Dinamica dei sistemi di punti materiali.

Sistema discreto: $S = \{ m_i, i = 1 \dots N\}$
Sistema continuo: $S=\int_M dm=\int_V \rho(r)dV$, essendo $\rho(r)=dm/dV$

N.B.: Sappiamo, dallo studio della Dinamica del punto materiale, che per il punto materiale valgono le seguenti relazioni fra le grandezze dinamiche $\mathbf{p}$, E_k e $\mathbf{L}_O$ e la $\mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i$$

$$E_k = ½mv^2, \qquad dE_k = dW = \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r} = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}\wedge\mathbf{p} \qquad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r}\wedge\mathbf{F}_R = \mathbf{r}\wedge(\sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i)$$

Ci proponiamo di generalizzare i risultati relativi alla dinamica di un punto materiale ai sistemi di particelle.

Equazione del moto della particella i–ma (*legge di Newton*):

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = F_i^{(I)} + F_i^{(E)} \qquad (1)$$

Forza risultante agente sulla particella i–ma come risultante di forze esterne e delle forze interne al sistema S

Forze esterne e forze interne: $F_i^{(R)} = F_i^{(I)} + F_i^{(E)}$,

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_j \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_1^R{}_k \mathbf{F}^{(e)}{}_{ik}$$

Vale il principio di azione/reazione, per cui $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{-}\ \mathbf{F}_{ji}$.

Equazione del moto della singola particella i–ma:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

cioé un'equazione differenziale funzione di $(N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t)$.

Per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in 6N+1 incognite (3N+3N+t).

Cosa si sa fare con i sistemi di punti materiali? Descrizione del moto attraverso la definizione di grandezze dinamiche collettive. In tale modo si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che delle singole particelle.

Grandezze collettive = riferite al tutto S: $\sum_i F_i^{(R)}$, $\sum_i \mathbf{p}_i$, $\sum_i E_{k,i}$, $\sum_i L_{O,i}$

$$\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i \left[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}\right] = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)}$$

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i (m_i \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i E_{k,i} = \sum_1^N{}_i (½ m_i v_i^2)$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i)$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di capire cosa indicano e di dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{P}s/dt = \mathbf{?}$$

$$dE_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \mathbf{?}$$

Calcolo della risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sul sistema S, a partire dall'equazione del moto (1):

$$\sum_1^N{}_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i \left[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}\right] =$$
$$= \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

essendo $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ a causa del principio di azione–reazione ($\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$). Infatti: $\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i \left[\sum_1^N{}_j \mathbf{F}^{(i)}_{ij}\right] = \sum_1^N{}_{ij\,(j\neq i)} \mathbf{F}^{(i)}_{ij} = 0$.

In conclusione sarà:

$$\sum_1{}^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} \qquad (2)$$

<u>Verifica</u>: per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = -\,\mathbf{F}_{12}$:

$$\sum_1{}^2{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} =$$
$$= \mathbf{F}_{12} + (-\,\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = -\,\mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:
$\sum_1{}^3{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (-\,\mathbf{F}_{12})$
$+ \mathbf{F}_{23} + (-\,\mathbf{F}_{13}) + (-\,F_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}.$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

In definitiva la risultante di tutte le forze:

$$\sum_1{}^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}_i = \sum_1{}^N{}_i\, [\mathbf{F}_i{}^{(I)} + \mathbf{F}_i{}^{(E)}] = \sum_i \mathbf{F}_i{}^{(I)} + \sum_i \mathbf{F}_i{}^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S{}^{(R)}$$

La risultante delle forse esterne che agiscono su un sistema di particelle <u>è formalmente identica</u> ($\mathbf{F}_S{}^{(R)}$) alla risultante di un sistema di forze agenti su una particella, per cui vale la legge di Newton: $\mathbf{F}_R = m\mathbf{a}$. E’ pensabile di trattare il sistema S come una super particella per cui si possa scrivere l’equivalente della II legge della dinamica ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)?

Per la massa del sistema non c’è problema: $M_S = \sum_1{}^N{}_i\, m_i$, $m_i \in S$.

Per l’accelerazione bisogna fare riferimento alla <u>media ponderata</u> delle accelerazioni delle singole particelle pesate ,mediante il loro specifico coefficiente di inerzia. Ma per arrivare a capire meglio di che si tratta, introduciamo il concetto di centro di massa (CM) di un sistema discreto di punti materiali e studiamone le proprietà. Il CM è un punto geometrico caratteristico di ogni sistema di PM, la cui posizione è individuata da $\mathbf{r}_{CM}$.
Nota Bene: Il centro di massa di un sistema di punti materiali non troppo esteso coincide anche con il centro di gravità o baricentro, cioè con il centro delle forze peso di tutte le particelle del sistema.

Centro di massa di un sistema di particelle.

Definizione e proprietà: Vettore posizione del CM

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$$

E dato che $M_S = \sum_1^N{}_i\, m_i$ si ha, anche, $\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i / M_S$

<u>Nota Bene</u>: Il CM è una proprietà intrinseca del sistema. La sua posizione quindi è indipendente da Oxyz, mentre le sue coordinate dipendono dalla scelta del sistema Oxyz:

$$x_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, x_i / M_S,\ y_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, y_i / M_S,\ z_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, z_i / M_S$$

Il caso di due particelle a distanza *d* l'una dall'altra:

– Sistema O′x′ tale che m_1 si trovi in O′ e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1\, 0 + m_2\, d] / [m_1 + m_2] = m_2\, d/[m_1 + m_2]$$

= Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1\, x_1 + m_2\, x_2] / [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1\, x_1 + m_2\, (x_1 + d)] / [m_1 + m_2] \\ &= x_1 + m_2\, d/(m_1+m_2) \\ &= x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r'}_{CM}$

<u>Velocità e accelerazione del CM</u>:

1) $\mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$ ($v_{X,CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_{xi} / \sum_1^N{}_i\, m_i$, etc.)

2) $\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$ ($a_{X,CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, a_{xi} / \sum_1^N{}_i\, m_i$, etc.)

E la (2) $\sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)}$ si può scrivere come: $M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$

In alternativa $\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{a}_{CM}$ si ottengono da M $\mathbf{r}_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i$.

1') M $\mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i\, \mathbf{v}_i$ direttamente da M d$\mathbf{r}_{CM}$/dt $= \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, (d\mathbf{r}_i/dt)$

2') M $\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i\, \mathbf{a}_i$ direttamente da M d$\mathbf{v}_{CM}$/dt $= \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, (d\mathbf{v}_i/dt)$

Leggi cardinali della dinamica di sistemi di punti materiali

1) Sistema isolato: (non agiscono forze esterne: $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0}$)
- conservazione della quantità di moto totale: $\mathbf{P}_S$ = costante
- conservazione del momento della quantità di moto del sistema: $\mathbf{L}_{O,S}$ = costante.

N.B.: Si tratta di un fatto sperimentale.

$\mathbf{P}_S$ = costante $\Rightarrow \mathbf{P}_S = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{p}_i = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM}$ = cost.!;

$\mathbf{L}_{O,S}$ = costante $\Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$ = costante!

Conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato (sul quale non agiscono forze esterne):

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{costante.}$$

Esempio di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne;
– granata che esplode nello spazio in assenza di gravità.
Caso di particolare interesse per le applicazioni: Conservazione di una delle componenti della quantità di moto totale del sistema:

$$Mv_{CM,X} = P_{S,X}.$$

Esempi in cui si conserva una sola componente di $\mathbf{P}_S$:
– uomo che si sposta su una piattaforma posta su un piano liscio;
– moto di un corpo di massa m che scivola su un cuneo di massa M appoggiato a un piano orizzontale liscio: $0 = m\, v_x + M\, V_x$.

2) Sistema di punti materiali non–isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{non è più costante, ma } \mathbf{P}_S(t)$$

Derivazione della relazione fra la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze esterne agenti sulle particelle del sistema:

$$d\mathbf{P}_S/dt = d(\sum_1^N{}_i\ \mathbf{p}_i)/dt = \sum_1^N{}_i\ (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(R)}$$

$$= \sum_1^N{}_i\ [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

essendo $F^{(INT)} = 0$ per il principio di azione–reazione.

L'espressione:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)}$$

costituisce la I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi e vale in un sistema di riferimento inerziale o del laboratorio (sistema L).

Tale legge si può anche scrivere come: $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\sum_1^N{}_i\ m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{F}_i^{(E)} \qquad \text{o equivalentemente} \Rightarrow \qquad M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Esiste una seconda legge (II legge cardinale) della dinamica di sistemi che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S al momento delle forze esterne rispetto ad O.

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i\ \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

1') Sistema isolato: sappiamo che il $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \text{costante!}$$

In tal caso il <u>teorema del momento angolare</u> dà $d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, d\mathbf{L}_{O,i}/dt = \sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{O,i}$$
$$= \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

ma non essendoci forze esterne (i.e.: $\mathbf{F}_{ik} \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$), si avrà pure:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{Oi}^{(I)} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>Sistema isolato</u>: risultante dei momenti delle forze interne = 0,

N.B.: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_1^N{}_{i,j\,(j\neq i)}\, \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij}{}^{(I)} = \mathbf{0}$

Tale fatto sperimenatale è sempre verificato e comporta che oltre ad essere $\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji} = -\,\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij}$, come già sappiamo del III principio della dinamica del PM, si abbia pure che $\mathbf{r}_{ij} \,//\, \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij}$, cioè che le forze mutue siano dirette lungo la congiungente dei due corpi in interazione.

<u>Verifica</u>: per un sistema a due particelle (sistema a due corpi):

$$\sum_1^2{}_j\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^2{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \sum_1^2{}_{j\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} =$$
$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_1^2{}_{i,j\,(j\neq i)}\, \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = \mathbf{0},$$

Per un sistema di 3 particelle:

$$\sum_1^3{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^3{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \sum_1^3{}_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} =$$
$$= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} =$$
$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} =$$
$$= \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] +$$
$$+ \frac{1}{2}\,[\mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31}] + \frac{1}{2}[\mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{i,j\,(j\neq i)}\, \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = \mathbf{0}$$

E analogamente si può verificare per N = 4, 5, 6, etc.

2') Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{OS}/dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) =$$
$$= \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_1^N{}_i \ \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_1^N{}_i \ \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

essendo, come abbiamo visto $\sum_1^N{}_i \ \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \mathbf{0}$, ossia $\boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0}$.

In conclusione: $d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \ \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$,
che costituisce la II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi.

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne = 0 ($\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = 0$) e il risultante dei momenti delle forze interne = 0 ($\sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = 0$).

Sistema L: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M \, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \ \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Le due leggi ricavate più sopra sono state ottenute in un sistema di riferimento inerziale, dove vale la legge di Newton, come ad esempio un sistema in coordinate cartesiane Oxyz, che d'ora in poi identificheremo con il sistema del Laboratorio (sistema L).
Le due leggi cardinali della dinamica dei sistemi valgono anche nel Sistema di riferimento del centro di massa di S (Sistema C).

Sistema C: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi

Sistema C: Sistema di riferimento del centro di massa. Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi cartesiani paralleli agli assi x,y,z di Oxyz.

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

Calcolo delle grandezze dinamiche: $\mathbf{P}'_S$, $E'_{S,k}$ e $\mathbf{L}'_{CM}$.

$\mathbf{P}'_S = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{p}'_i = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i\, E'_{k,i} = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i\, v'^2_i = ½ \sum_1^N{}_i\, (p'^2_i/m_i)$

$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i$

Sistema C: sistema a quantità di moto totale nulla: $\mathbf{P}'_S = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$

Dimostrazione:

$\mathbf{P}'_S = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}'_i = \sum_1^N{}_i\, m_i\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}) = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_i - \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, i.e.: $\sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}'_i = \sum_1^N{}_i\, m_i\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM})$

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

Nota Bene: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (anche se CM è in moto, e pure accelerato!).

Sistema L:

Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

– I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1{}^N{}_i \mathbf{F}_i{}^{(E)};$$

equivalente a :

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

–II[a] legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O\,/dt = d(\sum_1{}^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1{}^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{0,i}{}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0{}^{(EXT)}.$$

Sistema C:

– I[a] legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$, ma

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_1{}^N{}_i \mathbf{F}_i{}^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II[a] legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1{}^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}{}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}{}^{(EXT)}$.

Energia cinetica di un sistema S:

A questo punto resta da vedere come si comporta la grandezza dinamica collettiva energia, e in particolare l’energia cinetica del sistema S nei due sistemi di riferimento L e C**:**

Energia cinetica di un sistema S:

$E_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i E_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i \frac{1}{2} m_i v_i{}^2$ (nel sistema L, ancorato in O)

$E'_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i E'_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i \frac{1}{2} m_i v'_i{}^2$ (nel sistema C, ancorato al CM)

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna, i.e.: $E_{k,S}{}^{INT}$

Energia cinetica e lavoro delle forze (interne ed esterne) per un sistema S di punti materiali.

N.B.: Teorema dell'energia cinetica vale anche per i sistemi di PM

Lavoro delle forze agenti su un sistema di particelle nel sistema L:

Lavoro infinitesimo o elementare delle forze interne:

$$dW^{INT} = \sum_1^N{}_i \, dW^{(I)}_i = \sum_1^N{}_i \, \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i$$

Lavoro infinitesimo o elementare delle forze esterne:

$$dW^{EXT} = \sum_1^N{}_i \, dW^{(E)}_i = \sum_1^N{}_i \, \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i$$

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle:

$$\Delta E_{k,S} = W^{TOT} = W^{INT} + W^{EXT}$$

$$E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W_{AB}{}^{INT} + W_{AB}{}^{EXT}$$

dove A e B indicano la configurazione iniziale e finale del sistema S (cioé: l'insieme degli stati, posizione + velocità delle singole particelle che formano il sistema).

Se le forze interne sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale delle forze interne:

$dE_P{}^{INT} = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_{i,j\,(j\neq i)} \, dE_p{}^{int}\,(\mathbf{r}_{ij})$, con $dE_p{}^{int}\,(\mathbf{r}_{ij}) = -\,\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_{ij}$,

$\Rightarrow dE_P{}^{INT} = -\,\frac{1}{2}\sum_1^N{}_{i,j\,(j\neq i)} \, \mathbf{F}^{(i)}(r_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_{ij}, = -\,\sum_1^N{}_i \, dWi^{(i)} = -\,dW^{INT}$

E quindi, per il teorema dell'energia cinetica, si avrà anche:

$E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = -\,\Delta E_P{}^{INT} + W^{EXT}$, ossia $\Delta E_{k,S} + \Delta E_P{}^{INT} = W^{EXT}$

Si definisce Energia propria del sistema come: $U_S = E_{k,S} + E_P{}^{INT}$.

Vale la relazione $\Delta(E_{k,S} + E_P^{INT}) = W^{EXT}$, ossia $\Delta U_S = W^{EXT}$

Ossia il lavoro delle forze esterne di un sistema di particelle è uguale alla variazione di energia propria del sistema.

Se poi anche le forze esterne sono conservative, e quindi si può definire un'energia potenziale delle forze esterne:

$$dE_P^{EXT} = -\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)}\cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_1^N{}_i dWi^{(E)} = -dW^{EXT},$$

allora si potrà scrivere: $\Delta U = -\Delta E_P^{EXT}$, e quindi $\Delta(U + E_P^{EXT}) = 0$, cioè:

$$\Delta E_{T,S} = 0,$$

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$.

Conservazione della Energia Totale meccanica $E_{T,S}$ di un sistema S di particelle soggette all'azione di sole forze conservative interne ed esterne:

$$E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT} = \text{ costante del moto.}$$

Esempio: Due corpi puntiformi collegati fra loro da una molla lanciati in aria e soggetto all'azione del campo di forza gravitazionale della terra.

Nota Bene: Dipendenza di $E_{k,S}$ dal sistema di riferimento scelto e indipendenza di E_P^{INT} dal sistema scelto.

Nel sistema C, ancorato al CM, dove $E_{k,S}^{INT} = \sum_1^N{}_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i$

la somma di $E_{k,S}^{INT}$ e di E_P^{INT}:

$$E_{k,S}^{INT} + E_p^{INT} = (E_{k,S} + E_P)^{INT} = E_S^{INT}$$

è chiamata Energia Interna del sistema S (E_S^{INT} o, anche, U_S^{INT}).

Teoremi di Konig

Sono relazioni che correlano le espressioni delle grandezze dinamiche collettive di un sistema S di punti materiali (cioé: quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica del sistema S) calcolate nel sistema L e nel sistema C

Sono noti anche come teoremi di Konig 1) della quantità di moto, 2) del momento della quantità di moto e 3) dell'energia cinetica.

1) – quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M\mathbf{v}_{CM}$.

Dimostrazione:

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}_i = \sum_1^N{}_i\, m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i)$$
$$= (\sum_1^N{}_i\, m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{0} = M\mathbf{v}_{CM}$$

2) – momento della quantità di moto: $\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

Dimostrazione:

$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_1^N{}_i\, (\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i) \wedge m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) =$
$= \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i + \sum_1^N{}_i$
$\mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_1^N{}_i\, m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

perchè: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, (m_i \mathbf{r}'_i) \wedge \mathbf{v}_{CM} = 0$
e così pure: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge \sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}'_i = 0$.

N. B.: Conseguenze del teorema di Konig del momento angolare:

Partendo dalla relazione fra il momento angolare del sistema S calcolati rispetto al polo fisso O (i.e.: $\mathbf{L}_{O,S}$) e rispetto a un punto Ω (i.e.: $\mathbf{L}_{\Omega,S}$), si può dimostrare che il teorema del momento angolare vale oltre che per Ω fisso, anche quando Ω non è fisso purché sia coincidente con il CM del sistema di punti materiali.

Dimostrazione della validità del teorema del momento angolare rispetto al CM, calcolato usando sia le grandezze dinamiche nel sistema L che nel sistema C:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$$

– Dimostrazione con le grandezze dinamiche del sistema L:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, r'_i \wedge m_i \mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}$$

= Dimostrazione con le grandezze dinamiche nel sistema C:

$$d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, r'_i \wedge m_i \mathbf{a}'_i = \sum_1^N{}_i\, r'_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} - m_i \mathbf{a}_{CM}) =$$
$$= \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$$

perchè: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = 0$ e $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge m_i \mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, (m_i \mathbf{r'}_i) \wedge a_{CM} = 0$.

3) – dell'energia cinetica: $E_{k,S} = ½\, Mv_{CM}^2 + E'_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT}$

Dimostrazione:

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i\, E_{k,i} = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i v_i^2 = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i =$$
$$= ½ \sum_1^N{}_i\, m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i) \cdot (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i) =$$
$$= ½ \sum_1^N{}_i\, m_i v_{CM}^2 + \sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v'}_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + ½ \sum_1^N{}_i\, m_i v'^2_i =$$
$$= ½\, Mv_{CM}^2 + E'_{k,S}.$$

essendo $\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v'}_i \cdot \mathbf{v}_{CM} = 0$, perché $\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v'}_i = 0$.

Applicazione dei Teoremi di Konig: Scomposizione del moto in moto orbitale e del moto intrinseco o interno.
Esempio: il moto della luna attorno alla terra si può scomporre nel moto orbitale di un punto materiale avente la massa M_L della in moto con la velocità v_{CM} del centro di massa della luna e nel moto di intrinseco (moto di rotazione della luna attorno ad un asse passante per il suo CM), che è proprio della luna e indipendente dal sistema di riferimento usato per l'osservazione.

Sistemi a due corpi: massa ridotta.

Problema dei due corpi: studio del moto relativo di due corpi supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua.

Esempio: moto di due corpi celesti in interazione: moto di un pianeta relativo al sole, moto della luna rispetto alla terra, moto dell'elettrone rispetto al protone dell'atomo do idrogeno, etc.

Relazioni cinetiche che governano le grandezza cinematiche (posizione velocità e accelerazione) relative dei due corpi in termini delle corrispondenti grandezze individuali nel sistema L e nel sistema C:

N.B.: I vettori posizione, velocità e accelerazione relative dei 2 punti materiali non devono dipendere dal sistema si riferimento L o C che sia:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r'}_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r'}_{21} \,,$$
$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v'}_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v'}_{21},$$
$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a'}_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a'}_{21}.$$

Vettore posizione $\mathbf{r}_{CM}$ del centro di massa del sistema in L:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i + m_2\mathbf{r}_2) / (m_i + m_2)$$

Vettore posizione della particella m_i in C: $\mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$

$$\mathbf{r'}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2 \, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$
$$\mathbf{r'}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1 \, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Vettore velocità della particella m_i in C: $\mathbf{v'}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$

$$\mathbf{v'}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2 \, \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{v'}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1 \, \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

Vettore accelerazione della particella m_i in C: $\mathbf{a'}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$

$\mathbf{a'}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$ con $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$
$\mathbf{a'}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$ con $\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$

N.B.: Nel caso in cui il sistema delle due particelle sia isolato (i.e.: quando non $\exists\, \mathbf{F}_i^{(e)}$), si ha che l'accelerazione $\mathbf{a}_i$ nel sistema L e l'accelerazione $\mathbf{a'}_i$ nel sistema C di ciascuna particella coincidono:

$\mathbf{a'}_1 = \mathbf{a}_1 = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$ $\mathbf{a'}_2 = \mathbf{a}_2 = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$

Problema dei due corpi: Studio del moto relativo dei due PM

Si parte dalla legge di Newton ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}$) per ciascuna delle due particelle, che nel caso di sistema isolato si scrive:

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

ma $\mathbf{F}_{21} = -\, \mathbf{F}_{12}$, e quindi si avrà:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12} / m_1$$
$$\mathbf{a}_2 = -\, \mathbf{F}_{12} / m_2$$

da cui per differenza si ottiene: $\mathbf{a}_{12} =\text{-}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12} / m_1 - \mathbf{F}_{12} / m_2$

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}/\mu.$$

dove μè le <u>massa ridotta</u> del sistema: $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$].

In definitiva, l'equazione del moto relativo di 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione (formanti cioé un sistema isolato), in termini della loro massa ridotta si scrive:

$$\mu\mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Ma questa è anche la legge di Newton, che descrive il moto di una particella di massa μ sotto l'azione di una forza F_{12} in un SRI ancorato nel CM del sistema (che si muove di moto rettilineo uniforme, dato che il sistema è isolato!) .

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa μ che si muove sotto l'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua $\mathbf{F}_{12}$ e che nel sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

<u>Esercizio di applicazione</u>: Coppia di punti materiale di massa m_1 e m_2, rispettivamente, posti in quiete su di un piano orizzontale perfettamente liscio, e ancorati alle due estremità di un molla scarica, disposta orizzontalmente, di costante elastica *k* e avente lunghezza di riposo l_0. A $t_0 = 0$ al corpo di massa $m_1$viene applicato un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\, \mathbf{i}$, in direzione parallela all'asse principale di simmetria della molla e verso tale da comprimerla. Studiare il moto del sistema per $t > 0$, determinando in particolare:

a) la posizione iniziale $x_{CM}(t = 0)$ del CM,
b) la legge oraria del moto del centro di massa del sistema (cioè: il moto di traslazione nel sistema di riferimento L);
c) l'equazione del moto relativo di due punti (cioè: il loro moto oscillatorio nel sistema di riferimento C);
d) le legge oraria del moto relativo, tenendo in debita conto delle condizioni iniziali del sistema dei due punti all'istante $t = 0_+$
e) le legge oraria di ciascuno dei due punti materiali nel sistema C;
f) le legge oraria del moto di ciascuno dei due punti materiali nel sistema di riferimento L.

<u>Altro esempio di applicazione</u>: Calcolo della tensione T di un'asta rigida e priva di massa, di lunghezza *L* con due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 attaccati alle estremità di essa (manubrio) e in moto rotazionale attorno al centro di massa con velocità angolare ω:

$$T = \mu\, L\, \omega^2.$$

Espressione delle grandezze dinamiche collettive e dei teoremi della dinamica per un sistema a due particelle, in termini delle grandezze relative e della massa ridotta del sistema.

Quantità di moto $\mathbf{P}_S'$ di un sistemas a due corpi nel sistema C:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{0},$$

dato che $\mathbf{p}_1' = - \mathbf{p}_2'$, e $\mathbf{v}_1' = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$,

Si avrà anche:

$\mathbf{p}_1' = m_1\mathbf{v}_1' = m_1m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) = \mu\, \mathbf{v}_{12}$
$\mathbf{p}_2' = m_2\mathbf{v}_2' = m_2m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) = \mu\, \mathbf{v}_{21} = - \mu\, \mathbf{v}_{12}$.

Quindi: $p' = p_1' = p_2' = \mu\, v_{12}$ e, ovviamente:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mu\, \mathbf{v}_{12} - \mu\, \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

Energia cinetica interna E_k^{INT} di un sistema di 2 particelle:

$$E_k^{INT} = ½\mu\, v_{12}^2 = p'^2/2\mu.$$

Dimostrazione:

$E_{k,INT} = ½\, m_1\, v_1'^2 + ½\, m_2\, v_2'^2$
$= ½\, m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)]^2 + ½\, m_2\, [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)]^2 =$
$= ½\, m_1m_2^2\, \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 + ½\, m2m^{12}\, \mathbf{v}_{21}^2/(m_1+m_2)^2 =$
$= ½\, m_1m_2\, (m_1+m_2)\, \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 = ½\, m_1m_2\, \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2) =$
$= ½\, \mu\, \mathbf{v}_{12}^2$

Momento angolare interno o intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$ del sistema:

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}\, .$$

Dinostrazione:

$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_1' \wedge m_1\mathbf{v}_1' + \mathbf{r}_2' \wedge m_2\mathbf{v}_2' =$

$= m_2\ \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + m_1\ \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \wedge m_2 [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] =$

$= m_2\mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + [-\ m_1\ \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)] \wedge m_2 [-\ m_1\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge m_1m_2^2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 + \mathbf{r}_{12} \wedge m_1^2m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1m_2^2/(m_1+m_2)^2 + m_1^2m_2/(m_1+m_2)^2]\ \mathbf{v}_{12} =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1m_2\,(m_1+m_2)/(m_1+m_2)^2]\ \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}$

<u>Teoremi di Konig per un sistema isolato a due corpi</u>, la cui velocità $\mathbf{v}_{CM}$ costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$\mathbf{P}_S = M\ \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P'}_S = M\ \mathbf{v}_{CM}$

$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT} = ½\ Mv_{CM}^2 + ½\ \mu\ v_{12}^2$

$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}$

<u>Esercizio di applicazione</u>: Due blocchi di massa m_1 e m_2, posti su piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica *k* e di lunghezza a riposo l_0, con l'asse di simmetria lungo l'asse x. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con la massa m_1 appoggiata alla base di una parete verticale fissa con la molla completamente compressa. All'istante $t = 0$ la molla viene lasciata espandere**.** Studiare il moto del sistema per t>0, determinando:

a) l'accelerazione del CM del sistema all'istante $t = 0_+$;

b) la legge oraria del moto del CM dopo che il blocco di massa m_1 ha abbandonato la parete verticale;

c) le leggi orarie del moto dei due blocchi nei sistemi C e L, tenendo conto delle condizioni nell'istante di distacco dalla parete.
d) l'energia meccanica totale del sistema dopo il distacco dalla parete.
e) l'energia interna del sistema dopo il distacco dalla parete.

Teoremi della dinamica nel caso di un sistema S:

Teorema dell'impulso:

$$\mathbf{J}_0 = \Delta \mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i \Delta \mathbf{p}_i$$

Teorema del momento dell'impulso per un sistema di punti materiali:

$$\mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{J}_0 = = \Delta \mathbf{L}_{0,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_{0,i} \wedge \Delta \mathbf{p}_i$$

<u>Esempi</u> di applicazione dei teoremi della dinamica: manubrio, posto su un piano orizzontale liscio non vincolato e colpito a un'estremità.

1) Manubrio (simmetrico o asimmetrico) costituito da due masse m_1 e m_2, collegate da un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza *L*. Il manubrio è inizialmente posto in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio. All'istante t = 0 si applica un impulso alla particella m_2 un impulso $\mathbf{J}_0$ che formi un angolo θ con l'asse di simmetria principale del manubrio. Studiare il moto del manubrio, determinando in particolare:
a) la velocità del CM;
b) la velocità angolare di rotazione del manubrio;
c) l'energia cinetica interna;
d) il momento angolare intrinseco;
e) l'energia meccanica totale del sistema
f) la tensione dell'asta.