

*Università degli Studi di Verona - Corso di Laurea in
Matematica Applicata*

Esame di Modelli Matematici per la Biologia - A.A. 06/07, M. Squassina

Appello d'esame N.1, 21 Giugno 2007 - Sessione Estiva

Nome, Cognome e Matricola:

Indicazioni: Scrivere *nome, cognome e matricola* in stampatello. I compiti anonimi non saranno corretti. La durata dell'esame è di **120** min. Libri e calcolatrici grafiche non sono consentite. Oltre ai punteggi indicati nei vari esercizi, saranno aggiunti da **1 a 10** punti per la qualità espositiva (totale max: **40** punti). La *lode* si ottiene con un voto in **[35, 40]**.

Problema 1 [+10] Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri il modello di interazione tra popolazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 2x^2 - (2 + \alpha)x \\ \dot{y} = -xy - \alpha y. \end{cases}$$

- (a) [+2] determinare gli equilibri del sistema al variare di α ;
- (b) [+4] disegnare le traiettorie per almeno un valore di α ;
- (c) [+4] è possibile concludere qualcosa circa l'esistenza di cicli limite?

Problema 2 [+8] Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - x(x^4 + y^4) \\ \dot{y} = -2x + y - y(x^4 + y^4). \end{cases}$$

Dopo aver provato che l'origine è l'unico punto di equilibrio e dopo averne studiato la natura [+3], dire se il sistema ammette un ciclo limite stabile giustificando le conclusioni [+5].

Suggerimento: per $r > 0$ sufficientemente piccolo ed $R > 0$ sufficientemente grande l'anello

$$\Omega_{r,R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

è un insieme invariante per il sistema. Dopo aver verificato questa affermazione, si utilizzi il teorema di Poincaré-Bendixon.

Problema 3 [+12] Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e si consideri il modello Malthusiano saturato:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+x_n} \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) [+2] determinare gli equilibri del sistema e al variare di α studiarne la natura;
- (b) [+4] tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri;
- (c) [+6] dire se esistono orbite periodiche per qualche valore di α ;