Diario del corso di Analisi Matematica 2

G. Orlandi

a.a. 2009-10

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 5/10/09 (2 ore). Proprietà assiomatiche di una funzione distanza su un insieme: positività, simmetria, diseguaglianza triangolare. Spazi metrici. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ dotati della distanza euclidea. Topologia in uno spazio metrico (X, d): definizione di intorno sferico aperto (o palla aperta) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$: $B(x, r) = \{y \in X\,,\ d(x, y) < r\}$. Un insieme $A \subset X$ si dice aperto se $\forall\, x \in A\ \exists\, r > 0$ tale che $B(x, r) \subset A$.

Proprietà assiomatiche di una norma su uno spazio vettoriale: positività, positiva 1-omogeneità, disuguaglianza triangolare. Esempi: il valore asoluto su $\mathbb{R}$, la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma ℓ_∞ su $\mathbb{R}^n$: per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_i|\,,\ i = 1, ..., n.\}$. Defnizione di norma ℓ^1 su $\mathbb{R}^n$: $||x||_{\ell^1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Una norma $||\cdot||$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V definita da $d(x, y) = ||x - y||$ per $x, y \in V$. Due norme su V si dicono *equivalenti* se le distanze associate inducono la stessa topologia su V. In $\mathbb{R}^n$ (o in uno spazio vettoriale normato finito dimensionale) *tutte* le norme sono equivalenti.

Se V è uno spazio euclideo, dotato cioè di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, quest'ultimo definisce una norma (detta norma euclidea) $||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$.

Lo spazio vettoriale $C^0(I; \mathbb{R})$ delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ continue e limitate su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ può essere dotato della norma ℓ^∞ (detta norma della convergenza uniforme) definita da $||f||_{\ell^\infty} = \sup\{|f(t)|\,,\ t \in I\}$. Se poi $I = [a, b]$, si può definire su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ la norma ℓ^1 (detta norma della convergenza in media) ponendo $||f||_{\ell^1} = \int_a^b |f(t)|dt$.

Lezione del 7/10/09 (2 ore). Definizione di norma ℓ^2 su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$:

$$||f||_{\ell^2} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Si tratta di una norma euclidea, indotta dal prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$, definito per $f,g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$. Questa norma è spesso usata in problemi di minima distanza (cfr. *metodo dei minimi quadrati*).

Esempi di calcolo di distanze nella norma ℓ^1 ed ℓ^∞ su $C^0([a,b];\mathbb{R})$. Osservazione: se $||f-g||_\infty \le \delta$, il grafico di $g(x)$ è interamente contenuto, per $x \in [a,b]$, nella striscia di ampiezza 2δ attorno al grafico di f (e viceversa), ovvero l'insieme $\{(x,y)\,,\ a \le x \le b\,,\ f(x)-\delta < y < f(x)+\delta\ \}$.

Nozione di limite di successione in uno spazio metrico: dati $x_n, x_0 \in X$, si dice che $x_n \to x_0$ in X se $d(x_n,x_0) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione di funzione continua tra spazi metrici: $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $x \in B(x,\delta)$ implica $f(x) \in B(f(x_0),\epsilon)$, dove gli intorni sferici si intendono riferiti rispettivamente alla distanza su X e a quella su Y.

Caratterizzazione: $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ in X si ha $f(x_n) \to f(x_0)$ in Y.

Esempio: la funzione $F : C^0([a,b];\mathbb{R}) \to C^0([a,b];\mathbb{R})$ che associa ad f la sua funzione integrale $F(f)$ definita da $F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una funzione continua rispetto alla norma ℓ^∞. Infatti, si ha la seguente stima:

$$\begin{aligned}|F(f)(x)-F(g)(x)| = |F(f-g)(x)| &= |\int_a^x [f(t)-g(t)]\,dt| \\ &\le \int_a^x |f(t)-g(t)|dt \le \int_a^x ||f-g||_\infty dt \\ &\le ||f-g||_\infty \cdot (x-a) \qquad \forall\, a \le x \le b\,,\end{aligned}$$

da cui i ricava, passando al sup su $x \in [a,b]$ ad ambo i membri,

$$||F(f)-F(g)||_\infty \le (b-a)||f-g||_\infty\,,$$

da cui si deduce che se $||f-g||_\infty \to 0$, allora $||F(f)-F(g)||_\infty \to 0$. ovvero la continuità della funzione F.

Osservazione: $C^0([a,b];\mathbb{R})$ (e in genere gli spazi di funzioni che si considerano in analisi) è uno spazio vettoriale infinito dimensionale: infatti l'insieme delle funzioni $E = \{1,x,...,x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è linearmente indipendente $\forall\, n \in \mathbb{N}$, in quanto una combinazione lineare non nulla di elementi di E è un polinomio, che per il Teorema fondamentale dell'Algebra si annulla solo in un numero di punti inferiore o uguale ad n, e non può coincidere quindi con la funzione identicamente nulla su $[a,b]$.

Lezione del 9/10/09 (2 ore). Spazi metrici completi. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$, con la distanza euclidea (o una qualunque norma). Completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dotato della norma $||\cdot||_\infty$.

Dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{f_n\} \subset C^0([a,b];\mathbb{R})$, per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\ n_0$ tale che $\forall\, n,m > n_0$ $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. In particolare, per ogni $a \le x \le b$ si ha $|f_n(x)-f_m(x)| < \epsilon$, dunque $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\forall\ a \le x \le b$, ed è dunque convergente per la completezza di $\mathbb{R}$. Detto $f(x) = \lim_m f_m(x)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon \;\forall n > n_0$, $\forall\; a \le x \le b$. Passando al sup su $x \in [a,b]$ si ottiene $||f_n - f||_\infty \le \epsilon \;\forall n > n_0$, ovvero $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$. Resta da dimostrare la continuità di f: fissato $x_0 \in [a,b]$ sia$n > n_0$ fissato, e sia $\delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(x_0| < \epsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (tale δ esiste per la continuità di f_n). Allora, per ogni $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta$, si ha, per la diseguaglianza triangolare,

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \le 3\epsilon\,,$$

ovvero f è continua in x_0, per ogni $x_0 \in [a,b]$. In altre parole, $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ e $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$, ovvero la successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ rispetto alla norma ℓ^∞. □

Osservazione: sia $L^\infty(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\,,\; ||f||_\infty < +\infty\}$ lo spazio delle funzioni limitate, definite su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. La prima parte della dimostrazione della completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dimostra in realtà che $L^\infty(I;\mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞ è uno spazio metrico completo.

Definizione di convergenza uniforme: date $f, f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che le f_n convergono uniformemente ad f in I se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \equiv \lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} = 0\,.$$

Defininzione di convergenza puntuale: le f_n convergono puntualmente ad f in I se $\forall\, x \in I$, $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale, mentre il viceversa non è vero in generale. Esempio: la successione $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ converge puntualmente alla funzione f definita da $f(x) = 0$ se $0 \le x < 1$, $f(1) = 1$. Si ha

$$||f_n - f||_{\ell^\infty[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\le x<1} |x^n| = 1 \quad \forall\, n\,.$$

In particolare le f_n non convergono uniformemente ad f sull'intervallo $[0,1]$.

Alcune proprietà della convergenza uniforme: siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ tali che $||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} \to 0$ per $n \to +\infty$.

1) se le f_n sono continue, allora f è continua (vedasi dimostrazione completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

2) se $I = [a,b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).

Infatti, dall'esempio della lezione del 7/10/09 (continuità della trasformata integrale F) si deduce, ponendo $g = f_n$ ed $x = b$, che

$$|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt| \le (b-a) \cdot ||f_n - f||_{\ell^\infty([a,b])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Lezione del 12/10/09 (2 ore). Convergenza uniforme e derivazione: se $f_n \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ (ossia $f_n, f_n' \in C^0([a,b];\mathbb{R})$) e $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$, allora $g = f'$ su $[a,b]$.

Infatti, si ha $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$, ed il primo membro converge a $f(x) - f(a)$ per le ipotesi su f_n, mentre il secondo membro converge a $\int_a^b g(t)dt$ per la convergenza uniforme di f_n' su $[a,b]$ ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Nel caso delle serie di funzioni, cioè quando $f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$, $u_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, le proprietà precedenti si traducono come segue: date $u_k \in C^0([a,b];\mathbb{R})$, se la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$, allora converge ad una funzione continua. Inoltre, vale

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty u_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b u_k(t)dt \qquad \text{(integrazione per serie).}$$

Se inoltre $u_k \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ e $\sum_{k=0}^\infty u_k'(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ allora

$$\left(\sum_{k=0}^\infty u_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^\infty u_k'(x) \qquad \text{(derivazione per serie).}$$

Un criterio utile per la convergenza uniforme di una serie di funzioni è il criterio di convergenza totale (di Weierstrass). Lo enunciamo nel quadro più generale degli spazi normati.

Teorema della convergenza totale: sia $(X, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato completo. Sia $\{u_k\} \subset X$. Se la serie delle norme $\sum_{k=0}^\infty ||u_k||$ è convergente in $\mathbb{R}$, allora la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k$ è convergente in X, ovvero $\lim_n || \sum_{k=n}^\infty u_k|| = 0$.

Dimostrazione: detta $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la successione delle somme parziali, dimostriamo che $\{s_n\}$ è di Cauchy in X: si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$||s_n - s_m|| = || \sum_{k=n+1}^m u_k|| \le \sum_{k=n+1}^m ||u_k|| < \epsilon \quad \text{ per ogni } m > n > n_0\,,$$

dato che la successione $\sigma_n = \sum_{k=0}^n ||u_k||$ è di Cauchy per ipotesi, e $\sum_{k=n+1}^m ||u_k|| = \sigma_m - \sigma_n$. □

Applicazione alla convergenza delle serie di potenze. Sia $\sum_{k=0}^\infty a_n x^n$ una serie di potenze reali centrata in $x_0 = 0$, e sia $r > 0$ il suo raggio di convergenza. La serie converge uniformemente in $[-R,R]$ per ogni $0 < R < r$. Dimostrazione: si ha

$$\sum_{k=0}^\infty \sup_{|x|\le R} |a_k| \cdot |x|^k = \sum_{k=0}^\infty |a_k| R^k \ < +\infty\,,$$

poichè per il criterio della radice $\sqrt[k]{|a_k|R^k} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot R \to r^{-1}R < 1$. Si può dunque applicare il criterio di convergenza totale nello spazio $C^0([-R,R];\mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞. □

In particolare, per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie. Si può così calcolare ad esempio

$$\int_a^b e^{-x^2}dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b^{2k+1} - a^{2k+1})}{(2k+1)k!} .$$

Inoltre, dato che la serie delle derivate di una serie di potenze è a sua volta una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza, vale anche il teorema di derivazione per serie.

Lezione del 14/10/09 (2 ore). Il principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli): dato (X, d) spazio metrico completo, $T : X \to X$ una contrazione (ossia $\exists\, K < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq K \cdot d(x, y)\ \forall\, x, y \in X$), allora esiste un'unico punto fisso $\bar{x} \in X$ di T (ovvero un'unica soluzione $\bar{x}$ in X dell'equazione $x = T(x)$).

La dimostrazione è costruttiva, mediante uno schema iterativo, e fornisce anche una stima dell'errore. Sia $x_0 \in X$, definiamo per ricorrenza la successione $x_{n+1} = T(x_n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Due i casi: o $x_{n+1} = x_n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, e quindi $x_n = x_{n+1} = T(x_n)$ è punto fisso di T, oppure rimane definita una successione $\{x_n\} \subset X$, che risulta essere di Cauchy in X. Infatti, si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq K^n \cdot d(x_1, x_0)\,,$$

da cui si deduce che, per $m > n + 1 > n_0$, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1} K^j \cdot d(x_1, x_0) = K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-n-1} K^j \\ &\leq K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{\infty} K^j \leq K^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1-K} < \epsilon \end{aligned}$$

per n_0 sufficientemente grande, e per ogni $m > n + 1 > n_0$, ovvero $\{x_n\}$ è di Cauchy in X. Sia $\lim_m x_m = \bar{x} \in X$ per la completezza di X.

Passando al limite per $m \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene la stima dell'errore $d(\bar{x}, x_n) \leq K^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-K}$. Inoltre, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione di ricorrenza $x_{n+1} = T(x_n)$, dato che $x_{n+1} \to \bar{x}$ e $T(x_n) \to T(\bar{x})$ per la continuità di T (data dalla stima $d(T(\bar{x}), T(x_n)) \leq K \cdot d(\bar{x}, x_n)$), si deduce $\bar{x} = T(\bar{x})$, e dunque $\bar{x}$ è un punto fisso di T.

Supponendo $\hat{x} \in X$ sia un qualunque punto fisso di T, si ha $d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T(\hat{x}), T(\bar{x})) \leq K \cdot d(\hat{x}, \bar{x})$, ossia $(1 - K) \cdot d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$, da cui $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$ e dunque $\hat{x} = \bar{x}$, ovvero l'unicità del punto fisso. □

Il principio delle contrazioni si applica nelle più svariate situazioni: ad esempio, per dimostrare il Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy (per equazioni e sistemi di equazioni differenziali), oppure il Teorema del Dini delle funzioni implicite/inverse (esistenza e unicità locale per soluzioni di sistemi di equazioni algebriche non lineari, dipendenza continua delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati del problema, oppure esistenza e unicità locale di soluzioni di equazioni alle derivate parziali non lineari).

Esempio: il problema di Cauchy $y' = y$, $y(0) = 1$ può essere riformulato, integrando su $[0, t]$ ambo i membri dell'equazione differenziale e tenendo conto del dato iniziale, attraverso l'equazione di punto fisso $y = Ty$, dove $T : C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}) \to C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R})$ è definita da $Ty(t) = 1 + \int_0^t y(s)ds$. Si ha

$$||Ty_1 - Ty_2||_\infty = \left|\left| \int_0^t (y_1(s) - y_2(s))ds \right|\right|_\infty \leq \delta ||y_1 - y_2||_\infty ,$$

ossia T è una contrazione sullo spazio metrico completo $C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞ non appena $\delta < 1$. Inizializzando lo schema iterativo ponendo $y_0(t) = 1$ per $-\delta \leq t \leq \delta$, si ottiene $y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$, che converge alla soluzione $\bar{y}(t) = e^t$, e si ha la stima dell'errore (non certo ottimale!) $||y_n - \bar{y}||_\infty \leq \delta^{n+1}(1 - \delta)^{-1}$.

Esempio: risoluzione di un sistema lineare $Bx = y$, dati $y \in \mathbb{R}^n$, $B \in M^n(\mathbb{R})$. Ponendo $A = I - B$, il sistema diventa l'equazione di punto fisso $x = Ax + y$ su $\mathbb{R}^n$. L'applicazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $Tx = Ax + y$ verifica la stima

$$||Tx_1 - Tx_2|| = ||Ax_1 - Ax_2|| = ||A(x_1 - x_2)|| \leq |||A||| \cdot ||x_1 - x_2|| ,$$

dove $|||\cdot|||$ e $||\cdot||$ sono opportune norme, rispettivamente su $M^n(\mathbb{R})$ ed $\mathbb{R}^n$, verificanti la proprietà $||Av|| \leq |||A||| \cdot ||v||$. Questo è il caso, ad esempio, della norma ℓ^1, definita, per $A = [a_{ij}]$, da $|||A|||_{\ell^1} := \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Tale norma verifica la proprietà $|||A_1A_2|||_{\ell^1} \leq |||A_1|||_{\ell^1} \cdot |||A_2|||_{\ell^1}$. In particolare, se x è un vettore colonna, $|||x|||_{\ell^1} = ||x||_{\ell^1}$ e si ha $||Ax||_{\ell^1} \leq |||A|||_{\ell^1} \cdot ||x||_{\ell^1}$.

L'applicazione T è dunque una contrazione se $|||A||| = |||I - B|| < 1$. In tal caso, dallo schema iterativo $x_{n+1} = Ax_n + y$, inizializzato ponendo $x_0 = y$, si deduce

$$x_n = \left[\sum_{k=0}^n A^k \right] y \to \left[\sum_{k=0}^\infty A^k \right] y = (I - A)^{-1}y .$$

La serie $\sum_{k=0}^\infty A^k$ è detta serie di Neumann della matrice A, e converge a $(I - A)^{-1}$ (in perfetta analogia con la somma della serie geometrica) quando $|||A||| < 1$.

Si osservi che la convergenza della serie di Neumann discende anche dal criterio di convergenza totale nello spazio $M^n(\mathbb{R})$ dotato di una qualunque norma $|||\cdot|||$ verificante la proprietà $|||A_1A_2||| \leq |||A_1||| \cdot |||A_2|||$. Si ha infatti

$$\sum_{k=0}^\infty |||A^k||| \leq \sum_{k=0}^\infty |||A|||^k < +\infty \qquad \text{per } |||A||| < 1 .$$

Lezione del 16/10/09 (2 ore). Norma vettoriale di una matrice. Si tratta della più piccola norma che rende vera la disuguaglianza $||Ax|| \le |||A||| \cdot ||x||$. Si definisce ponendo $|||A||| = \sup\{||Ax||\,,\ \ ||x|| = 1\,\}$. Nel caso $A \in M^n(\mathbb{R})$, se $||\cdot||$ è la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$ si ha la caratterizzazione $|||A||| = \max\{\sqrt{\lambda}\,,\ \lambda$ autovalore di $A^t \cdot A\}$. Se A è simmetrica, dato che $A^tA = A^2$ si ha $\lambda = \mu^2$, con μ autovalore di A, per cui $|||A||| = \max\{|\mu|\,,\ \mu$ autovalore di $A\}$.

Dimostrazione nel caso $A \in M^2(\mathbb{R})$, A simmetrica: per ogni matrice ortogonale $R \in O(2)$ (ovvero $R^t = R^{-1}$) e per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ si ha $||Rv|| = ||R^tv|| = ||v||$. Siccome A è simmetrica, essa è simile alla matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$ (con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ autovalori di A), e vale $A = R^tDR$ per una certa R ortogonale. Pertanto, dato $x \in \mathbb{R}^2$, $||x|| = 1$, e posto $y = Rx$, si ha $||y|| = ||x||$ e $||Ax|| = ||R^tDRx|| = ||Dy||$. Pertanto

$$|||A||| = \sup\{||Ax||\,,\ ||x|| = 1\} = \sup\{||Dy||\,,\ ||y|| = 1\} = \max\{|\lambda_1|\,,\ |\lambda_2|\,\}\,,$$

dato che $||Dy|| = \sqrt{\lambda_1^2y_1^2 + \lambda_2^2y_2^2} = \sqrt{\lambda_1^2y_1^2 + \lambda_2^2(1-y_1^2)}$, e $0 \le y_1^2 \le 1$. □

Caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi di spazi metrici: $A \subset X$ è chiuso in X se per ogni successione $\{x_n\} \subset A$ convergente ad $x_0 \in X$, si ha $x_0 \in A$. Si deduce in particolare, che se X è completo ed $A \subset X$ è chiuso, allora anche A è completo.

Definizione: $A \subset X$ si dice limitato se $A \subset B(x_0, r)$ per un certo $x_0 \in X$ ed $r > 0$. L'insieme A si dice totalmente limitato se $\forall\,\epsilon > 0$ esiste una ϵ-rete di A, ovvero $\exists$ $x_1, ..., x_N \in A$ (con N dipendente da ϵ) tale che $A \subset \cup_j B(x_j, \epsilon)$.

Un insieme totalmente limitato è limitato, e in generale non vale il viceversa. In $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ è limitato se e solo se è totalmente limitato. Esempio: i punti di $\mathbb{R}^n$ aventi coordinate del tipo $k2^{-N}$, $k = 0, 1, ..., 2^N$ formano una ϵ-rete per il cubo $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, con $\epsilon = 2^{-N}$.

Esempio di insieme limitato ma non totalmente limitato: sia $\mathbb{R}^\infty$ lo spazio delle successioni reali definitivamente nulle. Data una successione $X \equiv \{x_i\}$, possiamo definirne ad esempio la norma ℓ^1 ponendo $||x|| = \sum_{i=1}^\infty |x_i|$ (si tratta in realtà di una somma finita!). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissiato definiamo la successione $X_n \subset \mathbb{R}^\infty$ definita da $X_n \equiv \{x_i\}$, con $x_i = 1$ se $i = n$, e $x_i = 0$ se $i \neq n$. Si ha $||X_n|| = 1\,\forall\,n$ e $||X_n - X_m|| = 2$ $\forall\,m \neq n$. Pertanto, l'insieme $A = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^\infty$ è limitato rispetto alla norma ℓ^1, ma non è totalmente limitato (preso ad esempio $\epsilon = 1/2$ una qualunque ϵ-rete di N elementi di $\mathbb{R}^\infty$ può approssimare a meno di ϵ al più N elementi di A).

Teorema: uno spazio metrico è compatto per successioni se e solo se è completo e totalmente limitato. Nel caso $C \subset \mathbb{R}^n$, C è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione nel caso $C \subset \mathbb{R}^n$. ($\Leftarrow$) sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $\{X_k\} \subset C$ una successione. Siccome $C \subset [-M, M]^n$, se $X_k = (x_1^k, .., x_n^k)$, si ha $|x_j^k| \le M$ per ogni j, k. In particolare, la successione $\{x_1^k\}$ è limitata in $\mathbb{R}$, e dunque ammette una sottosuccessione $\{x_1^m\}_{m\in N_1}$, con $N_1 \subset \mathbb{N}$ convergente a $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$. Analogamente, la successione $\{x_2^m\}_{m\in N_1}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e dunque ammette una sottosuccessione $\{x_2^m\}_{m\in N_2}$, $N_2 \subset N_1$, convergente a $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$. Di questo passo si ottengono, per $j = 1, ..., n$, delle sottosuccessioni $\{x_j^m\}_{m\in N_j}$, $N_j \subset N_{j-1}$, convergenti a $\bar{x}_j \in \mathbb{R}$. In particolare, la sottosuccessione

$X_m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$, $m \in N_n$, converge a $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. D'altra parte, siccome C è chiuso, si ha $\bar{X} \in C$.

($\Rightarrow$) Se C non fosse limitato, allora esisterebbe una successione di punti $\{x_n\} \subset C$ tale che $|x_n| \geq |x_j| + 1$ per ogni $j < n$. In particolare, $|x_m - x_n| \geq |\,|x_m| - |x_n|\,| \geq 1$ per ogni $m \neq n$, e quindi questa proprietà vale anche per ogni possibile sottosuccessione di $\{x_n\}$, che dunque non può convergere. Se C non fosse chiuso, allora o non esiste nessuna successione in C convergente in $\mathbb{R}^n$, oppure ne esiste almeno una che converge ad $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash C$, per cui ogni sua sottosuccessione, dovendo convergere a x_0, non converge in C. Dunque C non è compatto per successioni. $\square$

Osservazione: la nozione di compattezza per successioni equivale, negli spazi metrici, alla nozione di compattezza per spazi topologici (si dice che lo spazio topologico (X, τ) è compatto se da ogni ricoprimento aperto di X è possibile estrarre un sottoricoprimento finito).

Teorema di Weierstrass: una funzione continua su uno spazio metrico compatto, a valori reali, ammette massimo e minimo. Dimostrazione: l'argomento delle successioni minimizzanti (risp. massimizzanti) è formalmente identico al caso delle funzioni di una variabile reale.

Lezione del 19/10/09 (2 ore). Funzioni vettoriali di una variabile reale: derivazione per componenti, interpretazione geometrica della derivata come vettore tangente alla curva immagine. Equazione parametrica della retta tangente alla curva immagine: una parametrizzazione canonica è data dallo sviluppo di Taylor di f arrestato al primo ordine. Sviluppo di Taylor per funzioni vettoriali di una variabile.
Funzioni scalari di più variabili. Derivata direzionale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p_0 \in \Omega$: data una direzone $e \in \mathbb{R}^2$ (ossia $e = (a, b)$ con $a^2+b^2 = 1$), la retta passante per $p_0 = (x_0, y_0)$ avente direzione e è data da $t \mapsto r(t) = (x_0+ta, y_0+tb)$, e la derivata nella direzione e di f in p_0 è definita da $D_e f(p_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(r(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0+ta, y_0+tb)$. Se $e = (1, 0)$ (risp. $e = (0, 1)$) si pone $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (risp. $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$), e tale derivata si chiama derivata parziale rispetto a x (risp. rispetto a y). Esempi di calcolo di derivate direzionali.

Interpretazione geometrica delle derivate direzionali: sia $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\,,\ (x, y) \in \Omega\,\}$ il grafico di f. La mappa $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb))$ ha come immagine la curva costituita dalla restrizione del grafico di f alla retta $r(t)$ di cui sopra, passante per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ per $t = 0$. Il vettore

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)) = (a, b, D_e f(x_0, y_0)\,)$$

è dunque un vettore tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la cui componente orizzontale è la direzione $e = (a, b)$, e la cui componente verticale è la derivata direzionale di f nella direzione e in p_0.

Lezione del 21/10/09 (1 ora). Funzioni differenziabili. Differenziale $df(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto $p_0 \in \Omega$. Si tratta di un'applicazione lineare che verifica

$$\lim_{p\to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - df(p_0)\cdot(p-p_0)|}{|p-p_0|} = 0\,.$$

Se f è differenziabile in p_0 allora esistono le derivate direzionali di f in p_0 e si ha $D_e f(p_0) = df(p_0)\cdot e$ per ogni direzione $e \in \mathbb{R}^n$. In particolare, il differenziale $df(p_0)$ si rappresenta con il gradiente $\nabla f(p_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)) \in \mathbb{R}^n$, ovvero si ha $df(p_0)\cdot v = \langle \nabla f(p_0), v\rangle$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Il gradiente individua la direzione di massima crescita di f in p_0, ossia

$$\max_{|e|=1} D_e f(p_0) = \max_{|e|=1} \langle \nabla f(p_0), e\rangle = |\nabla f(p_0)|\,, \quad \text{per } e = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}.$$

Se f è differenziabile in p_0, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(p_0, f(p_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è data da $x_{n+1} = f(p_0) + df(p_0)\cdot(p-p_0)$, ovvero

$$x_{n+1} = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0), \quad \text{dove } p = (x_1, ..., x_n) \quad \text{e } p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}).$$

Detta $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, il piano tangente al grafico è generato dai vettori $\{e_i + e_{n+1}\cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\}_{i=1,\ldots,n}$ (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$).

Una funzione differenziabile in p_0 è continua in p_0. Teorema del differenziale totale: se in un intorno $B(p_0, r)$ esistono le derivate parziali di f e sono continue in p_0, allora f è differenziabile in p_0.

Lezione del 23/10/09 (2 ore). Dimostrazione della continuità di una funzione differenziabile. Dimostrazione del teorema del differenziale totale. Differenziale di funzioni vettoriali. Se $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$ e $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha la rappresentazione mediante la matrice Jacobiana $Df(p_0) \equiv \frac{\partial\{f_1,\ldots,f_m\}}{\partial\{x_1,\ldots,x_n\}}(p_0)$:

$$df(p_0)\cdot v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Nel caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha ovviamente $Df(t_0) = [f'(t_0)]$. Matrice Jacobiana $\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}}$ della trasformazione in coordinate polari. Coordinate cilindriche (r, θ, z) e sferiche (r, θ, ϕ) per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e rispettive matrici Jacobiane.

Regola della catena per il differenziale composto: se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ sono funzioni differenziabili rispettivamente in $p_0 \in \Omega$ e $q_0 = f(p_0) \in U$, allora $h = g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile in p_0 e vale $dh(p_0) = d(g\circ f)(p_0) = dg(f(p_0))\cdot df(p_0)$. In termini delle matrici Jacobiane,

$$\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0)\right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\right] \cdot \left[\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\right], \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\,.$$

Esempio: nel caso $f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ e $g(x, y) \in \mathbb{R}$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha $\frac{d(g \circ f)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Lezione del 26/10/09 (2 ore). Superfici parametriche, vettori tangenti, vettore normale. Data la parametrizzazione (di classe C^1) $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, con $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, i vettori colonna della matrice Jacobiana $D\vec{r}(p_0)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p_0) \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(p_0) \end{bmatrix}$$

sono vettori tangenti alla superficie $S = \{\vec{r}(u, v)\,, (u, v) \in \Omega\}$ in $\vec{r}(p_0) \in S$, e ne generano il piano tangente qualora siano linearmente indipendenti. Un vettore $N(p_0)$ normale alla superficie in $\vec{r}(p_0) \in S$ si ottiene, in modo canonico, mediante il prodotto vettoriale $N = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Insiemi di livello $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, di una funzione $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in f^{-1}(c)$ e $\nabla f(p_0) \neq 0$, tale vettore risulta ortogonale a $f^{-1}(c)$ in p_0. Esempio di derivazione di funzioni definite implicitamente.

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana delle derivate parziali seconde.Teorema di Schwarz: se $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ (ovvero esistono le derivate parziali seconde e sono continue in Ω) allora la matrice Hessiana $D^2 f(p) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)]$ è simmetrica per ogni $p \in \Omega$.

Sviluppo di Taylor al secondo ordine per $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ in $p_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$: sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \equiv p(t) = p_0 + tv \in \Omega$ per $0 \leq t \leq t_0$. Posto $g(t) = f(p(t))$, si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p(t)) v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle\,, \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p(t)) v_j v_i = \langle D^2 f(p) \cdot v,\, v \rangle\,.$$

Dallo sviluppo di Taylor $g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0) + o(t^2)$ si ottiene

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0),\, (p - p_0) \rangle + o(|p - p_0|^2)\,.$$

Studio della natura dei punti critici di $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$: se p_0 è un punto critico di f (ossia $\nabla f(p_0) = 0$), allora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine si riduce a

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0),\, (p - p_0) \rangle + o(|p - p_0|^2)\,.$$

Sia $R \in O(n)$ tale che $R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R =$diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di $D^2 f(p_0)$, e sia $p - p_0 = R \cdot w$, con $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0),\, (p - p_0) \rangle &= \langle D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w,\, R \cdot w \rangle = \langle R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w,\, w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2\,. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque, tenendo conto che $|w|^2 = |Rw|^2 = |p - p_0|^2$,

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 \, + o(|w|^2)\,,$$

da cui si deduce che se gli autovalori di $D^2 f(p_0)$ sono tutti positivi (risp. negativi) allora p_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale per f. Se vi sono autovalori di segno discorde, p_0 è detto un punto di sella. Se qualche autovalore di $D^2 f(p_0)$ risulta nullo, allora il solo sviluppo di Taylor al secondo ordine non permette di decidere sulla natura del punto critico.

Lezione del 28/10/09 (2 ore). Controesempi al teorema di Schwarz. Derivate successive, indipendenza dell'ordine di derivazione. Studio dei punti critici di funzioni di due o tre variabili: regole pratiche per la determinazione del segno degli autovalori della matrice hessiana.

Lezione del 30/10/09 (2 ore). Andamento degli insiemi di livello intorno ai punti critici. Lo schema di flusso gradiente per la determinazione di massimi locali: data $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, $p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \nabla f(p) \\ p(0) = p_0\,, \end{cases}$$

ovvero il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), ..., x_n(t)) \\ x_i(0) = x_{0,i} \qquad\qquad\qquad i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Detto $\bar{p} = \lim_{t\to+\infty} p(t)$, se $\bar{p} \in \Omega$ allora $\nabla f(\bar{p}) = 0$, ossia $\bar{p}$ è un punto critico, che, per una scelta generica del dato iniziale p_0 risulta essere di massimo locale. L'analogo schema $\frac{dp}{dt} = -\nabla f(p)$ per i minimi locali anche detto schema di discesa gradiente.

Massimi e minimi di funzioni su domini $T \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e limitati: vanno ricercati tra i punti critici interni a T, ed i massimi e minimi vincolati alla frontiera (o bordo) ∂T. Espressione del vincolo in forma parametrica o in forma implicita. Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma parametrica. Un esempio di programmazione lineare.

Lezione del 2/11/09 (2 ore). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione di massimi e minimi vincolati: se $f, g \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, e $p_0 \in g^{-1}(0) \cap \Omega$ è tale che $\nabla g(p_0) \neq 0$, allora p_0 è un punto di estremo vincolato per f ristretta a $g^{-1}(0)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$. Ciò equivale a dire che

$(p_0, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$ è punto critico della funzione (di Lagrange) $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(p, \mu) = f(p) - \mu \cdot g(p)$.

La dimostrazione del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange segue dal Teorema del Dini delle funzioni implicite: se $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, $p_0 \equiv (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in g^{-1}(0)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0) \neq 0$, allora esiste $\delta > 0$, ed un intorno $R_\delta = \prod_{i=1}^n [x_{0,i} - \delta, x_{0,i} + \delta]$ tale che $g^{-1}(0) \cap R_\delta = \{(x_1, ..., x_n) \in R_\delta \, , \; x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})\}$, dove $\phi : \prod_{i=1}^{n-1} [x_{0,i} - \delta, x_{0,i} + \delta] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.

Il teorema del Dini dà delle condizioni affinchè l'insieme di livello $g^{-1}(0)$ possa rappresentarsi, localmente, come grafico di una opportuna funzione ϕ, la quale risulta definita implicitamente dall'equazione $g = 0$, e le cui derivate possono essere calcolate derivando implicitamente la relazione $g = 0$. In particolare, dalla relazione $0 = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, .., x_{n-1}, \phi(x_1, ..., x_{n-1}))$, $i = 1, ..., n-1$, si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}) = - \left. \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)} \right|_{x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})} \qquad i = 1, ..., n-1.$$

Dato che i vettori $\tau_i = e_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} e_n$, $i = 1, ..., n-1$, generano il piano tangente al grafico di ϕ, la relazione precedente afferma che $\langle \nabla g(p), \tau_i \rangle = 0 \; \forall \, i = 1, ..., n-1$, per ogni $p \in g^{-1}(0) \cap R_\delta$, ovvero rimane dimostrato che se $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ e $\nabla g(p) \neq 0$, allora $\nabla g(p)$ è ortogonale, nel punto p, all'insieme di livello di g contenente p.

Dimostrazione del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: se $\nabla g(p_0) \neq 0$ allora almeno una delle sue componenti $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ non è nulla. Supponiamo per semplicità che sia $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0) \neq 0$. Per il Teorema del Dini, si ha intorno a p_0 $g(x_1, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})$, per cui , se p_0 è un estremo vincolato di f, si ha, adottando le notazioni di cui sopra,

$$0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}, \phi(x_1, ..., x_{n-1})) \right|_{p_0} = \langle \nabla f(p_0), \tau_i \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$: infatti, dato che anche $\langle \nabla g(p_0), \tau_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, ..., n-1$, l'insieme $\{\nabla g(p_0), \tau_i\}_{i=1,...,n-1}$ forma una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$, e quindi, posto $\lambda = \frac{\langle \nabla f(p_0), \nabla g(p_0) \rangle}{|\nabla g(p_0)|^2}$, si ha necessariamente $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

Lezione del 4/11/09 (2 ore). Estremi di una forma quadratica sulla sfera unitaria, relazione con gli autovalori della matrice simmetrica associata. Massimi e minimi di funzioni in presenza di più vincoli e corrispondente metodo dei moltiplicatori.

Lezione del 6/11/09 (2 ore). Il teorema del Dini delle funzioni implicite: sia $G : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 nelle variabili $(x, y) \equiv (x_1, .., x_n, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial \{G_1, ..., G_m\}}{\partial \{y_1, ..., y_m\}} \neq 0$. Allora $\exists \, \delta, \sigma > 0$, ed esiste $\phi : B_\delta(x_0) \to B_\sigma(y_0)$ tali che $G^{-1}(0) \cap (B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)) = \{(x, y) : \; x \in B_\delta(x_0) \, , \; y = \phi(x)\}$. Inoltre, ϕ è di classe C^1 e vale

$$D\phi(x) = - \left[\frac{\partial \{G_1, ..., G_m\}}{\partial \{y_1, ..., y_m\}} \right]^{-1} \cdot \left. \left[\frac{\partial \{G_1, ..., G_m\}}{\partial \{x_1, ..., x_n\}} \right] \right|_{y = \phi(x)} ,$$

ovvero vale la formula di derivazione implicita

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_i(x,\phi(x))\right)=\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x,\phi(x))+\sum_{\ell=1}^{m}\frac{\partial G_i}{\partial y_\ell}(x,\phi(x))\frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x)\,.$$

Dimostrazione: detta $Q=D_yG(x_0,y_0)=\frac{\partial\{G_1,\dots,G_m\}}{\partial\{y_1,\dots,y_m\}}(x_0,y_0)$, consideriamo l'applicazione $T_x(y)=y-Q^{-1}\cdot G(x,y)$. Si ha $G(x,y)=0\Leftrightarrow y=T_x(y)$. Per $r>0$ poniamo $R=B_r(x_0)\times B_r(y_0)\subset\mathbb{R}^{n+m}$. Siano (x,y_1) ed (x,y_2) in R, e sia $y(t)=y_1+t(y_2-y_1)$ per $0\le t\le 1$: si ha

$$\begin{aligned}
|T_x(y_2)-T_x(y_1)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}T_x(y(t))\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 DT_x(y(t))\cdot(y_2-y_1)\,dt\right| \\
&\le \int_0^1 |DT_x(y(t))\cdot(y_2-y_1)|\;dt \\
&\le \int_0^1 ||DT_x(y(t))||_{\ell^\infty}||y_2-y_1||_{\ell^1}\,dt \\
&\le \int_0^1 \sup_{(x,y)\in R}||DT_x(y)||_{\ell^\infty}||y_2-y_1||_{\ell^1}\,dt \\
&\le \sup_{(x,y)\in R}||DT_x(y)||_{\ell^\infty}\cdot\sqrt{m}|y_2-y_1| \\
&\le \frac{1}{2}|y_2-y_1|\,,
\end{aligned}$$

a patto di scegliere $r>0$ opportunamente piccolo (infatti, si ha $DT_x(y)=y-Q^{-1}D_xG(x,y)$ ed in particolare $||DT_x(y)||_{\ell^\infty}$ è una funzione continua di (x,y) (la norma è continua e $DG(x,y)$ è continua). Dato che $||DT_{x_0}(y_0)||_{\ell^\infty}=0$ esisterà dunque $r>0$ tale che per ogni $(x,y)\in R$ si abbia $||DT_x(y)||_{\ell^\infty}\cdot\sqrt{m}\le\frac{1}{2}$).

Inoltre, ponendo $\sigma=r/2$, se $|y-y_0|\le\sigma$ si ha

$$\begin{aligned}
|T_x(y)-y_0| &= |T_x(y)-T_{x_0}(y_0)|\le|T_x(y)-T_x(y_0)|+|T_x(y_0)-T_{x_0}(y_0)| \\
&\le\frac{1}{2}|y-y_0|+|Q^{-1}\cdot G(x,y_0)|\le\sigma\,,
\end{aligned}$$

non appena $|Q^{-1}\cdot G(x,y_0)|\le\frac{\sigma}{2}$, il che si verifica per $|x-x_0|<\delta$, con $0<\delta<r$ opportuno, dato che $\lim_{x\to x_0}G(x,y_0)=G(x_0,y_0)=0$.

Pertanto, per $x\in B_\delta(x_0)$, l'applicazione T_x manda $\overline{B_\sigma(y_0)}$ in sè, ed è una contrazione per quanto visto sopra. Siccome $\overline{B_\sigma(y_0)}\subset\mathbb{R}^m$ è completo in quanto sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo, per il principio delle contrazioni esiste un unico punto fisso $y=\phi(x)$ di T_x, che verifica quindi la relazione $G(x,\phi(x))=0$.

La continuità di ϕ in $B_\delta(x_0)$ discende da una stima analoga alla precedente: fissato $x_1 \in B_\delta(x_0)$, si ha

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(x_1)| &= |T_x(\phi(x)) - T_{x_1}(\phi(x_1))| \\ &\leq |T_x(\phi(x)) - T_x(\phi(x_1))| + |T_x(\phi(x_1)) - T_{x_1}(\phi(x_1))| \\ &\leq \frac{1}{2}|\phi(x) - \phi(x_1)| + |Q^{-1} \cdot G(x, \phi(x_1))|\,, \end{aligned}$$

da cui $|\phi(x) - \phi(x_1)| \leq 2|Q^{-1} \cdot G(x, \phi(x_1))| \to |Q^{-1} \cdot G(x_1, \phi(x_1))| = 0$ per $x \to x_1$.

La differenziabilità di ϕ in (x_0, y_0) e la formula per $D\phi(x_0)$ si possono dedurre studiando lo sviluppo di Taylor di G attorno ad (x_0, y_0). $\square$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di m vincoli: sia $G = (G_1, ..., G_m) : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1, a sia $f \in C^1(A; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in G^{-1}(0)$ è un estremo vincolato per f ristretta a $G^{-1}(0)$ e se $DG(p_0)$ ha rango massimo m, allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(p_0) = \lambda_1 \nabla G_1(p_0) + ... + \lambda_m \nabla G_m(p_0)$.

Teorema della funzione inversa: se $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^1 e se $\det Df(p_0) \neq 0$ (ovvero $\exists\ [Df(p_0)]^{-1}$), allora $\exists\ U \subset A$ intorno di p_0 e $V \subset \mathbb{R}^m$ intorno di $q_0 = f(p_0)$ tale che $f : U \to V$ è invertibile. Inoltre, l'inversa f^{-1} è di classe C^1 (si dice che f è un diffeomorfismo locale), e $[Df^{-1}(q_0)] = [Df(p_0)]^{-1}$.

Dimostrazione: si applichi il Teorema delle funzioni implicite alla funzione $G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ definita da $G(q, p) = q - f(p)$. Si ha $G(p_0, q_0) = 0$ e $\det D_p G(p_0, q_0) = \det Df(p_0) \neq 0$. Pertanto rimane definita intorno a q_0 una funzione ϕ di classe C^1 tale che $G(q, p) = q - f(p) = 0 \Leftrightarrow p = \phi(q)$, ovvero $q = f(\phi(q))$ e $\phi = f^{-1}$ è la funzione inversa cercata.

Esempio: la trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ verifica $\det\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}} = r \neq 0\ \forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$. Tale trasformazione è dunque un diffeomorfismo locale. Si osservi che la trasformazione non è globalmente invertibile, in quanto (r, θ) ed $(r, \theta + 2k\pi)$ hanno la stessa immagine $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Il metodo di Newton-Raphson per la risoluzione di sistemi non lineari dipendenti da parametro. Sia $G : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1. Fissato il parametro x, per risolvere il sistema $G(x, y) = 0$ rispetto alla variabile y, si può considerare lo schema iterativo $y_{n+1} = y_n - [D_y G(x, y_n)]^{-1} \cdot G(x, y_n)$. Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema delle funzioni implicite, lo schema convergerà se $D_y(x, y)$ è invertibile in un intorno di uno zero $(\bar{x}, \bar{y})$ di G ed il punto iniziale (x, y_0) è scelto sufficientemente vicino a $(\bar{x}, \bar{y})$.

Si osservi come lo schema iterativo dedotto dalla dimostrazione del Teorema delle funzioni implicite sia piuttosto $y_{n+1} = y_n - [D_y G(x_0, y_0)]^{-1} \cdot G(x, y_n)$, meno costoso computazionalmente del metodo di Newton-Raphson (ma meno rapido nel convergere).

Lezione del 9/11/09 (2 ore). Integrale di Riemann per funzioni limitate definite su un rettangolo (prodotto di intervalli) $R = \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ (alias integrale doppio se $n = 2$, integrale triplo se $n = 3$). Integrabilità delle funzioni continue (in virtù dell'uniforme continuità). Teorema di Fubini-Tonelli (formula dell'integrale iterato) per funzioni continue su un rettangolo. Estensione al caso di domini normali rispetto agli assi coordinati: nel caso degli integrali doppi, se ad esempio $g_1, g_2 \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ e $D = \{(x,y),\ a \le x \le b\,,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, ed inoltre $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, si ha

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx\,.$$

Esercizi sugli integrali doppi.

Lezione dell' 11/11/09 (2 ore). Un esempio di calcolo di probabilità congiunte mediante integrali multipli. Formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli: se $T : R \subset \mathbb{R}^n \to D = T(R) \subset \mathbb{R}^n$, è di classe C^1 ed iniettiva tranne al più sui punti della frontiera ∂R del dominio, allora, per $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, posto $x = (x_1, ...x_n) = T(u_1, ..., u_n) = T(u)$, vale la formula

$$\int_D f(x)\,dx_1...dx_n = \int_R f(T(u)) \left|\det \frac{\partial\{T_1, ..., T_n\}}{\partial\{u_1, ..., u_n\}}(u)\right| du_1...du_n\,.$$

Uno dei passaggi chiave della formula è l'espressione del volume del parallelepipedo $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori $v_j = (v_{1,j}, ...v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, ..., n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j, si ha $\mathrm{vol}\,(P) = |\det A|$.

Esempi di calcolo di integrali multipli utilizzando trasformazioni di coordinate polari, sferiche e cilindriche.

Lezione del 13/11/09 (2 ore). Integrali multipli impropri: data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiva, nel caso in cui il dominio D non sia limitato, o la funzione non sia limitata su D, se $D = \bigcup\limits_{r>0} D_r$, dove $D_r \subset D_R \subset D$ per $r < R$, D_r è un dominio limitato su cui f è limitata ed integrabile, si definisce l'integrale improprio $\displaystyle\int_D f = \lim_{r\to+\infty} \int_{D_r} f$. Tale definizione è indipendente dalla scelta della famiglia di domini crescenti D_r che invadono D. Osservazione: l'integrale improprio può anche valere $+\infty$.

Calcolo di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Posto $f(x,y) = e^{-x^2}e^{-y^2}$ e $D_R = \{(x,y)\,,\ ||(x,y)||_{\ell^\infty} \le R\}$, si ha

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-y^2} \left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right] dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2\,.$$

D'altra parte, scegliendo $D_R = B_R((0,0))$ e trasformando in coordinate polari, si ha

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r\,drd\theta = \pi\,,$$

da cui la formula $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Esercizi sul calcolo di integrali multipli sfruttando opportuni cambiamenti di coordinate.

Lezione del 16/11/09 (2 ore). Integrali curvilinei e superficiali per funzioni scalari. Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, additività. Calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure mono- e bidimensionali.

Lezione del 18/11/09 (2 ore). Campi vettoriali. Integrale curvilineo per campi vettoriali su curve orientate: definizione tramite parametrizzazione regolare, proprietà. Campi conservativi, potenziale scalare. Esempi: il campo elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa puntiforme, dato da $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ è conservativo. Si ha $\vec{F} = \nabla\Phi$, con $\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Condizione necessaria affinché un campo $\vec{F}$ di classe C^1 sia conservativo in un dominio A è che $D\vec{F}$ sia una matrice simmetrica (se $\vec{F} = \nabla\Phi$ in A, allora $D\vec{F} = D^2\Phi$). Definizione di rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Campi irrotazionali. Un campo conservativo in un dominio A è irrotazionale in A. Nozione di insieme semplicemente connesso (definizione data in $\mathbb{R}^2$). La condizione $D\vec{F}$ simmetrica (ovvero $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$) su un dominio A semplicemente connesso è sufficiente affinchè $\vec{F}$ sia conservativo in A.

Esempio: il campo $\vec{F}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ è irrotazionale. Tuttavia non è conservativo su tutto il suo dominio di definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (un insieme non semplicemente connesso), in quanto il suo integrale curvilineo lungo una circonferenza di centro l'origine è diverso da zero. Sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\}$, che è semplicemente connesso, si ha $\vec{F} = \nabla\theta$, dove θ è la funzione angolare definita dalla funzione inversa della trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ristretta a $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

Lezione del 20/11/09 (2 ore). Condizioni equivalenti alla proprietà di essere conservativo per un campo di vettori di classe C^0: indipendenza dal percorso, circuitazione nulla. Determinazione di una funzione potenziale per un campo conservativo. Esercizi.

Lezione del 23/11/09 (2 ore). Formula di Gauss-Green nel piano: enunciato e dimostrazione nel caso di domini normali rispetto agli assi coordinati. Teorema di Stokes per superfici poliedrali triangolate in $\mathbb{R}^3$. Calcolo di aree di figure piane mediante integrali curvilinei. Calcolo di circuitazioni nel piano mediante integrali doppi. Integrali superficiali per campi vettoriali: definizione di flusso di un campo di vettori attraverso una superficie individuata da una parametrizzazione regolare. Indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione indotta), additività.

Lezione del 24/11/09 (1 ora). Calcolo di flussi di campi di vettori attraverso superfici parametriche e cartesiane.

Lezione del 25/11/09 (2 ore). Il Teorema di Stokes nel caso di superfici C^1 regolari sino al bordo. Divergenza di un campo vettoriale. Teorema della divergenza (o di Gauss): enunciato e dimostrazione nel caso di un dominio normale rispetto agli assi coordinati. Esempi applicativi: calcolo di flussi mediante integrali di volume e viceversa.

Lezione del 27/11/09 (2 ore). Relazione tra campi a divergenza nulla (detti solenoidali) e campi che sono il rotore di un altro campo, detto potenziale vettore: $\vec{F}$ =rot$\vec{A}$ su un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ implica div$\vec{F} = 0$ in D. L'implicazione inversa è vera su domini D che verificano certe ipotesi (in buona sostanza, per ogni superficie chiusa S in D, $S = \partial V$ con V interamente contenuto in D). Esempi di campi solenoidali: il campo magnetico, il campo di velocità di un fluido incomprimibile.

Notazione per gli integrali curvilinei e superficiali tramite forme differenziali: tale formalismo è giustificato dalla regola di cambiamento di variabili negli integrali multipli, e si rivela adeguato per generalizzazioni in dimensione arbitraria, e per le applicazioni fisiche e geometriche.

Una 1-forma differenziale ω di classe C^1 su un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è una funzione $p \mapsto \omega(p)$, dove $\omega(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una applicazione lineare, ovvero si può scrivere $\omega(p) = F_1(p)dx + F_2(p)dy + F_3(p)dz$, dove $F_1, F_2, F_3 \in C^1(A;\mathbb{R})$ e dx, dy, dz sono rispettivamente i differenziali delle funzioni coordinate $(x, y, z) \mapsto x$, $(x, y, z) \mapsto y$, $(x, y, z) \mapsto z$.

Esempio: se $\phi \in C^1(A;\mathbb{R})$, l'applicazione $p \mapsto d\phi(p) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}(p)dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}(p)dz$ è la 1-forma differenziale che associa ad ogni punto $p \in A$ l'applicazione lineare $d\phi(p)$, ovvero il differenziale di ϕ in p.

Se $\Gamma \subset A \subset \mathbb{R}^3$ è una curva orientata di classe C^1 a tratti parametrizzata da $t \mapsto p(t)$, $t \in [a, b]$, si pone

$$\int_\Gamma \omega := \int_a^b [F_1(p(t))\dot{x}(t) + F_2(p(t))\dot{y}(t) + F_3(p(t))\dot{z}(t)]\ dt\,.$$

Alla 1-forma $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ possiamo associare il campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, e viceversa. L'integrale di ω lungo Γ corrisponde dunque all'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo Γ.

Introduciamo un prodotto esterno $\wedge$ (wedge) bilineare, anticommutativo, associativo sulle applicazioni lineari, con cui è possibile generalizzare la nozione di prodotto vettoriale. In particolare si ha $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$, $dx\wedge dz = dz\wedge dx$, $dy\wedge dz = -dz\wedge dy$, $dx \wedge dx = -dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, $dz \wedge dz = 0$. (gli oggetti così definiti sono delle applicazioni bilineari alternanti).

Definiamo una 2-forma differenziale ω di classe C^1 su $A \subset \mathbb{R}^3$ come una funzione $p \mapsto \omega(p)$, dove $\omega(p) = F_1(p)dy \wedge dz - F_2(p)dx \wedge dz + F_3(p)dx \wedge dy$, con $F_1, F_2, F_3 \in C^1(A;\mathbb{R})$.

Sia $S \subset A$ è una superficie regolare orientata di classe C^1 parametrizzata da $(u, v) \mapsto p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Dato che $dx(u, v) \wedge$

$dy(u,v) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du \wedge dv$, $dx(u,v) \wedge dz(u,v) = \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\, du \wedge dv$ e $dy(u,v) \wedge dz(u,v) = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, du \wedge dv$, risulta naturale definire

$$\int_S \omega := \int_R \left[F_1(p(u,v)) \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - F_2(p(u,v)) \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + F_3(p(u,v)) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du \wedge dv,$$

dove l'integrale a secondo membro è del tipo $\int_R f(u,v) du \wedge dv := \pm \int_R f(u,v) du dv$, con il segno $\pm$ scelto a seconda dell'orientazione fissata su $R \subset \mathbb{R}^2$.

Ad una 2-forma $\omega = F_1 dy \wedge dz - F_2 dx \wedge dz + F_3 dx \wedge dy$ in $\mathbb{R}^3$ è associato il campo di vettori $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ (e viceversa). L'integrale di ω su S corrisponde pertanto al flusso di $\vec{F}$ attraverso S.

Una 3-forma ω di classe C^1 su $A \subset \mathbb{R}^3$ è data da una funzione $p \mapsto \omega(p) = F(p) dx \wedge dy \wedge dz$, con $F \in C^1(A; \mathbb{R})$. Una 0-forma ω è semplicemente una funzione $\omega \in C^1(A; \mathbb{R})$.

Definiamo un operatore d (differenziale esterno) che manda k-forme in $(k+1)$-forme, in questo modo: se ω è una 0-forma (ossia una funzione scalare), $d\omega(p)$ coincide con il differenziale di ω in p. Se $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, si pone $d\omega = dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz$. Analogamente, se $\omega = F_1 dy \wedge dz - F_2 dx \wedge dz + F_3 dx \wedge dy$, si pone $d\omega = dF_1 \wedge dy \wedge dz - dF_2 \wedge dx \wedge dz + dF_3 \wedge dx \wedge dy$.

In particolare, se la k-forma differenziale ω è associata ad un campo vettoriale $\vec{F}$, allora $d\omega$ è associata a $\mathrm{rot}\vec{F}$ se $k = 1$, e a $\mathrm{div}\vec{F}$ se $k = 2$, mentre nel caso $k = 0$, la 1-forma $d\omega$ è associata al gradiente della funzione scalare ω.

Una k-forma differenziale ω tale che $d\omega = 0$ in un dominio A si dice chiusa in A, mentre se esiste una $(k-1)$-forma differenziale Φ tale che $\omega = d\Phi$ in A, allora ω si dice esatta in A.

Le 1-forme chiuse sono associate ai campi irrotazionali, quelle esatte ai campi conservativi, mentre le 2-forme chiuse sono associate ai campi solenoidali, e quelle esatte ai campi che ammettono un potenziale vettore.

Esempio: il tensore elettromagnetico F è la 2-forma differenziale nello spazio-tempo $\mathbb{R}^4$ definita da $F = B_1 dy \wedge dz - B_2 dx \wedge dz + B_3 dx \wedge dy + E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt$, dove $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ è il campo magnetico e $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ è il campo elettrico. Una delle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo asserisce che $dF = 0$, ossia F è una forma chiusa. Le equazioni risultanti per $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono rispettivamente $\mathrm{rot}\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ e $\mathrm{div}\vec{B} = 0$.

Assumendo la necessaria regolarità, in virtù del Teorema di Schwarz si ha che $d(d\omega) = 0$ (ovvero una forma esatta è necessariamente chiusa), mentre una forma chiusa in A è esatta in A sotto certe ipotesi sul dominio (ad esempio, A semplicemente connesso nel caso delle 1-forme). Una ipotesi non ottimale ma indipendente dal grado della forma differenziale e dalla dimensione dello spazio ambiente è che A sia convesso (Lemma di Poincaré).

Esempio: nel dominio convesso $\mathbb{R}^4$, la forma chiusa F dell'esempio precedente è esatta, ovvero $F = d\Omega$, con $\Omega = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz + \Phi dt$, dove $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ è il potenziale vettore, e Φ è il potenziale scalare. Si ha in particolare $\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\Phi$, $\vec{B} =$rot$\vec{A}$.

Teorema di Stokes per forme differenziali: sia ω una $(k-1)$-forma differenziale di classe C^1 su $A \subset \mathbb{R}^N$, con $1 \leq k \leq N$, e sia $S \subset A$ una k-superficie di classe C^1 orientata mediante una parametrizzazione regolare fino al bordo $p : R \subset \mathbb{R}^k \to S$, con $R = \Pi_{i=1}^k [a_i, b_i]$. Allora si ha

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \,.$$