1 - R\cos\theta\kappa(s))\dot{T}(s), -\sin\theta B(s) - \cos\theta N(s)\rangle \\
&= \langle (1 - R\cos\theta\kappa'(s))T(s) + (1 - R\cos\theta\kappa(s))(\kappa(s)N(s)), -\sin\theta B(s) - \cos\theta N(s)\rangle \\
&= (1 - R\cos\theta\kappa(s))\kappa(s)(-\cos\theta) \\
&= -\cos\theta\kappa(s)(1 - R\cos\theta\kappa(s)) \\
M &= \langle f_{s\theta}, \mathbf{n}(s,\theta)\rangle = \langle R\sin\theta\kappa(s)T(s), -\sin\theta B(s) - \cos\theta N(s)\rangle \\
&= 0 \\
N &= \langle f_{\theta\theta}, \mathbf{n}(s,\theta)\rangle = \langle -R\cos\theta N(s) - R\sin\theta B(s), -\sin\theta B(s) - \cos\theta N(s)\rangle \\
&= R
\end{aligned}$$

4. Curvatura gaussiana:

$$\begin{aligned}
K &= \det A = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-R\cos\theta\kappa(s)(1 - R\cos\theta\kappa(s)) - 0^2}{R^2(1 - R\cos\theta\kappa(s))^2 - 0^2} \\
&= \frac{-\cos\theta\kappa(s)}{R(1 - R\cos\theta\kappa(s))}
\end{aligned}$$

5. Curvature principali:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix} \\
\implies \operatorname{Tr} A &= \frac{1}{EG - F^2}(GL - FM + (-FM + EN)) \\
&= \frac{1}{EG - F^2}(GL - 2FM + EN) \\
&= \frac{1}{R^2(1 - R\cos\theta\kappa(s))^2}(R^2(-\cos\theta\kappa(s)(1 - R\cos\theta\kappa(s))) + (1 - R\cos\theta\kappa(s))^2 R) \\
&= \frac{-\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))} + \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

Quindi, usando la formula $\lambda_\pm = \frac{\operatorname{Tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{Tr}(A)^2 - 4\det A}}{2}$ per gli autovalori di A, abbiamo

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Tr} A)^2 - 4\det A &= \left(\frac{-\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))} + \frac{1}{R}\right)^2 - 4\frac{-\cos\theta\kappa(s)}{R(1 - R\cos\theta\kappa(s))} \\
&= \left(\frac{\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))}\right)^2 - 2\left(\frac{\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))}\right)\frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 + 4\frac{\cos\theta\kappa(s)}{R(1 - R\cos\theta\kappa(s))} \\
&= \left(\frac{\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))}\right)^2 + 2\left(\frac{\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))}\right)\frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))} + \frac{1}{R}\right)^2 \\
\implies \lambda_\pm &= \frac{\frac{-\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))} + \frac{1}{R} \pm \left(\frac{\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))} + \frac{1}{R}\right)}{2} \\
\lambda_+ &= \frac{1}{R} \\
\lambda_- &= \frac{-\cos\theta\kappa(s)}{(1 - R\cos\theta\kappa(s))}.
\end{aligned}$$

6. Per ipotesi $R < \frac{1}{\kappa(s)}$ percui $R\kappa(s) < 1$, quindi $1 - R\kappa(s)\cos\theta > 0$ per ogni s, θ. Quindi $K > 0 \iff -\cos\theta\kappa(s) > 0 \iff -\cos\theta > 0 \iff \cos\theta > 0 \iff \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Quindi $S_+ = [0, T] \times (-\pi/2, \pi/2)$

e usando il fatto che $dS = \sqrt{EG - F^2} ds\ d\theta$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\iint_{S_+} K dS &= \iint_{S_+} K(s,\theta)\sqrt{EG-F^2} ds\ d\theta \\
&= \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos\theta\kappa(s)}{R(1-R\cos\theta\kappa(s))}\ R(1-R\cos\theta\kappa(s))\ ds\ d\theta \\
&= \int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\kappa(s) ds\ d\theta \\
&= \sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^T \kappa(s) ds \\
&= (1-(-1)) \int_0^T \kappa(s) ds \\
&= 2\int_0^T \kappa(s) ds.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 2. *Poniamo*

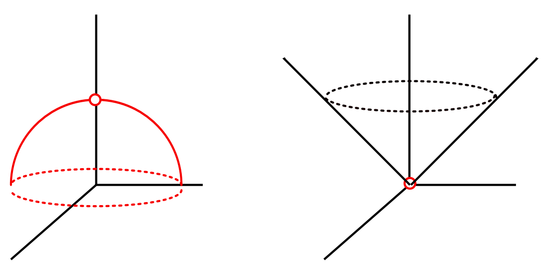
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1, 0 < z < 1\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 = z^2, z > 0\},$$

e $h : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ *un'applicazione differenziabile strettamente crescente. Sia* $\Phi : S \to C$ *l'applicazione definita da*

$$\Phi(x,y,z) = h(z)\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, 1\right)$$

1. *Far vedere che* Φ *è un'applicazione differenziabile.*
2. *È possibile determinare la funzione* h *in modo che l'applicazione* Φ *trasformi i meridiani di* S *in curve di lunghezza finita su* C*?*
3. *È possibile determinare la funzione* h *in modo che* Φ *sia una isometria locale?*

Soluzione. La superficie S è l'emisfera nord della sfera senza il polo nord. La superficie C è la parte del cono $z = r, r = \sqrt{x^2+y^2}$, sopra il piano xy, cioè senza l'origine $(0,0,0)$.



Una carta locale per S è la coppia (U_1, φ_1) dove $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x^2+y^2 < 1\}$ e $\varphi_1(x,y) = (x,y,\sqrt{1-x^2+y^2})$.

Una carta locale per C è la coppia (U_2,φ_2) dove $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\varphi_2(x,y) = (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$. Quindi $\phi_2^{-1} : S \to U_2$ è la proiezione al piano xy, cioè $(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) \mapsto (x,y)$.

1. Dobbiamo mostrare che l'applicazione composta $F(x,y) = \varphi_2^{-1} \circ \Phi \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$ è differenziabile. Abbiamo

$$F(x,y) = h(\sqrt{1-x^2-y^2})\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Vediamo che, per le varie regole delle derivate, ed essendo h differenziabile, $F(x, y)$ è differenziable ogni volta che le radici quadrate sono differenziabili. Dato che $\sqrt{f(x)}$ è differenziabile rispetto a x se $f(x) > 0$ e $f(x)$ è differenziabile, vediamo che poichè $1 - x^2 + y^2 > 0$ e $x^2 + y^2 > 0$ su U_1, $F(x, y)$ è differenziabile su U_1.

2. Un meridiano di S è l'immagine, tramite φ_1, di un raggio uscente dall'origine $(0, 0)$ in U_1. Cioè possiamo parametrizzare un meridiano con $\gamma(t) = \varphi_1(t \cos\theta, t \sin\theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in (0, 1)$.

   La lunghezza dell'immagine del meridiano tramite Φ sarà

$$L(\Phi \circ \gamma(t)) = \int_0^1 \|(\Phi \circ \gamma)'(t)\| dt.$$

   Ponendo $z(t) = \sqrt{1 - t^2}$, l'immagine di γ tramite Φ sarà la curva $\Phi \circ \gamma(t) = h(z(t)) \left(\frac{t \cos\theta}{t}, \frac{t \sin\theta}{t}, 1\right) = h(z(t)) (\cos\theta, \sin\theta, 1)$, percui

$$(\Phi \circ \gamma)'(t) \quad = \quad (h \circ z)'(t)(\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

   Quindi

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \gamma)'(t)\| &= |h(z(t))'| \|(\cos\theta, \sin\theta, 1)\| \\ &= |(h \circ z)'(t)'| \sqrt{\cos\theta^2 + \sin\theta^2 + 1^2} = |(h \circ z)'(t)| \sqrt{2} \end{aligned}$$

   Per la regola della catena, $(h \circ z)'(t) = h'(z) z'(t)$. Per ipotesi $h'(z)$ è positiva per ogni z, mentre $z'(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$ è negativa per ogni $t \in (0, 1)$.

   Segue che $(h \circ z)'(t)$ è negativa per ogni t, percui $|(h \circ z)'(t)| = -(h \circ z)'(t)$.

   Allora

$$\begin{aligned} L(\Phi \circ \gamma(t)) &= \int_0^1 \|(\Phi \circ \gamma)'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 -(h \circ z)'(t) \sqrt{2} dt \\ &= -\sqrt{2} \int_0^1 (h \circ z)'(t) dt \\ &= -\sqrt{2} (h \circ z)(t)|_{t=0}^{t=1} \\ &= -\sqrt{2} \left(h(\sqrt{0}) - h(\sqrt{1})\right) \\ &= \sqrt{2} \, (h(1) - h(0)) \end{aligned}$$

   Quindi la risposta è sì – se scegliamo una funzione $h : (0, 1) \to (0, \infty)$ strettamente crescente tale che l'immagine di h è limitata in $(0, \infty)$, allora $L(\Phi \circ \gamma(t)) = \sqrt{2} \, (h(1) - h(0))$ sarà un numero finito. Ad esempio, la funzione $h(z) = 2z$ è differenziabile, strettamente crescente, e l'immagine $(0, 2)$ è limitata.

3. È possibile scegliere $h(z)$ in modo tale che Φ è una isometria locale?

   La risposta è no. Ecco il ragionamento:

   Per il teorema egregium di Gauss, se S e C hanno diverse curvature gaussiane, non può esistere una isometria locale da una all'altra. Quindi bisogna verificare è se la curvatura Gaussiana di S è diversa dalla curvatura Gaussiana di C.

   A questo punto potremmo calcolare esplicitamente la curvatura gaussiana di S e C.

   Alternativamente possiamo ragionare che la curvatura Gaussiana di S è positiva ovunque, mentre la curvatura Gaussiana di C è 0 ovunque, senza calcoli. Usiamo il fatto che la curvatura Gaussiana è il prodotto delle curvature principali, e le curvature principali in un punto p sono la massima e la minima curvatura normale in p. Abbiamo visto che la curvatura normale in una direzione è uguale, a meno di segno, alla curvatura della sezione normale della superfice in quella direzione. La curvatura normale è positivo se la sezione normale è concava nella direzione della normale nella mappa di Gauss, ed è negativo se la sezione normale è concava nella direzione opposta della normale nella mappa di Gauss.

Per la sfera, scegliamo la normale uscente per la mappa di Gauss. Ogni sezione normale passante per un punto è concava nella direzione opposta della normale della mappa di Gauss, quindi la curvatura normale è negativa in ogni direzione. Quindi le due curvature principali (che sono massima/minima curvatura normale) saranno entrambe negative, percui il loro prodotto (=la curvatura gaussiana) sarà > 0.

Per il cono C, fissiamo per la mappa di Gauss la normale in direzione di z crescente. Consideriamo un punto $p \in C$. Siccome ogni sezione normale passante per p è o una retta o concava verso la normale della mappa di Gauss, la curvatura normale in ogni direzione sarà ≥ 0. Quindi la curvatura normale minima è 0, la curvatura normale massima è ¿0. Le curvature principali sono la minima e la massima delle curvature normali, quindi la curvatura gaussiana sarà $0 \times (\textit{positivo}) = 0$.

□

Esercizio 3. *Sia $g : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione di classe C^∞. Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ una regione compatta. Dimostrare che l'area del grafico di g determinata dalla regione R è data da*

$$\iint_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

Soluzione. L'area è $\iint_R \sqrt{EG - F^2} dx\ dy$. La carta locale del grafico di g è $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$ percui la prima forma fondamentale è data da

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_x, \phi_x \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ g_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ g_x \end{bmatrix} \rangle = 1 + g_x^2 \\ F &= \langle \phi_x, \phi_y \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ g_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ g_y \end{bmatrix} \rangle = g_x g_y \\ G &= \langle \phi_y, \phi_y \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ g_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ g_y \end{bmatrix} \rangle = 1 + g_y^2 \end{aligned}$$

quindi

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1 + g_x^2)(1 + g_y^2) - g_x^2 g_y^2} = \sqrt{1 + g_x^2 g_y^2 + g_x^2 + g_y^2 - g_x^2 g_y^2} = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}.$$

□

Esercizio 4. *Sia $S = \{(x, y, xy) | x, y \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Dimostrare che S è una superfice regolare.*
2. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana di S.*
5. *Trovare le curve su S che hanno la curvatura normale nulla in ciascun punto.*

Soluzioni. 1. Possiamo dire che S è il grafico della funzione liscia $f(x, y) = xy$, percui è una superfice regolare.

Oppure, se vogliamo dimostrare direttamente che S è una superfice regolare, dobbiamo verificare che le due condizioni nella definizione di superfice regolare sono soddisfatte. L'intera superfice è ricoperta con un'unica carta locale, $(\mathbb{R}^2, \phi)$ dove $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è data da $\phi(x, y) = (x, y, xy)$.

- $\phi : \mathbb{R}^2 \to S$ è un'omeomorfismo, perchè è un'applicazione continua e biunivoca la cui inversa $\psi : S \to \mathbb{R}^2$ data da $\psi(x, y, z) = (x, y)$ è anche continua.
- per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobiana è $d\phi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ che ha rango 2 (perchè le colonne sono sempre linearmente indipendenti grazie alle prime due righe).

2. Prima forma fondamentale:

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_x, \phi_x \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \rangle = 1 + y^2 \\ F &= \langle \phi_x, \phi_y \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \rangle = xy \\ G &= \langle \phi_y, \phi_y \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \rangle = 1 + x^2 \\ \Longrightarrow I_{(x,y)}(w_1, w_2) &= Ew_1^2 + 2Fw_1w_2 + Gw_2^2 = (1 + y^2)w_1^2 + 2xyw_1w_2 + (1 + x^2)w_2^2. \end{aligned}$$

3. Seconda forma fondamentale. Scegliamo la mappa di Gauss data da $\mathbf{n}(\phi(x, y)) = \frac{\phi_x \times \phi_y}{\|\phi_x \times \phi_y\|}$. Quindi

$$\begin{aligned} \phi_x \times \phi_y &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Longrightarrow \mathbf{n}(\phi(x, y)) &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando le formule $L = \langle \phi_{xx}, \mathbf{n} \rangle, M = \langle \phi_{xy}, \mathbf{n} \rangle, N = \langle \phi_{yy}, \mathbf{n} \rangle$ abbiamo

$$\begin{aligned} L &= \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 0 \\ M &= \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ N &= \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 0 \\ \Longrightarrow \mathrm{II}_{(x,y)}(w_1, w_2) &= Lw_1^2 + 2Mw_1w_2 + Nw_2^2 = \frac{2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} w_1w_2. \end{aligned}$$

4. Curvatura gaussiana $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)-x^2y^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$

5. Una curva in S è l'immagine tramite ϕ di una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ in $\mathbb{R}^2$. La curvatura normale nella direzione $(\phi \circ \sigma)'(t)$ è data nella carta locale dalla formula

$$\frac{\mathrm{II}_{\sigma(t)}(\sigma'(t))}{I_{\sigma(t)}(\sigma'(t))}$$

che èzero se e solo se il numeratore è zero, quindi ponendo

$$0 = \mathrm{II}_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = Lx'(t)^2 + 2Mx'(t)y'(t) + Ny'(t)^2 = \frac{2x'(t)y'(t)}{\sqrt{1 + x(t)^2 + y(t)^2}}$$

vediamo che è zero se e solo se o $x'(t) = 0$ o $y'(t) = 0$, ossia se e solo se o $x(t)$ o $y(t)$ è costante. Quindi le curve di curvatura normale nulla sono le curve del tipo $(a, y(t), ay(t))$ e le curve del tipo $(x(t), b, bx(t))$ per qualsiasi funzione liscia $x(t)$.

(Infatti queste curve sono rette passanti per l'origine, date da $z = ay$ o $z = bx$.)

□

Esercizio 5. *Sia α una curva regolare nel piano xz. Sia S la superficie di revoluzione generata ruotando α intorno all'asse z. Supponiamo che $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. (Quindi $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$). La matrice che rappresenta rotazione attorno all'asse z per l'angolo θ è*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

percui S ha una parametrizzazione

$$\varphi(s,\theta) = R_\theta \alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)x(s) \\ \sin(\theta)x(s) \\ z(s) \end{bmatrix}$$

Fissato θ, la curva $\{R_\theta \alpha(s) | s \in [a,b]\}$ che è l'immagine di α tramite la rotazione R_θ si dice un meridiano *di S. Fissato $s \in [a,b]$, la circonferenza $\{R_\theta \alpha(s) | \theta \in [0, 2\pi]\}$ si dice* un parallelo *di S.*

1. *Trovare la prima forma fondamentale di S.*

2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n} : S \to S^2$.*

3. *Trovare la seconda forma fondamentale di S.*

4. *Mostrare che una direzione principale è tangente al parallelo passante per p, e l'altra direzione principale in p è tangente al meridiano passante per p.*

5. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = \varphi(s,\theta)$ è $K = \frac{\ddot{x}(s)}{x(s)}$.*

Esercizio 6. *Sia S il grafico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$. Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = (x, y, f(x,y))$ è*

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

dove $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ecc.

Il numeratore è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ che si chiama la matrice Hessiana *di f.*

Esercizio 7. *Siano $S_1 = \{(u\cos v, u\sin v, \ln u) | u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(u\cos v, u\sin v, v) | u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ due superfici parametrizzate.*

1. *Mostrare che la mappa $\Phi : S_1 \to S_2$ data da $\Phi(u\cos v, u\sin v, \ln u) = (u\cos v, u\sin v, v)$ è un diffeomorfismo locale.*

2. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S_2 in $\varphi_2(u,v)$ è uguale alla curvatura Gaussiana di S_1 in $\varphi_1(u,v)$.*

3. *Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to S_1$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.*

4. *Calcolare la lunghezza della curva $\Phi \circ \gamma : [0, 2\pi] \to S_2$ data da $\Phi \circ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.*

5. *Concludere che Φ non è un'isometria. Questo esempio mostra che la conversa al Teorema Egregium non vale.*

Soluzioni. 1. Un diffeomorfismo locale è un'applicazione $f : X \to Y$ di classe C^∞ tale che ad ogni punto $p \in X$ esistono un'intorno U di p ed un'intorno V di $f(p)$ tale che $f : U \to V$ ha un inversa di classe C^∞. Per mostrare che Φ è di classe C^∞, dobbiamo usare carte locali. Poi per fare vedere che è un difffeomorfismo locale, usiamo il teorema della funzione inversa: una funzione di classe C^∞ $f : U_1 \to U_2$ dove $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^k$ è un diffeomorfismo locale se e solo se la matrice jacobiana è invertible.

Per S_1 possiamo prendere come carta locale una coppia (U_1, ϕ_1) con $U_1 = (0, \infty) \times (a, b)$ dove (a, b) è qualsiasi intervallo in $\mathbb{R}$ tale che $b - a$ è inferiore a 2π (perchè altrimenti la mappa $\phi_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ non è un'omeomorfismo perchè non è iniettiva.) Allora una carta locale per S_2 è la coppia (U_2, ϕ_2) dove $U_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ e $\phi_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. La mappa inversa $\phi_2^{-1} : S_2 \to U_2$ è la mappa $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$, cioè $u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = z$. La mappa $\phi_2^{-1} \circ \Phi \circ \phi_1 : U_1 \to U_2$ è quindi data da

$$\phi_2^{-1} \circ \Phi \circ \phi_1(u, v) = (u, v)$$

che è chiaramente di classe C^∞. Poi vediamo che la matrice jacobiana di questa funzione composta (che rappresenta Φ nelle carte locali) è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è sempre invertibile, quindi Φ è un diffeomorfismo locale.

2. Prima forma fondamentale per S_1:

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = \langle \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \frac{1}{u} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \frac{1}{u} \end{bmatrix} \rangle = 1 + \frac{1}{u^2} \\
F &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = \langle \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 0 \\
G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = \langle \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = u^2
\end{aligned}$$

Mappa di Gauss per S_1:

$$\begin{aligned}
\phi_u \times \phi_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & \frac{1}{u} \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{pmatrix} = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k} \\
\implies \mathbf{n}(u, v) &= \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Seconda forma fondamentale per S_1:

$$\begin{aligned}
L &= \langle \phi_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{u^2} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{bmatrix} \rangle = \frac{-1}{u\sqrt{1 + u^2}} \\
M &= \langle \phi_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{bmatrix} \rangle = 0 \\
N &= \langle \phi_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \begin{bmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{bmatrix} \rangle = \frac{-u}{\sqrt{1 + u^2}}
\end{aligned}$$

Curvatura gaussiana di S_1:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{1 + u^2} \frac{1}{u^2 + 1} = \frac{1}{(1 + u^2)^2}$$

Prima forma fondamentale per S_2:

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = \langle \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 1 \\
F &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = \langle \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 0 \\
G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = \langle \begin{bmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = u^2 + 1
\end{aligned}$$

Mappa di Gauss per S_2:

$$\begin{aligned}
\phi_u \times \phi_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{pmatrix} = \sin v\mathbf{i} - \cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k} \\
\implies \mathbf{n}(u,v) &= \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{bmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Seconda forma fondamentale per S_2:

$$\begin{aligned}
L &= \langle \phi_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{bmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix} \rangle = 0 \\
M &= \langle \phi_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{bmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\
N &= \langle \phi_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \begin{bmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{bmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix} \rangle = 0
\end{aligned}$$

Curvatura gaussiana di S_2:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{u^2+1} = \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

3. Lunghezza di $\gamma(t)$:

$$L(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

4. Lunghezza di $\Phi \circ \gamma(t)$:

$$L(\Phi \circ \gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \|(\Phi \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

5. Poichè la lunghezza di $\gamma(t)$ non è uguale alla lunghezza di $\Phi(\gamma(t))$, Φ non è una isometria locale.

$\square$

Esercizio 8. *Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia C_t il cerchio di centro $\gamma(u)$ e raggio 1 sul piano per $\gamma(u)$ parallelo al piano (y, z). Poniamo

$$S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} C_t$$

1. *Trovare una parametrizzazione di S e discuterne la regolarità.*
2. *Trovare un polinomio $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $S = F^{-1}(0)$.*
3. *È vero o falso che S è una superfice liscia?*
4. *Calcolare la curvatura normale di C_0 considerata come curva su S.*

Soluzione. 1. Una parametrizzazione: la circonferenza di raggio 1 centrata a $\gamma(u)$ sul piano per $\gamma(u)$ parallelo al piano (y, z) è

$$\gamma(u) + (0, \cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Quindi una parametrizzazione della superfice S è

$$\begin{aligned} f(u,\theta) &= \gamma(u) + (0, \cos\theta, \sin\theta) \\ &= (u, u^2, u^3) + (0, \cos\theta, \sin\theta) \\ &= (u, u^2 + \cos\theta, u^3 + \sin\theta). \end{aligned}$$

2. $x = u$, $y = u^2 + \cos\theta$, $z = u^3 + \sin\theta$. Quindi, $y = x^2 + \cos\theta$, $z = x^3 + \sin\theta$. Poi $1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = (y - x^2)^2 + (z - x^3)^2$, percui ponendo

$$F(x, y, z) = (y - x^2)^2 + (z - x^3)^2 - 1$$

abbiamo $F^{-1}(0) = S$.

3. (Interpretiamo "superfice liscia" come "superfice regolare"). È vero. Usiamo il fatto che se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia (=di classe C^∞), e $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di F, allora ogni componente connessa di $F^{-1}(0)$ è una superfice regolare.

Verifichiamo che 0 è un valore regolare di F: $dF(x, y, z) = (2(y - x^2)(-2x) + 2(z - x^3)(-3x^2), 2(y - x^2), 2(z - x^3))$. I punti critici sono quelli dove $dF_{(x,y,z)} = 0$, ossia i punti (x, y, z) che soddisfano le equazioni simultanee

$$\begin{aligned} 2(y - x^2)(-2x) + 2(z - x^3)(-3x^2) &= 0 \\ 2(y - x^2) &= 0 \\ 2(z - x^3) &= 0. \end{aligned}$$

Se $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$, significa che $(y - x^2)^2 + (z - x^3)^2 = 1$ percui (x, y, z) non può soddisfare $y - x^2 = 0$ e $z - x^3 = 0$. Quindi, 0 è un valore regolare di F, percui $F^{-1}(0) = S$ è una superfice regolare.

4. Sia $\alpha(s)$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. La curvatura normale in $p = \alpha(s)$, nella direzione $\mathbf{v} = \dot\alpha(s)$ è $\kappa_n(\mathbf{v}) = \langle \ddot\alpha(s), \mathbf{n}(p) \rangle$.

Una parametrizzazione di C_0 è $\alpha(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$, per fortuna è già parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco (il vettore tangente è sempre unitario). Adesso bisogna scegliere una mappa di Gauss. Una possibilità è

$$n(f(u,\theta)) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial \theta}}{\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \|}$$

Oppure possiamo usare il fatto che $\nabla F \perp S$, e usare

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

Nel nostro caso, $(\nabla F)(0, \cos\theta, \sin\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{bmatrix}$, quindi $\mathbf{n}(0, \cos\theta, \sin\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$.

Quindi, la curvatura normale è $\langle \ddot\alpha(\theta), \mathbf{n}(0, \cos\theta, \sin\theta) \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \rangle = -1.$

$\square$

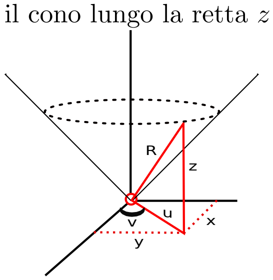
Esercizio 9. *Sia* $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. *Si consideri la parametrizzazione* $f : U \to \mathbb{R}^3$ *definita da*

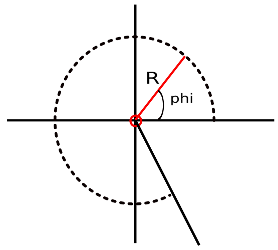
$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u).$$

1. *Trovare una isometria di* S *(con la metrica indotta dalla metrica euclidea di* $\mathbb{R}^3$*) su una regione del piano euclideo.*

2. *Calcolare curvature e direzioni principali di* f.

Soluzione. 1. La superfice parametrizzata da f è contenuta in un cono (si verifica che $x^2 + y^2 = z^2$). È la parte del cono sopra il piano xy, escludendo la retta $z = x$ (che corrisponde a $v = 0$ e $v = 2\pi$). Tagliamo il cono lungo la retta $z = x, y = 0$, srotolandolo nel piano xy:





Un punto sul cono è $(x, y, z) = (u \cos v, u \sin v, u)$ dove $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ e v è l'angolo tra $(x, y, 0)$ e l'asse x nel piano xy. Quando il cono viene srotolato, questo punto diventa il punto $(R \cos \phi, R \sin \phi, 0)$ nel piano xy, dove $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}u$ e l'angolo ϕ si calcola dal fatto che $uv = R\phi$, ossia $\phi = \frac{u}{R} v = \frac{u}{\sqrt{2}u} v = \frac{v}{\sqrt{2}}$.

Dunque vogliamo verificare se l'applicazione $\Phi : S \to P$ data da $\Phi(u \cos v, u \sin v, u) = (\sqrt{2}u \cos(v/\sqrt{2}), \sqrt{2}u \sin(v/\sqrt{2}), 0)$ è una isometria.

First fundamental form on cone:

$$E = \langle f_u, f_u \rangle = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$F = \langle f_u, f_v \rangle = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u \sin v \\ r \cos v \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$G = \langle f_v, f_v \rangle = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} = u^2$$

First fundamental form on Φ(cone):

$$\widetilde{E} = \langle (\Phi \circ f)_u, (\Phi \circ f)_u \rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(v/\sqrt{2}) \\ \sqrt{2} \sin(v/\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(v/\sqrt{2}) \\ \sqrt{2} \sin(v/\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\widetilde{F} = \langle (\Phi \circ f)_u, (\Phi \circ f)_v \rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(v/\sqrt{2}) \\ \sqrt{2} \sin(v/\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u \sin(v/\sqrt{2}) \\ u \cos(v/\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\widetilde{G} = \langle (\Phi \circ f)_v, (\Phi \circ f)_v \rangle = \begin{bmatrix} -u \sin(v/\sqrt{2}) \\ u \cos(v/\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u \sin(v/\sqrt{2}) \\ u \cos(v/\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = u^2$$

so Φ is an isometry.

2. Second fundamental form: gauss map

$$\mathbf{n}(f(u, v)) = f_u \times f_v / \|f_u \times f_v\|$$

$$f_u \times f_v = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ u \end{bmatrix}, \ \|f_u \times f_v\| = \sqrt{2}u, \text{ so}$$

$$\mathbf{n}(f(u,v)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 1 \end{bmatrix}.$$

So

$$\begin{aligned} L &= \langle f_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ M &= \langle f_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ N &= \langle f_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \begin{bmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{u}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Consequently

$$A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{2u^2} \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2u^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2u/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}u} \end{pmatrix}$$

So the principal curvatures are 0 and $\frac{1}{\sqrt{2}u}$, and the principal directions are the directions of f_u and f_v, i.e. directions of $\begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$.

□