Superfici

Geometria course, part 3/3 – outline of topics covered.

Warning: questi appunti mancano dettagli, esempi e sopratutto immagini! Non sostituiscono gli appunti delle lezioni.

Contents

1 Prime definizioni

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme aperto e connesso del piano euclideo. (L'aperto U è l'analogo dell'intervallo I per le curve.) Coordinate (u, v).

- Un'applicazione $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ significa una terna (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) dove ogni $\phi_i : U \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞.

- Il differenziale $d\phi_{(u,v)}$ significa la matrice jacobiana
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$
- Ad ogni punto $(u,v) \in U$, la matrice jacobiana manda un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ basato al punto (u,v), al vettore $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ basato al punto $\phi(u,v)$.
- Se il rango di $d\phi_{(u,v)}$ è 2, ci sono due direzioni indipendenti di rette tangenti alla superficie passanti per $\phi(u,v)$, ossia c'è un *piano tangente* passante per $\phi(u,v)$.

Definizione. *Una* superficie immersa *(o* parametrizzata*) è un'applicazione $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che il differenziale $d\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ abbia rango 2 in ogni punto $(u,v) \in U$.*

- L'immagine $\phi(U)$ è detta il *sostegno* di ϕ.
- Caveat: Il sostegno $\phi(U)$ di una superficie parametrizzata non è necessariamente omeomorfo a U (ad esempio se la superficie si interseca).

A noi interessano le superfici *regolari* (c.f. curve regolari):

Definizione. *Una superficie regolare e un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ tale che, per ogni $\mathbf{p} \in S$, esiste un intorno W di $\mathbf{p}$ in $\mathbb{R}^3$, un sottoinsieme connesso $U \subset \mathbb{R}^2$, e un'applicazione (di classe C^∞) $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ tale che*

1. *$\phi(U) = W \cap S$ e $\phi : U \to W \cap S$ è un omeomorfismo,*
2. *$d\phi_{(u,v)}$ è iniettivo (ha rango 2) $\forall (u,v) \in U$.*

- La prima condizione garantisce che ogni punto p di S ha un intorno in S diffeomorfo ad un aperto in $\mathbb{R}^2$.
- Per la seconda condizione, ad ogni punto p di S c'è un piano tangente passante per p, generato dai vettori indipendenti $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$.
- La coppia (U, ϕ) è detta una *carta locale* in $\mathbf{p}$.
- L'applicazione ϕ è detta *parametrizzazione locale* in $\mathbf{p}$
- le coordinate (u,v) dell'aperto U sono dette *coordinate locali* in $\mathbf{p}$.

Definizione. *Una collezione $\{(W_\alpha, U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ di carte locali che ricoprono S è detta* un'atlante *per S.*

2 Esempi di superfici regolari

Esempio. La superficie parametrizzata $\phi(u,v) = (u^3, v^3, uv)$ *non* è una superficie regolare. Perchè $d\phi = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \\ v & u \end{pmatrix}$ non ha rango 2 per $(u,v) = (0,0)$.

Esempio. La superficie parametrizzata $\phi(u,v) = (\sin u, \sin 2u, v)$ *non è* una superficie regolare.

2.1 Grafici

Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione liscia (cioè di classe C^∞). Il grafico di f è l'insieme
$$\mathrm{Gr}(f) = \{(u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3 | (u,v) \in U\}$$
ed è una superficie regolare:

1. L'applicazione $\phi : U \to \mathrm{Gr}(f)$ data da $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ è una carta locale che ricopre $\mathrm{Gr}(f)$. Si vede che ϕ è un diffeomorfismo perchè la proiezione $\pi : \mathrm{Gr}(f) \to U$ data da $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ è l'inversa.
2. La matrice jacobiana è $d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$ ha rango due ad ogni punto (u,v) perchè le prime due righe sono linearmente indipendenti.

Lemma 2.1.1. *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare, allora ogni punto $p \in S$ ha un intorno omeomorfo ad un grafico $(u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$ o $(u, f(u,v), v)$ o $(f(u,v), u, v)$.*

2.2 Insiemi di livello.

Definizione. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞.*

- *Un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si dice un* punto critico *di f se la matrice jacobiana $df = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ non ha rango massimo. (Quindi, dato che il rango massimo di df sarebbe 1, per non avere rango 1 dev'essere uguale a $(0, 0, 0)$ ad un punto critico). Le immagini dei punti critici tramite f (che sono quindi punti di $\mathbb{R}$ nell'immagine di f) sono dette* valori critici *di f.*

- *Un punto $a \in \mathbb{R}$ si dice un* valore regolare *se, per ogni $x \in f^{-1}(a)$, si ha $df(x) \neq (0, 0, 0)$. Cioè $a \in \mathbb{R} \cap f(\mathbb{R}^3)$ è un valore regolare se e solo se la controimmagine $f^{-1}(a)$ non contiene nessun punto critico di f.*

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Quindi $df = 2(x, y, z)$. Allora

1. l'unico punto critico di f è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$;

2. qualsiasi $a < 0$ è automaticamente regolare, perchè $f^{-1}(a)$ è vuoto (quindi non contiene un punto critico);

3. qualsiasi $a > 0$ è regolare, perchè $x^2 + y^2 + z^2 = a \implies (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ quindi $f^{-1}(a)$ non contiene un punto critico.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x, y, z) = xyz$. Quindi $df = (yz, xz, xy)$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme aperto e $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞. Se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f, allora ogni componente connessa dell'insieme di livello $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare.*

Dimostrazione. Per ogni $(x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$ sappiamo che $df(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Supponiamo, senza perdità di generalità, che $\partial f / \partial z \neq 0$. In questo caso costruiamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{pmatrix}$ che ha determinante $\partial f / \partial z \neq 0$.

Questa matrice è la matrice jacobiana $dF(x, y, z)$ dell'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Per il teorema della funzione inversa, se $dF(x_0, y_0, z_0)$ è invertibile, allora F è un diffeomorfismo locale, ossia F è un diffeomorfismo tra un intorno V di (x_0, y_0, z_0) ed un intorno W di $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, a)$. Inoltre possiamo supporre, senza perdità di generalità, che $W = U \times \tilde{U}$ dove $U \subset \mathbb{R}^2$ è un intorno di (x_0, y_0) e $\tilde{U} \subset \mathbb{R}$ è un intorno di a (perchè gli intorni che sono prodotti di aperti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di intorni − ogni intorno contiene un intorno del genere).

Quindi, $F : V \to W = U \times \tilde{U}$ è un diffeomorfismo, indichiamo la sua inversa con $G : W \to V$.

Sia $\phi : U \to f^{-1}(a)$ la funzione data da $\phi(x, y) = G(x, y, a)$. Verifichiamo che (U, ϕ) è una carta locale in (x_0, y_0, z_0):

1. L'applicazione $\phi : U \to \phi(U)$ è un'omeomorfismo perchè è la composizione di due omeomorfismi,

$$\begin{array}{rcl} I : U & \to & U \times \{a\} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, z) \\ G : U \times \{a\} & \to & G(U \times \{a\}) \\ (x, y, a) & \mapsto & G(x, y, a) \end{array}$$

   e $\phi(U) = G(U \times \{a\}) = f^{-1}(a) \cap V$.

2. $d\phi = dGdI = dG \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = la matrice 3x2 avente le prime due colonne di dG. Poichè dG è invertibile, le sue colonne sono linearmente indipendenti, quindi $d\phi$ è una matrice con due colonne indipendenti, perciò il rango di $d\phi$ è 2.

$\square$

2.3 Superfici di rotazione

Definizione. *Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ un'arco (o curva) di Jordan, la cui traccia $\sigma(I)$ è contenuta in un piano $H \subset \mathbb{R}^3$, e sia R una retta in H disgiunta da $\sigma(I)$. La* superficie di rotazione *generata dalla curva σ e la retta H è la superficie ottenuta ruotanto σ intorno a R.*

Proposizione 2.3.1. *Una superficie di rotazione è una superficie regolare.*

3 Vettori tangenti e il piano tangente

- $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ una carta locale per S, $\phi(u,v) = \begin{bmatrix} \phi_1(u,v) \\ \phi_2(u,v) \\ \phi_3(u,v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- La matrice jacobiana/il differenziale di ϕ è la matrice $d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\,\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)$.
- Le colonne di $d\phi$ generano uno spazio vettoriale di dimensione 2, ossia un piano, indicato con T_pS. Cioè T_pS è lo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$. Il *piano tangente in p* è il piano parallelo a T_pS passante per p, cioè il sottoinsieme $\{p + \mathbf{v} | \mathbf{v} \in T_pS\}$ di $\mathbb{R}^3$.
- Il prodotto vettoriale $\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}$ è quindi ortogonale al piano tangente.
- L'equazione del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\mathbf{p}$ avente normale $\mathbf{n}$ è $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Il piano tangente in $\mathbf{p} = \phi(u,v)$ è quindi dato dalla formula $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \rangle = 0$.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞. Sia $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare, percui l'insieme di livello $S = f^{-1}(a)$ è una superficie regolare. Allora $\nabla f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$ è normale a $T_{\mathbf{p}}S$, e quindi l'equazione del piano tangente ad S passante per $\mathbf{p} \in S$ è data da $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \nabla f(\mathbf{p}) \rangle$.

Sia $\phi : U \to S$ qualsiasi carta locale in $\mathbf{p}$. Allora, poichè l'immagine di ϕ è contenuta nell'insieme di livello $f^{-1}(a)$, vediamo che la composizione $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ è costante ($f \circ \phi(u,v) = a$). Quindi, la matrice jacobiana di $f \circ \phi$ è zero: $d(f \circ \phi) = (0\ 0)$. Dato che $d(f \circ \phi) = df d\phi = (\nabla f)^T d\phi$ significa che

$$(\nabla f)^T \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\ \frac{\partial\phi}{\partial v}\right) = (0\ \ 0)$$

ossia $\nabla f \perp \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle$ e $\nabla f \perp \frac{\partial\phi}{\partial v}$. Poichè $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$ è una base di $T_{\mathbf{p}}S$, concludiamo che ∇f è ortogonale al piano tangente, ossia ∇f è normale al piano tangente.

4 Funzioni differenziabili

Siano S una superficie regolare e $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Siccome S è solo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, una funzione f definita su S non è necessariamente definita su $\mathbb{R}^3$, quindi non possiamo prendere derivate rispetto ai variabili x, y, z di $\mathbb{R}^3$.

Però, localmente abbiamo carte locali. Data una carta locale (U, ϕ) di S, la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ determina una funzione $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$.

Definizione. *Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ si dice* differenziabile *(di classe C^∞) se per ogni carta locale (U, ϕ) di S la funzione composta $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ è differenziable (di classe C^∞).*

Analogamente, se abbiamo una funzione continua $F : S_1 \to S_2$ tra due superfici regolari, per parlare di differenziabilità bisogna lavorare con carte locali su entrambe le superfici.

Definizione. *Una funzione continua $F : S_1 \to S_2$ si dice* differenziabile *se, per ogni $p \in S$, esiste una carta locale (U_1, ϕ_1) in $p \in S_1$, e una carta locale (U_1, ϕ_2) in $F(p) \in S_2$, con $F(U_1) \subset U_2$, tale che la composizione $\phi_2 {-1} \circ F \circ \phi_1 : U_1 \to U_2$ è una funzione differenziabile.*

5 La prima forma fondamentale

Definizione. *La* prima forma fondamentale *di S è l'applicazione $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ data da $I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ \ \forall \mathbf{p} \in S$.*

Sia (U, ϕ) una carta locale di S, con coordinate locali (u, v).

L'applicazione $d\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to T_{\phi(u,v)}S$ è biunivoca, e identifica il vettore $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con il vettore $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w} = w_1 \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + w_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)$ di $T_{\phi(u,v)}S$.

Lemma 5.0.2. *La matrice $d\phi^T_{(u,v)} d\phi_{(u,v)}$ è simmetrica e definita positiva. Indicando le entrate con $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ dove E, F, G sono funzioni dei variabili u e v, abbiamo per ogni $\eta, \xi \in \mathbb{R}^2$ che*

$$\xi^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \eta = \langle d\phi_{(u,v)}\xi, d\phi_{(u,v)}\eta \rangle$$

dove $\langle , \rangle$ significa il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$. Quindi, la prima forma fondamentale rispetto alla carta locale è

$$I_{(u,v)}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mathbf{w} = w_1^2 E(u,v) + 2w_1 w_2 F(u,v) + w_2^2 G(u,v).$$

Dimostrazione. Dato che $d\phi_{(u,v)}\xi$ e $d\phi_{(u,v)}\eta$ sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle d\phi_{(u,v)}\xi, d\phi_{(u,v)}\eta \rangle &= (d\phi_{(u,v)}\xi)^T d\phi_{(u,v)}\eta \\ &= \xi^T d\phi^T_{(u,v)} d\phi_{(u,v)}\eta. \end{aligned}$$

□

Dato che $d\phi^T_{(u,v)} d\phi_{(u,v)} = \begin{bmatrix} (\partial_u \phi)^T \\ (\partial_v \phi)^T \end{bmatrix} (\partial_u \phi \ \ \partial_v \phi) = \begin{pmatrix} \langle \partial_u \phi, \partial_u \phi \rangle & \langle \partial_u \phi, \partial_v \phi \rangle \\ \langle \partial_v \phi, \partial_u \phi \rangle & \langle \partial_v \phi, \partial_v \phi \rangle \end{pmatrix}$ vediamo che

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \rangle \\ F(u,v) &= \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle \\ G(u,v) &= \langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle. \end{aligned}$$

5.1 Lunghezza d'arco

Sia $\sigma : [a,b] \to U$ una curva in U. Allora $\phi \circ \sigma : [a,b] \to S$ è una curva in $S \subset \mathbb{R}^3$. La lunghezza di $\phi \circ \sigma$ è

$$\begin{aligned} L(\phi \circ \sigma) &= \int_a^b \|(\phi \circ \sigma)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle (\phi \circ \sigma)'(t), \phi \circ \sigma)'(t) \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle d\phi_{\sigma(t)}\sigma'(t), d\phi_{\sigma(t)}\sigma'(t) \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{I_{\sigma(t)}(\sigma'(t))} dt \end{aligned}$$

Esempio. Sia S il grafico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$. Sia $\sigma : [a,b] \to U$ una curva $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$.

Quindi $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$, $\partial_u \phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{bmatrix}, \partial_v \phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{bmatrix}$. $\langle \partial_u \phi, \partial_u \phi \rangle = 1 + (\partial_u f)^2, \langle \partial_u \phi, \partial_v \phi \rangle = \partial_u f \partial_v f, \langle \partial_v \phi, \partial_v \phi \rangle = 1 + (\partial_v f)^2$.

Prima forma fondamentale:

$$\begin{aligned} I_{(u,v)}\mathbf{w} &= \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} (1+(\partial_u f)^2 & \partial_u f \partial_v f \\ \partial_u f \partial_v f & 1+(\partial_v f)^2 \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ &= (1+(\partial_u f)^2)w_1^2 + 2\partial_u f \partial_v f w_1 w_2 + (1+(\partial_v f)^2)w_2^2. \end{aligned}$$

Lunghezza dell'immagine di σ tramite ϕ:

$$L(\phi \circ \sigma) = \int_a^b \sqrt{(1+(\partial_u f)^2)(\sigma_1'(t))^2 + 2\partial_u f \partial_v f \sigma_1'(t)\sigma_2'(t) + (1+(\partial_v f)^2)(\sigma_2'(t))^2} dt$$

5.2 Area

- Sia $\phi : U \to S$ una carta locale, coordinate locali $\mathbf{u} = (u, v)$.
- Sia R un piccolo rettangolo in U avente lati di lunghezza $\triangle u$ e $\triangle v$, e quindi un'area di $\triangle u \triangle v$.
- Sia $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \in U$. In un intorno molto piccolo di $\phi(\mathbf{u}_0)$, la superficie S può essere approssimata dal piano tangente passante per $\phi(\mathbf{u}_0)$, e la funzione $\phi(\mathbf{u})$ può essere approssimata dalla funzione $d\phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$. Sia R un piccolo rettangolo in U basato a $\mathbf{u}_0$ avente lati $\triangle u \mathbf{e}_1$ e $\triangle v \mathbf{e}_2$. L'area di $\phi(R)$ può essere approssimata dall'area del parallelogramma generato dai due vettori

$$\begin{aligned} d\phi_{\mathbf{u}_0}(\triangle u \mathbf{e}_1) &= \triangle u d\phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{e}_1) = \triangle u \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) \\ d\phi_{\mathbf{u}_0}(\triangle v \mathbf{e}_2) &= \triangle v d\phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{e}_2) = \triangle v \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Quindi $area(\phi(R)) \cong area(d\phi_{(u,v)}(R)) = \|\triangle u \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \triangle v \frac{\partial \phi}{\partial v}\| = \triangle u \triangle v \|\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}\| = area(R)\|\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}\|$.

Quindi, se U è una regione in $\mathbb{R}^2$ contenuta in una carta locale, l'area di $\phi(U)$ è il limite

$$\begin{aligned} Area(\phi(U)) = \lim_{\delta_1, \delta_2 \to 0} \sum_{i,j} area(d\phi(R_{i,j})) &= \lim_{\triangle u, \triangle v \to 0} \sum_{i,j} \|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\| \triangle u \triangle v \\ &= \iint_U \|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\| du\, dv. \end{aligned}$$

dove $\bigcup_{i,j} R_{i,j}$ è una sottodivisione di U in piccoli rettangoli aventi lati di lunghezze $\triangle u, \triangle v$.

Per la formula $\|a \times b\|^2 + |a \cdot b|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$ abbiamo $\|a \times b\| = \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - |a \cdot b|^2}$ percui

$$\begin{aligned} Area(\phi(U)) &= \iint_U \sqrt{\|\partial_u \phi\|^2 \|\partial_v \phi\|^2 - |\partial_u \phi \cdot \partial_v \phi|^2} du\, dv \\ &= \iint_U \sqrt{EG - F^2} du\, dv. \end{aligned}$$

6 Isometrie locali, isometrie

Siano S_1 e S_2 superfici regolari, e $F : S_1 \to S_2$ una funzione differenziabile tra loro. Data una carta locale in S_1, e una carta locale (U_2, ϕ_2) in S_2 tale che $F^{-1}(U_2) \supset U_1$, abbiamo la funzione $\phi : U_1 \to S_1$ e la funzione $F \circ \phi : U_1 \to S_2$.

Definizione. *La funzione F si dice una* isometria locale *se la prima forma fondamentale $I_{(u,v)}(\mathbf{w})$ definita rispetto a $\phi : U_1 \to S_1$ è uguale alla prima forma fondamentale $I_{(u,v)}(\mathbf{w})$ definita rispetto a $F \circ \phi : U_1 \to S_2$.*

Quindi, F è una isometria locale se e solo se $d\phi^T d\phi = d(F \circ \phi)^T d(F \circ \phi)$.

Definizione. *La funzione F si dice una isometria se F è un'omeomorfismo e anche una isometria locale.*

Esempio. La mappa $F : (x, 0, z) \to (\cos x, \sin x, z)$ è un'applicazione dal piano xz al cilindro di raggio unitario centrato all'asse z. Non è un'omeomorfismo (perchè non è biunivoca) ma è una isometria locale:

$$d\phi^T d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d(F \circ \phi)^T d(F \circ \phi) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Superfici orientate

Definizione. *La superficie S si dice orientabile se esiste un'applicazione differenziabile $\mathbf{n} : S \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{n}(p) \perp T_pS$ ad ogni $p \in S$, e $\|\mathbf{n}(p)\| = 1$ per ogni $p \in S$.*

Visto che $\|\mathbf{n}(p)\| = 1$ per ogni p, $\mathbf{n}$ è infatti una mappa da S a S^2 (perchè la sfera S^2 è l'insieme dei vettori unitari in $\mathbb{R}^3$.)

Definizione. *Una mappa $\mathbf{n} : S \to S^2$ tale che $\mathbf{n}(p) \perp T_pS$ per ogni $p \in s$ è detta una* mappa di Gauss *per S.*

Poichè ad ogni punto $p \in S$ esistono esattamente due versori normali al piano T_pS, in direzioni opposti, se S è orientabile esistono esattamente 2 possibili mappe di Gauss.

Esempio. La sfera è orientabile; le due mappe di Gauss corrispondono alla normale uscente, o la normale entrante.

Esempio. Il nastro di Möbius non è orientabile.

8 Curvatura

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e orientata con la mappa di Gauss $\mathbf{n} : S \to S^2$.

Consideriamo il differenziale $d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_{\mathbf{n}(p)}S^2$.

Lemma 8.0.1. *Il piano T_pS è uguale al piano $T_{\mathbf{n}(p)}S^2R$. Quindi, $d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$, ossia $d\mathbf{n}_p$ è un'* endomorfismo *di T_pS.*

Dimostrazione. T_pS e $T_{\mathbf{n}(p)}S^2$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 2 (ossia sono piani passanti per l'origine $(0, 0, 0$ di $\mathbb{R}^3)$. Percui è sufficiente dimostrare che hanno la stessa normale. Per definizione il vettore $\mathbf{n}(p)$ è normale al piano T_pS. Ma $\mathbf{n}(p)$ è anche normale al piano $T_{\mathbf{n}(p)}S^2$, perchè per qualsiasi $(x, y, z) \in S^2$, (x, y, z) è normale al piano tangente $T_{(x,y,z)}S^2$. □

Lemma 8.0.2. $d\mathbf{n}_p : T_p \to T_p$ *è* simmetrico *rispetto al prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$, cioè*

$$\langle d\mathbf{n}_p\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n}_p\mathbf{w}\rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS.$$

Dimostrazione. Per linearità è sufficiente verificare l'uguaglianza per i vettori di una base di T_pS. Cioè data una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di T_pS, basta verificare le quattro uguaglianze

$$\langle \mathbf{v}_1, d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_1\rangle = \langle d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle \tag{1}$$
$$\langle \mathbf{v}_1, d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_2\rangle = \langle d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \tag{2}$$
$$\langle \mathbf{v}_2, d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_1\rangle = \langle d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\rangle \tag{3}$$
$$\langle \mathbf{v}_2, d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_2\rangle = \langle d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle. \tag{4}$$

(1) e (4) seguono per la simmetria del prodotto $\langle , \rangle$. E (2) e (3) sono la stessa uguaglianza (sempre per simmetria). Quindi l'unica uguaglianza da verificare è (2).

Fissata una carta locale (U,ϕ) in p, abbiamo la base $\{\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v}\}$ di T_pS.
Allora,

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\partial\phi}{\partial u},\mathbf{n}(\phi(u,v))\rangle = 0 &\overset{\frac{\partial}{\partial v}}{\Longrightarrow} \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u},\mathbf{n}(\phi(u,v))\rangle + \langle\frac{\partial\phi}{\partial u},d\mathbf{n}_p\frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle = 0\\
\langle\frac{\partial\phi}{\partial v},\mathbf{n}(\phi(u,v))\rangle = 0 &\overset{\frac{\partial}{\partial u}}{\Longrightarrow} \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v},\mathbf{n}(\phi(u,v))\rangle + \langle\frac{\partial\phi}{\partial u},d\mathbf{n}_p\frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = 0
\end{aligned}$$

Dato che $\phi: U\to\mathbb{R}^3$ è di classe C^∞ abbiamo $\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u}=\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}$, perciò $\langle\frac{\partial\phi}{\partial u},d\mathbf{n}_p\frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle=\langle\frac{\partial\phi}{\partial u},d\mathbf{n}_p\frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle$. □

8.1 La seconda forma fondamentale

Definizione. *La seconda forma fondamentale è l'applicazione*

$$\mathrm{II}_p\,\mathbf{v}=\langle\mathbf{v},-d\mathbf{n}_p\mathbf{v}\rangle\quad\forall\ \mathbf{v}\in T_pS.$$

Sia (U,ϕ) una carta locale di S, coordinate locali (u,v).

$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

$d\phi_{(u,v)}\mathbf{w}=w_1\frac{\partial\phi}{\partial u}+w_2\frac{\partial\phi}{\partial v}$.

$\mathbf{n}\circ\phi: U\to S^2$.

La seconda forma fondamentale nella carta locale è

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{(u,v)}(\mathbf{w}) &= \langle d\phi_{(u,v)}\mathbf{w},-dn_{\phi(u,v)}d\phi\mathbf{w}\rangle\\
&= -\mathbf{w}^T d\phi^T_{(u,v)}d(n\circ\phi)_{(u,v)}\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

La matrice $-d\phi^T_{(u,v)}d(n\circ\phi)_{(u,v)}$ è simmetrica, indichiamo le sue entrate con $\begin{pmatrix} L & M\\ M & N\end{pmatrix}$.

Ponendo $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\end{bmatrix}$, possiamo anche esprimere la seconda forma fondamentale come una forma quadratica,

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(w_1,w_2)=Lw_1^2+2Mw_1w_2+Nw_2^2.$$

Per definizione, quindi,

$$\begin{aligned}
L&=-\langle\partial_u\phi,\partial_u n\rangle\\
M&=-\langle\partial_u\phi,\partial_v n\rangle\\
N&=-\langle\partial_v\phi,\partial_v n\rangle.
\end{aligned}$$

8.2 La curvatura normale

Sia $\sigma(s)$ una curva parametrizzata risp. alla lunghezza d'arco, e sia $\mathbf{n}: S\to S^2$ una mappa di Gauss. Ricordiamo che $\ddot\sigma(s)=\kappa(s)N(s)$ dove $\kappa(s)$ è la curvatura e $N(s)$ il versore normale alla curva σ. Il versore normale $N(s)$ alla curva è ortogonale al versore tangente $\dot\sigma(s)=T(s)$, ossia $\ddot\sigma(s)$ è contenuto nel piano ortogonale a $\dot\sigma(s)$. Una base ortonormale di questo piano è $\mathbf{n}(\sigma(s))$ e $\mathbf{n}(\sigma(s))\times T(s)$. Poniamo $\mathbf{n}_g(s):=\mathbf{n}(\sigma(s))\times T(s)$. Quindi $\ddot\sigma(s)$ è una combinazione lineare di $\mathbf{n}(\sigma(s))$ e $\mathbf{n}_g(s)$, ossia

$$\kappa(s)N(s)=\ddot\sigma(s)=\kappa_g(s)\mathbf{n}_g(s)+\kappa_n(s)\mathbf{n}(\sigma(s))$$

con $\kappa(s)=\sqrt{\kappa_g(s)^2+\kappa_n(s)^2}$.

Definizione. *La* curvatura normale *di σ in $p=\sigma(s)$ è la quantità*

$$\kappa_n(s)=\langle\ddot\sigma(s),\mathbf{n}(\sigma(s))\rangle.$$

Lemma 8.2.1. *La curvatura normale di S in $p \in S$, nella direzione $\mathbf{v} \in T_pS$, per un vettore unitario $\|\mathbf{v}\| = 1$ è*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \mathrm{II}_p(\mathbf{v})$$

Più in generale, se $\mathbf{v}$ non è unitario,

$$\kappa_n(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}) = \frac{\mathrm{II}_p(\mathbf{v})}{I_p(\mathbf{v})}.$$

Una conseguenza è :

Teorema 8.2.2 (Teorema di Meusnier)**.** *La curvatura normale in p è uguale per tutte le curve passanti per p aventi lo stesso versore tangente in p.*

Esempio. Cilindro di raggio r, carta locale $\phi(\theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, normale uscente $\mathbf{n}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

$$d\phi_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d(n\circ\phi)_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\phi^T_{(\theta,z)} d\phi_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d\phi^T_{(\theta,z)} d(n\circ\phi)_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prima e seconda forme fondamentali:

$$\begin{aligned} I_{(\theta,z)}(w_1, w_2) &= r^2 w_1^2 + w_2^2 \\ \mathrm{II}_{(\theta,z)}(w_1, w_2) &= -r w_1^2. \end{aligned}$$

8.3 Altre formule per L, M, N

Dato che $\langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_u\phi\rangle = 0 = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_v\phi\rangle$, se prendiamo le derivate risp. a u e v otteniamo

$$\langle d\mathbf{n}\partial_u\phi, \partial_u\phi\rangle + \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{uu}\phi\rangle = 0$$
$$\langle d\mathbf{n}\partial_v\phi, \partial_u\phi\rangle + \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vu}\phi\rangle = 0$$
$$\langle d\mathbf{n}\partial_v\phi, \partial_v\phi\rangle + \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vv}\phi\rangle = 0$$

Dato che $\partial_u\phi = d\phi e_1, \partial_v\phi = d\phi e_2$, abbiamo

$$-\langle d\mathbf{n}d\phi e_1, d\phi e_1\rangle = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{uu}\phi\rangle$$
$$-\langle d\mathbf{n}d\phi e_2, d\phi e_1\rangle = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vu}\phi\rangle$$
$$-\langle d\mathbf{n}d\phi e_2, d\phi e_2\rangle = \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vv}\phi\rangle.$$

Quindi

$$\begin{aligned} L &= \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{uu}\phi\rangle, \\ M &= \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vu}\phi\rangle, \\ N &= \langle \mathbf{n}(\phi(u,v)), \partial_{vv}\phi\rangle \end{aligned}$$

Esempio. Graph of a function: $f : U \to \mathbb{R}$, and $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$. For the Gauss map we can use $\mathbf{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\|}$. Given that $\partial_u\phi = (1, 0, f_u), \partial_v\phi = (0, 1, f_v)$, we have $\partial_u\phi \times \partial_\phi = (-f_u, -f_v, 1)$, we see that $\mathbf{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}\begin{bmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{bmatrix}$. Let's compute the second fundamental form:

$$L(u,v) = \langle \mathbf{n}(u,v), \partial_{uu}\phi\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u, -f_v, 1), (0, 0, f_{uu}(u,v))\rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}$$
$$M(u,v) = \langle \mathbf{n}(u,v), \partial_{uv}\phi\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u, -f_v, 1), (0, 0, f_{uv}(u,v))\rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}$$
$$N(u,v) = \langle \mathbf{n}(u,v), \partial_{vv}\phi\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u, -f_v, 1), (0, 0, f_{vv}(u,v))\rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}$$

Esempio. The graph of a paraboloid, $f(x,y) = x^2+y^2$. Let the Gauss map be $\mathbf{n}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(-2x,-2y,1)$. The second fundamental form is

$$\mathrm{II}_{(x,y)}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

with

$$L = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

Esempio. The graph of a hyperboloid, $f(x,y) = x^2-y^2$. Let the Gauss map be $\mathbf{n}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(-2x,2y,1)$. The second fundamental form is

$$\mathrm{II}_{(x,y)}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

with

$$L = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

8.4 Curvatura principale

- Siano (U,ϕ) una carta locale di S, $(u,v) \in U$, $p = \phi(u,v) \in S$.
- Una base per T_pS è $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$.
- Il differenziale $d\phi_{(u,v)}$ è l'isomorfismo lineare tra $\mathbb{R}^2$ e T_pS che manda la base standard $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ di $\mathbb{R}^2$ alla base $\{\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\}$ di T_pS.
- L'applicazione lineare $-d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$ corrisponde ad una applicazione lineare (=matrice) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$\begin{tikzcd} T_pS \arrow[r, "-d\mathbf{n}_p"] & T_pS \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\cong"', "d\phi"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\cong"', "d\phi"] \end{tikzcd}$$

  L'applicazione A deve soddisfare $d\phi \circ A = -d\mathbf{n}_p \circ d\phi$.

$$\begin{aligned} d\phi A &= d\mathbf{n} d\phi \\ \Longrightarrow d\phi^T d\phi A &= d\phi^T d\mathbf{n} d\phi \quad \text{moltiplicando per } d\phi^T \\ \Longrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Poichè la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è invertibile, vediamo che

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad \text{ossia, per la formula dell'inversa di una matrice 2x2,} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Abbiamo mostrato che $-d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$ è simmetrica rispetto al prodotto scalare. Le mappe lineari simmetriche sono speciali: il teorema spettrale di algebra lineare dice che se V è uno spazio vettoriale di dimensione k munito di un prodotto interno $\langle , \rangle$, e $M : V \to V$ è un'applicazione lineare che è anche *simmetrica* rispetto al prodotto interno (cioè $\langle \mathbf{v}, M\mathbf{w} \rangle = \langle M\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$), allora esiste *una base ortornormale* di V consistente di *autovettori* di M.

- Quindi, esiste una base ortonormale di T_pS consistente di autovettori di $-d\mathbf{n}_p$. Indichiamo gli autovettori di $-d\mathbf{n}_p$ con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Indichiamo gli autovalori con λ_1, λ_2.
- Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$ i vettori determinati da $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $d\phi_{(u,v)}\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$. Allora $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ sono autovettori di A, aventi gli stessi autovalori λ_1, λ_2.

Quindi,

- gli autovalori di $-d\mathbf{n}_p$ sono esattamente gli autovalori di A
- si calcolano gli autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $-d\mathbf{n}_p$ calcolando gli autovettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ di A e ponendo $\mathbf{v}_i = d\phi\mathbf{w}_i$

Definizione. *Gli autovalori $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ sono detti le* curvature principali *di S in p. Gli autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono detti le direzioni principali di S in p.*

Gli autovalori sono detti le curvature principali per via della seguente interpretazione degli autovalori. Per il teorema spettrale esiste una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di T_pS dove $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di $-d\mathbf{n}_p$. Qualsiasi vettore unitario $\mathbf{v} \in T_pS$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ può essere espresso come

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, \quad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Abbiamo già visto che la seconda forma fondamentale $\mathrm{II}_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}\rangle$ per un vettore unitario $\mathbf{v}$ è uguale alla curvatura della sezione normale di S in p nella direzione $\mathbf{v}$. Dato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di $-d\mathbf{n}_p$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}\rangle &= \langle a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, (-d\mathbf{n}_p)(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2)\rangle \\
&= \langle a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2)\rangle \\
&= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2
\end{aligned}$$

Senza perdità di generalità supponiamo che $\lambda_1 \leq \lambda_2$, percui

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \leq &\quad \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 &\leq \lambda_2 \\
\implies \langle \mathbf{v}_1, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_1\rangle \leq &\quad \langle \mathbf{v}, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}\rangle &\leq \langle \mathbf{v}_2, -d\mathbf{n}_p\mathbf{v}_2\rangle
\end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_pS$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, ossia

$$\lambda_1 = \min_{\|v\|=1} \langle v, -dn_p v\rangle = \text{minima curvatura normale in } p$$
$$\lambda_2 = \min_{\|v\|=1} \langle v, -dn_p v\rangle = \text{massima curvatura normale in } p$$

NOTA BENE: La matrice A che abbiamo definita sopra rappresenta l'applicazione lineare $-d\mathbf{n}_p$ rispetto alla base $\{\phi_u, \phi_v\}$ di T_pS. Nel libro di testo la matrice A rappresenta l'applicazione $d\mathbf{n}_p$. Quindi la nostra matrice A corrisponde a $-A$ nel libro di testo.

8.5 Curvatura Gaussiana e curvatura media

Definizione. *$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientata, $N : S \to S^2$ mappa di Gauss.*

1. *La* curvatura Gaussiana *di S è la funzione $K : S \to \mathbb{R}$ data da*

$$K(\mathbf{p}) := \lambda_1(p)\lambda_2(p) = \det A \quad \forall\ \mathbf{p} \in S.$$

2. *La* curvatura media *è la funzione $H : S \to \mathbb{R}$ data da*

$$H(\mathbf{p}) = \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2} = \frac{\operatorname{tr} A}{2} \quad \forall\ \mathbf{p} \in S.$$

NOTA BENE: Nel libro di testo la curvatura gaussiana è definita come $\det A$ e la curvatura media come $H = \frac{-\operatorname{tr} A}{2}$. Si ricorda che la A del libro di testo corrisponde a $-A$ nella nostra convenzione. Dato che $\det A = \det(-A)$ per una matrice 2×2, e $\operatorname{tr}(-A) = -\operatorname{tr} A$, le nostre definizioni di curvatura gaussiana e curvatura media sono infatti uguali a quelle del libro.

8.6 Rapporto tra aree infinitesimali

Sia $R \subset S$ una piccola regione rettangolare in S contenente il punto p. Il valore assoluto della curvatura gaussiana di S in p può essere interpretata come un rapporto tra aree infinitesimali:

$$|K(p)| = \lim_{\text{Area}(R)\to 0} \frac{\text{Area}(\mathbf{n}(R))}{\text{Area}(R)}$$

Questo è perchè nel limite infinitesimale tutto si approssima linearmente, quindi il limite del rapporto è uguale al rapporto tra l'area di un rettangolo nel piano tangente T_pS, e l'area dell'immagine del rettangolo tramite l'applicazione lineare $d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_{\mathbf{n}(p)}S^2$. Se consideriamo un piccolo rettangolo in T_pS i cui lati sono paralleli agli autovettori di $d\mathbf{n}_p$ (ricordiamoci che gli autovettori sono ortogonali), l'area del rettangolo è il prodotto delle lunghezze dei lati. Indichiamo le due lunghezze dei lati con δ_1 e δ_2, percui l'area è $\delta_1\delta_2$. L'immagine di questo rettangolo tramite $d\mathbf{n}_p$ rimarrà un rettangolo avente lati paralleli agli autovettori, ma le lunghezze dei lati saranno $\delta_1|\lambda_1|$ e $\delta_2|\lambda_2|$ dove λ_i sono gli autovalori. Quindi l'area dell'immagine del rettangolo tramite $d\mathbf{n}_p$ è $|\lambda_1||\lambda_2|\delta_1\delta_2 = |K|\delta_1\delta_2$. Il rapporto tra le due aree è quindi $|K|\delta_1\delta_2/\delta_1\delta_2 = |K|$.

9 *Teorema Egregium* di Gauss

La curvatura gaussiana K è stata definita come il prodotto delle curvature principali. Le curvature principali dipendono dalla seconda forma fondamentale e dalla prima forma fondamentale. Un teorema sorprendente è il *Teorema Egregium* di Gauss che dimostra che la curvatura gaussiana *non* dipende dalla seconda forma fondamentale − dipende solo dalla prima forma fondamentale.

Teorema 9.0.1 (Theorema Egregium di Gauss)**.** *La curvatura gaussiana di una superficie regolare dipende* soltanto dalla prima forma fondamentale. *In particolare,*

- *se $F : S_1 \to S_2$ è una isometria locale, allora la curvatura gaussiana in $p \in S_1$ è uguale alla curvatura gaussiana in $F(p) \in S_2$;*
- *se due superfici hanno diverse curvature gaussiane, non possono essere localmente isometriche.*

Esempio. Una fetta di pizza è piana, e il piano ha curvatura gaussiana 0. Quando pieghiamo una fetta di pizza, diventa rigida nella direzione ortogonale alla piegatura (quindi più facile da mangiare). Piegare la fetta di pizza è una isometria che rende positiva (o negativa) la curvatura principale in una direzione. La direzione ortogonale alla piegatura è l'altra direzione principale ed è costretta ad avere curvatura zero per non cambiare la curvatura gaussiana 0. Quindi la sezione normale ortogonale alla direzione della piegatura deve essere una retta (l'unica curva avente curvatura 0 è una retta).

Esempio. Una mappa del mondo è una proiezione della superficie della Terra nel piano. La curvatura Gaussiana di una sfera è positiva, mentre la curvatura gaussiana del piano è 0. Per il teorema egregium nessuna applicazione dalla sfera al piano è una isometria locale. Quindi ogni mappa piana del mondo distorce lunghezze ed aree. Ad esempio la proiezione di Mercator distorce le aree lontane dall'equatore, e fa sembrare che l'isola di Greenland sia più grande del continente di Australia.

Dimostrazione. Per risparmiare spazio scriveremo φ_u per $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, e φ_{uv} per $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$, ecc.

Sia $\phi : U \to S$ una carta locale di S, e sia $\mathbf{n} : S \to S^2$ una mappa di Gauss. Allora, ad ogni $p = \varphi(u, v) \in S$, abbiamo che $\varphi_u, \varphi_v, \mathbf{n}_p$ sono tre vettori linearmente indipendenti, quindi formano una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo i vettori $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv} \in \mathbb{R}^3$. Possiamo esprimerli come combinazioni lineari dei vettori della base:

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1\mathbf{n} \\
\varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + L_2\mathbf{n} \\
\varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_3\mathbf{n}.
\end{aligned}$$

I coefficienti Γ_{ij}^k sono detti i *simboli di Christoffel* della parametrizzazione (U, φ).
Adesso cerchiamo espressioni per tutti i coefficienti, in termini delle funzioni E, F, G della prima forma fondamentale e L, M, N della seconda forma fondamentale. Poichè $\mathbf{n} \perp T_pS$, vediamo che

$$\begin{aligned}
\underbrace{\langle \varphi_{uu}, \mathbf{n} \rangle}_{=L} &= \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = L_1 \implies L = L_1 \\
\underbrace{\langle \varphi_{uv}, \mathbf{n} \rangle}_{=M} &= \langle \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + L_2 \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = L_2 \implies M = L_2 \\
\underbrace{\langle \varphi_{vv}, \mathbf{n} \rangle}_{=N} &= \langle \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = L_3 \implies N = L_3
\end{aligned}$$

Poi per trovare espressioni per i simboli di Christoffel, prendiamo il prodotto scalare delle stesse equazioni con φ_u e φ_v. Vediamo cosa succede per l'equazione di φ_{uu}:

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 \mathbf{n} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$
$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 \mathbf{n} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

Analogamente, per φ_{uv} abbiamo

$$\langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F$$
$$\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G$$

e per φ_{vv} risulta che

$$\langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F$$
$$\langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G.$$

I prodotti $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle, \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle$ ecc. si esprimono in termini delle *derivate* di E, F, G:

$$\begin{aligned}
E_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \phi_u \rangle = 2 \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &\implies \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\
E_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2 \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle &\implies \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\
G_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2 \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle &\implies \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\
G_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2 \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle &\implies \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \\
F_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle &\implies \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\
F_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_{vu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle &\implies \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u.
\end{aligned}$$

Quindi le 6 equazioni che coinvolgono i simboli di Christoffel sono

$$\frac{1}{2} E_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$
$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} E_v &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\
\frac{1}{2} G_u &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_v - \frac{1}{2} G_u &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\
\frac{1}{2} G_v &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G.
\end{aligned}$$

Ogni paio di equazioni è un sistema di equazioni lineari:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_u \\ 2F_u - E_v \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_v \\ G_u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2F_v - G_u \\ G_v \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Poichè la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è positiva definita, è invertibile, quindi moltiplicando le equazioni per $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$ troviamo che *i simboli di Christoffel sono funzioni di* E, F, G *e le loro derivate.* Cioè dato che l'inversa di $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è la matrice $\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_u \\ 2F_u - E_v \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_v \\ G_u \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2F_v - G_u \\ G_v \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Adesso, consideriamo l'identità $\varphi_{uuv} = \varphi_{uvu}$ (che segue dall'uguaglianza delle derivate parziali miste). Tornando alle equazioni iniziali, vediamo che

$$\begin{aligned}
\varphi_{uuv} &= (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^1\varphi_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + \Gamma_{11}^2\varphi_{vv} + L_v\mathbf{n} + L\mathbf{n}_v \\
\varphi_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u + \Gamma_{12}^1\varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v + \Gamma_{12}^2\varphi_{vu} + M_u\mathbf{n} + M\mathbf{n}_u
\end{aligned}$$

Ricordiamo che la matrice $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ rappresenta la mappa lineare $-d\mathbf{n}_p : T_pS \to T_pS$ rispetto alla base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Cioè se poniamo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, la prima colonna rappresenta l'identità $-\mathbf{n}_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$, e la seconda colonna $-\mathbf{n}_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$.

I coefficienti di φ_v devono essere pari, percui:

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{21}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{21}^2 - La_{22} = \Gamma_{21}^1\Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{21}^2)_u + \Gamma_{21}^2\Gamma_{21}^2 - Ma_{21}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
Ma_{21} - La_{22} &= \text{(funzione dei simboli di Christoffel e le loro derivate)} \\
&= \text{(funzione di } E, F, G \text{ e le loro prime e seconde derivate)}
\end{aligned}$$

Ora sostituendo $a_{21} = \frac{-FL+EM}{EG-F^2}$ e $a_{22} = \frac{-FM+EN}{EG-F^2}$ (dalla formula per A), abbiamo

$$Ma_{21} - La_{22} = M\frac{-FL+EM}{EG-F^2} - L\frac{-FM+EN}{EG-F^2} = \frac{EM^2 - ELN}{EG-F^2} = -E\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -EK,$$

perciò

$$-EK = \text{(funzione di } E, F, G \text{ e le loro derivate e seconde derivate)},$$

e siccome $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \neq 0$, possiamo dividere per $-E$ percui

$$\begin{aligned}
K &= \text{(funzione di } E, F, G \text{ e le loro derivate e seconde derivate)}/E \\
&= \text{(funzione di } E, F, G \text{ e le loro derivate e seconde derivate)}.
\end{aligned}$$

□

10 Esercizi

Esercizio 1. *Sia $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare piana semplice e chiusa con velocità unitaria. Siano $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa$ i dati di Frenet di γ. Sia $R > 0$ un numero reale fissato tale che $R < \frac{1}{\kappa(s)}$ per ogni $s \in [0,T]$. Sia $f : [0,T] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da*

$$f(s,\theta) = \gamma(s) + R(\cos\theta \mathbf{N}(s) + \sin\theta \mathbf{B}(s))$$

e sia S la superficie parametrizzata da f.

1. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n}$ per S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana K di S.*
5. *Calcolare le curvature principali di S.*
6. *Sia $S_+ \subset S$ il sottoinsieme di S dove la curvatura gaussiana $K > 0$. Calcolare $\iint_{S_+} K dS$.*

Esercizio 2. *Poniamo*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 < z < 1\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2, z > 0\},$$

e $h : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ un'applicazione differenziabile strettamente crescente. Sia $\Phi : S \to C$ l'applicazione definita da

$$\Phi(x,y,z) = h(z)\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, 1\right)$$

1. *Far vedere che Φ è un'applicazione differenziabile.*
2. *È possibile determinare la funzione h in modo che l'applicazione Φ trasformi i meridiani di S in curve di lunghezza finita su C?*
3. *È possibile determinare la funzione h in modo che Φ sia una isometria locale?*

Esercizio 3. *Sia $g : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione di classe C^∞. Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ una regione compatta. Dimostrare che l'area del grafico di g sopra la regione R è data da*

$$\iint_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dxdy$$

Esercizio 4. *Sia $S = \{(x,y,xy) | x,y \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Dimostrare che S è una superficie regolare.*
2. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana di S.*
5. *Trovare le curve su S che hanno la curvatura normale nulla in ciascun punto.*

Esercizio 5. *Sia α una curva regolare nel piano xz. Sia S la superficie di revoluzione generata ruotando α intorno all'asse z. Supponiamo che $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. (Quindi $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$). La matrice che rappresenta rotazione attorno all'asse z per l'angolo θ è*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

percui S ha una parametrizzazione

$$\varphi(s,\theta) = R_\theta\alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)x(s) \\ \sin(\theta)x(s) \\ z(s) \end{bmatrix}$$

Fissato θ, la curva $\{R_\theta\alpha(s)|s \in [a,b]\}$ che è l'immagine di α tramite la rotazione R_θ si dice un meridiano *di S. Fissato $s \in [a,b]$, la circonferenza $\{R_\theta\alpha(s)|\theta \in [0,2\pi]\}$ si dice* un parallelo *di S.*

1. *Trovare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n} : S \to S^2$.*
3. *Trovare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Mostrare che una direzione principale è tangente al parallelo passante per p, e l'altra direzione principale in p è tangente al meridiano passante per p.*
5. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = \varphi(s,\theta)$ è $K = \frac{\ddot{x}(s)}{x(s)}$.*

Esercizio 6. *Sia S il grafico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$. Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = (x,y,f(x,y))$ è*

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

dove $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ecc.

Il numeratore è il determinante della matrice hessiana *di f, che è la matrice $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.*

Esercizio 7. *Siano $S_1 = \{(u\cos v, u\sin v, \ln u)|u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(u\cos v, u\sin v, v)|u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ due superfici parametrizzate.*

1. *Mostrare che la mappa $\Phi : S_1 \to S_2$ data da $\Phi(u\cos v, u\sin v, \ln u) = (u\cos v, u\sin v, v)$ è localmente un diffeomorfismo.*
2. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S_2 in $\varphi_2(u,v)$ è uguale alla curvatura Gaussiana di S_1 in $\varphi_1(u,v)$.*
3. *Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0,2\pi] \to S_1$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.*
4. *Calcolare la lunghezza della curva $\Phi \circ \gamma : [0,2\pi] \to S_2$ data da $\Phi \circ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.*
5. *Dimostrare che Φ non è un'isometria. (Suggerimento: Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0,2\pi] \to S_1$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, poi calcolare la lunghezza della curva $\Phi \circ \gamma : [0,2\pi] \to S_2$ data da $\Phi \circ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Se non sono pari, Φ non può essere un'isometria!) Quindi, la conversa del teorema egregium non vale.*

Esercizio 8. *Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia C_t il cerchio di centro $\gamma(u)$ e raggio 1 sul piano per $\gamma(u)$ parallelo al piano (y,z). Poniamo

$$S = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} C_t$$

1. *Trovare una parametrizzazione di S e discuterne la regolarità.*
2. *Trovare un polinomio $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $S = F^{-1}(0)$.*
3. *È vero o falso che S è una superficie liscia?*
4. *Calcolare la curvatura normale di C_0 considerata come curva su S.*

Esercizio 9. *Sia $U = (0,\infty) \times (0,2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Si consideri la parametrizzazione $f : U \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u).$$

1. *Trovare una isometria di S (con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$) su una regione del piano euclideo.*
2. *Calcolare curvature e direzioni principali di f.*

A Derivate, differenziali

- Sia $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ una funzione di classe C^∞. Tale funzione significa una collezione $F_1, \ldots, F_l$ di funzioni di classe C^∞ $F_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Cioè $F(x_1, \ldots, x_k) = (F_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, F_l(x_1, \ldots, x_k))$.
- Il differenziale (o matrice jacobiana) di F al punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ è la matrice

$$dF_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

  Cioè le colonne di $dF_{\mathbf{x}}$ sono le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_k}$.
- Date funzioni $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ e $G : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, la loro composizione è $G \circ F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Segue per la regola di catena che $d(G \circ F)_{(x,y)} = dG_{F(x,y)}\, dF_{(x,y)}$.

Esempio. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $F(x,y) = (xy, x^2, y^2)$, e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $G(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z, 2yz)$, allora $G \circ F(x,y) = ((xy)^2 + (x^2)^2 - y^2, 2x^2y^2) = (x^2y^2 + x^4 - y^2, 2x^2y^2)$

$$\begin{aligned} dF_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ dG_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix} \\ d(G \circ F)_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4x^3 & 2x^2y - 2y \\ 4xy^2 & 4x^2y \end{pmatrix} \\ dG_{F(x,y)} dF_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} 2xy & 2x^2 & -1 \\ 0 & 2y^2 & 2x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4x^3 & 2x^2y - 2y \\ 4xy^2 & 4x^2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B Autovalori, determinante, traccia

- Sia $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice. Gli *autovalori* della matrice sono gli zeri del *polinomio caratteristico*, cioè le soluzioni di

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

- Dato che $\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$, per la formula per le radici di un'equazione quadratica, abbiamo

$$\lambda_\pm = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

- Ponendo $\operatorname{tr} A = a + d, \det A = ad - bc$, possiamo anche scrivere

$$\lambda_\pm = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

- Quindi, la somma degli autovalori è

$$\lambda_+ + \lambda_- = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} + \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} = \operatorname{tr} A$$

  e il prodotto degli autovalori è

$$\lambda_+\lambda_- = \left(\frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}\right) = \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - ((\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A)}{4} = \det A.$$