Capitolo 1

Numeri reali

1 Breve premessa

Assumeremo come postulato che esista il *sistema dei numeri reali*, ossia un'insieme $\mathbb{R}$ di numeri, che chiameremo appunto numeri reali, su cui sia possibile eseguire almeno quattro operazioni elementari (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e in cui si possa dire quale tra due numeri reali dati sia più grande dell'altro (ordinamento).

2 Proprietà fondamentali

Cominciamo con le proprietà di base del sistema dei numeri reali.

2.1 Proprietà algebriche

Dati due numeri reali x, y, sono definiti il numero reale somma $x + y$ ed il numero reale prodotto xy. Per ogni numero reale x, si denota con $-x$ l'opposto di x e, se $x \neq 0$, con x^{-1} il reciproco di x. Esistono infine due numeri reali, denotati con i simboli 0 e 1, che godono di particolari proprietà rispetto a somma e prodotto. Le proprietà algebriche fondamentali possono essere riassunte dicendo che, per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$, si ha

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,, \qquad x + y = y + x\,,$$

$$x + 0 = x\,, \qquad x + (-x) = 0\,,$$

$$(xy)z = x(yz)\,, \qquad xy = yx\,,$$

$$x \cdot 1 = x\,, \qquad x \neq 0 \implies xx^{-1} = 1\,,$$

$$(x + y)z = xz + yz\,,$$

$$0 \neq 1 \, .$$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si stabiliscono alcune ovvie notazioni:

$$x - y := x + (-y) \, ,$$

$$\frac{x}{y} := x y^{-1} \, .$$

2.2 Proprietà di ordinamento

Per ogni x, y in $\mathbb{R}$, è definita la relazione $x < y$, x minore di y. A partire da questa, sono anche definite, in modo ovvio, le relazioni

$x > y$	x maggiore di y, che significa	$y < x$,
$x \leq y$	x minore o uguale a y, che significa	$x < y \; o \; x = y$,
$x \geq y$	x maggiore o uguale a y, che significa	$x > y \; o \; x = y$.

Un secondo gruppo di proprietà fondamentali, dette di ordinamento, può essere compendiato dicendo che per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$ si ha

$$x \leq x \, ,$$

$$(x \leq y \; e \; y \leq x) \implies x = y \, ,$$

$$(x \leq y \; e \; y \leq z) \implies x \leq z \, ,$$

$$(x \leq y) \, o \, (y \leq x) \, ,$$

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z \, ,$$

$$(x \leq y \; e \; 0 \leq z) \implies xz \leq yz \, .$$

Proviamo alcune semplici conseguenze delle proprietà richiamate.

(2.1) Proposizione *Per ogni x, y, u, z in $\mathbb{R}$ si ha:*

$$x \leq y \; e \; u \leq z \implies x + u \leq y + z \, ,$$

$$x + z = y + z \implies x = y \, ,$$

$$(xz = yz \; e \; z \neq 0) \implies x = y \, ,$$

$$x \cdot 0 = 0 \, ,$$

$$-(-x) = x \, ,$$

$$x \neq 0 \implies (x^{-1})^{-1} = x\,,$$

$$xy = 0 \implies (x = 0 \; o \; y = 0)\,,$$

$$-(xy) = (-x)y\,,$$

$$(x \leq y \; e \; z \leq 0) \implies yz \leq xz\,,$$

$$0 \leq x \cdot x\,.$$

Dimostrazione. Se $x \leq y$ e $u \leq z$, risulta

$$x + u \leq y + u = u + y \leq z + y = y + z\,.$$

Se $x + z = y + z$, si ha

$$x = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y\,.$$

In modo simile si prova la terza affermazione. Risulta

$$0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0\,,$$

da cui $x \cdot 0 = 0$. Poiché

$$-(-x) + (-x) = 0 = x + (-x)\,,$$

si ha $-(-x) = x$. In modo simile si prova la sesta affermazione. Se $xy = 0$, si ha $xy = x \cdot 0$. Ne segue $x = 0$ oppure $y = 0$. Si ha

$$-(xy) + xy = 0 = 0 \cdot y = ((-x) + x)y = (-x)y + xy\,,$$

da cui $-(xy) = (-x)y$. Se $x \leq y$ e $z \leq 0$, risulta anzitutto

$$0 = z + (-z) \leq 0 + (-z) = -z\,,$$

da cui

$$-xz = x(-z) \leq y(-z) = -yz\,.$$

Ne segue

$$yz = yz + xz + (-xz) \leq yz + xz + (-yz) = xz\,.$$

Si ha $0 \leq x$ oppure $x \leq 0$. In entrambi i casi ne segue

$$0 = 0 \cdot x \leq x \cdot x\,,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

Per ogni x in $\mathbb{R}$ si verifica una ed una sola delle seguenti eventualità:

$$x < 0\,, \qquad x = 0\,, \qquad x > 0\,.$$

(2.2) Definizione *Un numero reale x si dice*

- positivo*, se* $x \geq 0$*;*

- strettamente positivo*, se* $x > 0$*;*

- negativo*, se* $x \leq 0$*;*

- strettamente negativo*, se* $x < 0$.

Nel corso del seguito, porremo

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

ossia gli insiemi dei numeri reali positivi e negativi.

3 Insiemi e funzioni

Richiamiamo ora l'ultima proprietà fondamentale del sistema dei numeri reali.

(Principio di Dedekind) *Se X ed Y sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $x \leq y$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$, allora esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq z \leq y$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$.*

Queste sono le proprietà fondamentali del sistema dei numeri reali. Tutto quanto dedurremo in seguito si baserà unicamente su queste affermazioni.

(3.1) Definizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

Il numero reale positivo $|x|$ si chiama valore assoluto *o* modulo *di x.*

(3.2) Teorema *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y\,,$$

$$|x| < y \iff -y < x < y\,,$$

$$|x| = 0 \iff x = 0\,,$$

$$|-x| = |x|\,,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,,$$

$$x \neq 0 \implies |x^{-1}| = |x|^{-1},$$

$$|xy| = |x||y|.$$

Dimostrazione. Le prime quattro proprietà si verificano esaminando i due casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Evidentemente si ha $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, per cui

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Ne segue $|x + y| \leq |x| + |y|$. Risulta anche

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Analogamente si ha

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|,$$

per cui

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Ne segue

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Infine le ultime due proprietà possono essere verificate per esercizio. ■

Possedendo degli insiemi, è possibile costruirne di nuovi con specifiche proprietà. Dati due insiemi X ed Y, esistono e sono univocamente determinati gli insiemi $X \cup Y$, $X \cap Y$ e $X \setminus Y$, caratterizzati dal fatto che

$$\forall x : x \in X \cup Y \iff (x \in X \text{ } o \text{ } x \in Y),$$

$$\forall x : x \in X \cap Y \iff (x \in X \text{ } e \text{ } x \in Y),$$

$$\forall x : x \in X \setminus Y \iff (x \in X \text{ } e \text{ } x \notin Y).$$

$X \cup Y$ è *l'unione insiemistica* tra gli insiemi X e Y; $X \cap Y$ è *l'intersezione insiemistica* tra gli insiemi X e Y; $X \setminus Y$ è *il complementare* di Y in X. È anche possibile definire l'unione e l'intersezione di una quantità numerabile di insiemi $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo rispettivamente

$$\forall x : x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \iff \forall n \in \mathbb{N} : x \in X_n,$$

e

$$\forall x : x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \iff \exists n \in \mathbb{N} : x \in X_n.$$

(3.3) Osservazione *Se $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X, si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà*

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus X_n, \qquad X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus X_n,$$

note anche come leggi di De Morgan.

Un'altra nozione fondamentale di carattere insiemistico è quella di *applicazione* o *funzione*. Se X ed Y sono due insiemi, un'applicazione f da X in Y può essere concepita come una "legge" che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di Y. Per ogni $x \in X$, si denota con $f(x)$ l'elemento di Y associato a x da f. Per denotare che f è un'applicazione si adoperano le notazioni

$$f : X \to Y$$

o anche $\{x \mapsto f(x)\}$, a seconda che si voglia porre l'accento sugli insiemi X, Y o sul valore $f(x)$. L'insieme X si chiama *dominio di* f e si denota col simbolo $\mathrm{dom}(f)$, mentre l'insieme Y si chiama *codominio di* f. Per ogni $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ poniamo

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} := \big\{y \in Y : \big(\exists x \in A : f(x) = y\big)\big\} ,$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} .$$

Se $y \in Y$, si usa anche la notazione abbreviata $f^{-1}(y)$ invece di $f^{-1}(\{y\})$.

(3.4) Osservazione *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione e siano $A, B \subseteq X$ e $C, D \subseteq Y$. Allora si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà insiemistiche:*

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) ,$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) ,$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) ,$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) ,$$

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C) .$$

3.1 Funzioni iniettive, suriettive

Vediamo ora alcune importanti classi di funzioni.

(3.5) Definizione *Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* iniettiva, *se per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

(3.6) Esempio *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ è iniettiva, mentre la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non può essere iniettiva, visto che $f(-1) = f(1)$.*

Se $f : X \to Y$ è un'applicazione iniettiva, esiste una ed una sola applicazione da $f(X)$ in X che ad ogni $y \in f(X)$ associa l'elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Tale applicazione si denota col simbolo f^{-1} e si chiama *applicazione inversa* di f.

(3.7) Definizione *Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* suriettiva, *se $f(X) = Y$. Si dice* biiettiva, *se f è iniettiva e suriettiva.*

(3.8) Esempio *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^3$ è suriettiva, mentre la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non può essere suriettiva visto che, ad esempio, il numero reale -1 non appartiene all'immagine di f.*

Siano $f : X \to Y$ e $g : B \to Z$ due applicazioni. Si può allora definire una nuova applicazione da

$$\mathrm{dom}\,(g \circ f) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

in Z associando ad ogni $x \in \mathrm{dom}\,(g \circ f)$ l'elemento $g(f(x)) \in Z$. Tale applicazione si denota col simbolo $g \circ f$ e si chiama *composizione* di f e g. Nel caso particolare in cui $B \subseteq Y$, risulta $\mathrm{dom}\,(g \circ f) = f^{-1}(B)$. Osserviamo che, se $f : X \to Y$ è iniettiva, si ha

$$\forall x \in X : (f^{-1} \circ f)(x) = x\,,$$

$$\forall y \in f(X) : (f \circ f^{-1})(y) = y\,.$$

(3.9) Osservazione *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni iniettive. Si verifica che $g \circ f : X \to Z$ è iniettiva. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni suriettive. Si verifica che $g \circ f : X \to Z$ è suriettiva. Se invece $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono tali che $g \circ f : X \to Z$ sia biiettiva, allora f è iniettiva e g è suriettiva.*

Se $f : X \to Y$ è un'applicazione e $D \subseteq X$, si può definire una nuova applicazione da D in Y associando ad ogni $x \in D$ l'elemento $f(x) \in Y$. Tale applicazione si denota col simbolo $f_{|D}$ e si chiama *restrizione* di f a D. Ovviamente risulta $\mathrm{dom}\left(f_{|D}\right) = D$.

(3.10) Esempio *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$, f non è iniettiva, mentre $f_{|\mathbb{R}^+}$ lo è.*

Se X, Y sono due insiemi e $x \in X$, $y \in Y$, denotiamo con (x, y) *la coppia ordinata* di componenti x ed y. La sua proprietà tipica è che:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2, \;\; y_1 = y_2.$$

Esiste uno ed un solo insieme che ha per elementi esattamente le coppie ordinate (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$. Esso si denota con $X \times Y$ e si chiama *insieme-prodotto* di X ed Y.

Chiudiamo la sezione con una importante definizione.

(3.11) Definizione *Se $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione, il sottoinsieme*

$$\mathscr{G} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; x \in E \;\; e \;\; y = f(x)\big\}$$

di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si chiama grafico *della funzione f.*

3.2 Reali e coordinate cartesiane

Sia r una retta, che penseremo come l'insieme dei suoi punti, e fissiamo su di essa un punto O, detto *origine* ed un punto U detto *punto unità.* Il punto O divide la retta in due semirette, una detta positiva (quella contenente il punto U) e l'altra detta negativa. In tal modo, implicitamente, si stabilisce un *verso di percorrenza* sulla retta, che va dal punto O al punto U. Ad ogni punto geometrico $P \neq O$ della retta r si associa un numero reale $x \in \mathbb{R}$ ponendo $|x| = OP/OU$, ossia il rapporto tra le misure delle lunghezze dei segmenti che congiungono i punti O con P ed O con U rispettivamente. Avremo poi x positivo se P appartiene alla semiretta positiva ed x negativo se P appartiene alla semiretta negativa. Al punto geometrico O si associa il numero reale 0, al punto U si associa il numero reale 1. Dato un numero reale x, ad esso corrisponde uno ed un solo punto geometrico, e viceversa. Diremo allora che x è *l'ascissa* del punto P. Data questa corrispondenza biunivoca tra punti della retta e numeri reali, si parla anche di retta reale. Visto l'orientamento fissato sulla retta, dati due numeri reali x e y con $x < y$, essi corrispondono rispettivamente a due punti P e Q sulla retta tali che Q si trova alla destra di P. Consideriamo ora una seconda retta s nel piano, perpendicolare alla retta r e passante per il punto O, origine della retta r. Nuovamente, sulla retta s, si fissa un orientamento positivo e risulta stabilita una corrispondenza biunivoca tra punti di s e numeri reali. Se Q è un punto di s diremo che il corrispondente numero reale y è *l'ordinata* del punto Q. Risulta cosi naturale stabilire una corrispondenza biunivoca tra punti P del piano e l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri reali, con x ascissa di P ed y ordinata di P. Infatti, dato un punto P del piano, conducendo per P la parallela ad s si incontra l'asse r in un punto P_1 e conducendo per P la parallela ad r si incontra l'asse s in un punto P_2. Ora basta osservare che, per quanto detto in precedenza, a P_1 e P_2 corrispondono univocamente due numeri reali x e y. L'insieme di tutte le possibili coppie di numeri reali (x, y) si denota con $\mathbb{R}^2$. Tale sistema introdotto nel piano viene detto *sistema di coordinate cartesiane* (e il piano stesso viene detto *piano cartesiano*, quando lo si pensa munito delle coordiante cartesiane). Durante il corso acquisiremo gli strumenti utili per effettuare lo studio di funzione, che consiste nel cercare di dare una rappresentazione grafica qualitativa dell'insieme $\mathcal{G}$ all'interno del piano cartesiano. I calcolatori consentono di rappresentare i grafici delle funzioni con un procedimento di interpolazione, ossia prima calcolando un numero finito, ma molto grande, di valori $f(x_j)$, con $x_j \in E$ accendendo quindi sullo schermo i pixels di coordinate $(x_j, f(x_j))$ e infine interpolando i valori ottenuti con una linea spezzata.

4 Estremo superiore e inferiore

(4.1) Definizione *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $M \in E$ è* un massimo *per E, se*

$$\forall x \in E : x \leq M .$$

Diciamo che $m \in E$ è un minimo *per E, se*

$$\forall x \in E : x \geq m .$$

(4.2) Osservazione *Il massimo, se esiste, è unico. Infatti, se M_1 e M_2 sono due massimi per E, si ha $M_1 \leq M_2$ e $M_2 \leq M_1$, da cui $M_1 = M_2$. Esso viene usualmente denotato col simbolo* $\max E$. *Anche il minimo, se esiste, è unico e viene denotato col simbolo* $\min E$.

(4.3) Definizione *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $b \in \mathbb{R}$ è* un maggiorante *per E, se*

$$\forall x \in E : x \leq b .$$

Diciamo che $a \in \mathbb{R}$ è un minorante *per E, se*

$$\forall x \in E : x \geq a .$$

(4.4) Osservazione *Rispetto alle nozioni di massimo e di minimo, i maggioranti e minoranti per un'insieme non sono unici, in generale. Ad esempio, se $E = \{0 \leq x \leq 1\}$, l'insieme dei maggioranti di E è tutto $\{x \geq 1\}$, mentre l'insieme dei minoranti di E è tutto $\{x \leq 0\}$.*

(4.5) Definizione *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che E è*

(a) limitato superiormente*, se E ammette un maggiorante $b \in \mathbb{R}$;*

(b) limitato inferiormente*, se E ammette un minorante $a \in \mathbb{R}$;*

(c) limitato*, se E è limitato sia superiormente che inferiormente.*

(4.6) Teorema *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Denotiamo con Y l'insieme dei maggioranti per E e con X l'insieme dei minoranti per E. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se E è limitato superiormente, allora Y è non vuoto ed ha minimo;*

(b) *se E è limitato inferiormente, allora X è non vuoto ed ha massimo;*

(c) *se E è limitato, risulta* $\max X \leq \min Y$.

Dimostrazione.
(a) L'ipotesi che E sia limitato superiormente equivale proprio a $Y \neq \emptyset$. Dal momento che

$$\forall x \in E,\ \forall y \in Y : x \leq y\,,$$

per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in E,\ \forall y \in Y : x \leq z \leq y\,.$$

Ne segue $z \in Y$, per cui $z = \min Y$.
(b) La dimostrazione è simile.
(c) Sia $x_0 \in E$. Risulta allora

$$\max X \leq x_0 \leq \min Y\,,$$

da cui la tesi. ■

Veniamo ora alle importanti nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

(4.7) Definizione *Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, denotiamo con* $\sup E$ *(*estremo superiore *di E) il minimo dei maggioranti per E. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, denotiamo con* $\inf E$ *(*estremo inferiore *di E) il massimo dei minoranti per E.*

(4.8) Esempio *Consideriamo l'insieme $E = \{0 \leq x < 1\}$. Allora non esiste il massimo di E. D'altronde, poichè l'insieme dei maggioranti di E è $\{x \geq 1\}$ risulta subito* $\sup E = 1$.

(4.9) Proposizione *Se $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette massimo, si ha $\max E = \sup E$. Se E ammette minimo, si ha $\min E = \inf E$.*

Dimostrazione. Sia $M = \max E$. Per ogni $x \in E$ risulta $x \leq M$, per cui M è un maggiorante per E. D'altronde, se y è un maggiorante per E, deve essere $M \leq y$, dal momento che $M \in E$. Pertanto M è il minimo dei maggioranti. Il ragionamento per $\min E$ è simile. ■

(4.10) Esempio *Calcoliamo gli estremi inferiore e superiore dell'insieme*

$$A = \left\{ a_n = 1 - \frac{1}{n} : \ n \geq 1 \right\}.$$

Dato che

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

a_n è minimo quando $1/n$ è massimo quindi per $n = 1$. Dunque

$$\inf(A) = \min(A) = a_1 = 0.$$

Per determinare il $\sup(A)$, osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ne segue che 1 è un maggiorante per A. Per concludere che $\sup(A) = 1$, si deve mostrare che è il minimo dei maggioranti. Dalla definizione si deve quindi verificare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : 1 - \varepsilon < a_{\bar{n}} < 1,$$

ossia $n > 1/\epsilon$. Scegliendo un $\bar{n}$ intero positivo maggiore di $1/\epsilon$, concludiamo che $\sup(A) = 1$, mentre il massimo di A non esiste.

5 Estensione di $\mathbb{R}$ ad $\overline{\mathbb{R}}$

Le nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore giocano un ruolo importante in analisi matematica. Per questo, risulta utile estendere il più possibile la famiglia dei sottoinsiemi E per cui sono definiti $\sup E$ ed $\inf E$. Questa esigenza spinge ad introdurre un ampliamento dell'insieme $\mathbb{R}$.

(5.1) Definizione *Denotiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme*

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ *due ulteriori elementi, denotati con* $-\infty$ *e* $+\infty$ *tali che* $-\infty \neq +\infty$, $-\infty \neq x$ *e* $+\infty \neq x$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. *Gli elementi di* $\overline{\mathbb{R}}$ *si chiamano* numeri reali estesi.

Convenzionalmente porremo $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, si estendono a $\overline{\mathbb{R}}$ le relazioni $x > y$, $x \leq y$ e $x \geq y$ nel modo ovvio. Si verifica allora facilmente che per ogni $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha

$$x \leq x\,,$$

$$(x \leq y \text{ e } y \leq x) \implies x = y\,,$$

$$(x \leq y \text{ e } y \leq z) \implies x \leq z\,,$$

$$(x \leq y) \text{ o } (y \leq x)\,.$$

Richiamiamo inoltre la versione estesa del principio di Dedekind.

(5.2) Teorema (Principio di Dedekind per $\overline{\mathbb{R}}$) *Siano X ed Y due sottoinsiemi non vuoti di $\overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y : x \leq y\,.$$

Allora esiste $z \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y : x \leq z \leq y\,.$$

Introduciamo ora alcuni importanti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, gli intervalli.

(5.3) Definizione *Per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ poniamo*

$$[a, b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\right\}\,,$$

$$[a, b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\right\}\,,$$

$$]a, b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\right\}\,,$$

$$]a, b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\right\}\,.$$

Diciamo che un insieme $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intervallo*, se E può essere posto in una di queste quattro forme per un'opportuna scelta di a e b.*

(5.4) Osservazione *In generale l'unione di intervalli non è più un intervallo. Ad esempio* $[0, 1] \cup [2, 3]$ *non è un intervallo, essendo uguale a* $[0, 3]$ *privato dell'intervallo* $]1, 2[$.

La struttura algebrica di $\mathbb{R}$ può essere parzialmente estesa a $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per definizione:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\} : -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty\,,$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} : +\infty + x = x + \infty = +\infty\,,$$

$$\forall x \in]0, +\infty] : -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty\,,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty\,,$$

$$\forall x \in]0, +\infty] : +\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty\,,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: +\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty\,.$$

In pratica non viene definita la somma di $-\infty$ e $+\infty$ ed il prodotto fra 0 e $+\infty$ o $-\infty$. Le proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto e la proprietà distributiva continuano a valere in $\overline{\mathbb{R}}$, a patto che tutte le espressioni coinvolte siano definite. Inoltre si ha $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$ per ogni $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Le nozioni di massimo, minimo, maggiorante e minorante si adattano in modo ovvio al nuovo ambiente $\overline{\mathbb{R}}$. Inoltre, se X è un insieme e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, si usa scrivere

$$\max_X f, \qquad \max_{x\in X} f(x)$$

invece di $\max f(X)$ e

$$\min_X f, \qquad \min_{x\in X} f(x)$$

invece di $\min f(X)$. Vediamo ora uno dei risultati che giustificano l'introduzione di $\overline{\mathbb{R}}$.

(5.5) Teorema *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *l'insieme Y dei maggioranti per E è non vuoto ed ammette minimo;*

(b) *l'insieme X dei minoranti per E è non vuoto ed ammette massimo;*

(c) *risulta* $\max X \leq \min Y$.

Dimostrazione. Ovviamente $X \neq \emptyset$ ed $Y \neq \emptyset$, perché $-\infty \in X$ e $+\infty \in Y$. A questo punto è sufficiente ripetere la dimostrazione del Teorema (4.6). ■

(5.6) Definizione *Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$, denotiamo con* $\sup E$ *(*estremo superiore *di E) il minimo dei maggioranti per E e con* $\inf E$ *(*estremo inferiore *di E) il massimo dei minoranti per E. Se X è un insieme non vuoto e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, si usa scrivere* $\sup\limits_X f$ *o* $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ *invece di* $\sup f(X)$ *e, similmente,* $\inf\limits_X f$ *o* $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ *invece di* $\inf f(X)$.

(5.7) Proposizione *Se $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ammette massimo, si ha* $\max E = \sup E$. *Se E ammette minimo, si ha* $\min E = \inf E$.

Dimostrazione. È sufficiente ripetere la dimostrazione della Proposizione (4.9). ■

(5.8) Definizione *Sia E un sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è* limitato superiormente, *se $E = \emptyset$ o $\sup E < +\infty$. Diciamo che E è* limitato inferiormente, *se $E = \emptyset$ o $\inf E > -\infty$. Diciamo che E è* limitato, *se E è limitato sia superiormente che inferiormente. Siano X un insieme e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f è* limitata *(risp.* limitata superiormente, limitata inferiormente*), se l'insieme $f(X)$ è limitato (risp. limitato superiormente, limitato inferiormente).*

(5.9) Esempio *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è limitata inferiormente ma non superiormente. La funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è limitata sia inferiormente che superiormente. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ è illimitata sia inferiormente che superiormente.*

(5.10) Definizione *Siano X un insieme e $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni. Se si ha*

$$\forall x \in X : \; f(x) \leq g(x) \,,$$

scriviamo $f \leq g$. In modo simile si definisce la scrittura $f \geq g$.

(5.11) Osservazione *Siano X un insieme e $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni. Se $f \leq g$ e g è limitata superiormente, allora anche f è limitata superiormente. Se $f \leq g$ e f è limitata inferiormente, allora anche g è limitata inferiormente. La semplice verifica è lasciata per esercizio.*

6 Interi, razionali e irrazionali

In questa sezione consideriamo alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$. Il più importante è il sottoinsieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali* $0, 1, 2, \ldots$, le cui proprietà fondamentali sono elencate dal seguente risultato che riportiamo senza dimostrazione.

(6.1) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $\sup \mathbb{N} = +\infty$*;*

(b) *ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo;*

(c) *ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ non vuoto e limitato superiormente ammette massimo;*

(d) *se* $A \subseteq \mathbb{N}$ *soddisfa*

$$0 \in A\,,$$

$$\forall n : n \in A \implies (n+1) \in A\,,$$

risulta $A = \mathbb{N}$*;*

(e) *per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$ *si ha* $m + n \in \mathbb{N}$ *e* $mn \in \mathbb{N}$.

(6.2) Osservazione *La proprietà* (d) *del teorema precedente sta alla base di un'importante tecnica dimostrativa. Data un'affermazione* $\mathcal{P}(n)$ *(che può dipendere anche da altri parametri, anche reali), supponiamo di sapere che le affermazioni seguenti sono vere:*

$$\mathcal{P}(0) \quad \textit{(primo passo dell'induzione)},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \;\; \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1).$$

Allora si ha

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; \mathcal{P}(n),$$

ossia l'affermazione $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni numero naturale* n*. In altre parole, se al primo passo l'affermazione è vera e se* $\mathcal{P}(n)$ *vera comporta che anche* $\mathcal{P}(n+1)$ *è vera, allora possediamo un marchingegno ricorsivo per garantire che* $\mathcal{P}(n)$ *sarà vera per un qualsivoglia numero naturale* n*. In effetti, formalmente*

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \; \mathcal{P}(n) \;\; \textit{è vera} \right\}$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ *conforme alla* (d)*, per cui* $A = \mathbb{N}$*, ossia l'affermazione desiderata. Questo tipo di argomentazione si chiama* dimostrazione per induzione. *Vediamo ora alcuni esempi di applicazione del metodo di induzione. Ragionando per induzione si dimostrano le seguenti proprietà (per lo svolgimento si rimanda al corso di esercitazioni):*

(a) *per ogni* $x \in [-1, +\infty[$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \textit{(disuguaglianza di Bernoulli)}\,;$$

(b) *per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\,;$$

(c) *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,;$$

(d) *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$ *si ha*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ;$$

(e) *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *con* $x \neq 1$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \, .$$

Dall'affermazione (a) del Teorema (6.1) si deduce la seguente proprietá.

(6.3) Teorema (proprietà di Archimede) *Siano* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x > 0$*. Allora esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $nx > y$*.*

Dimostrazione. Poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y/x$. Ne segue $nx > y$. ■

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ricordiamo che *la potenza* a^n è definita da

$$a^n = \underbrace{a\,a \cdots a}_{n\text{-volte}} \, .$$

Poniamo inoltre per definizione $a^0 = 1$. Per il seguito, è importante osservare che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; a^{n+1} = a^n \, a \, .$$

Ricordiamo anche le proprietà principali delle potenze.

(6.4) Proposizione *Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$a^{m+n} = a^m a^n \, ,$$

$$a^{mn} = (a^m)^n \, ,$$

$$(ab)^n = a^n b^n \, .$$

(6.5) Definizione *Sia* $x \in \mathbb{R}$*. Diciamo che* x *è* un numero intero*, se esistono* $m, n \in \mathbb{N}$ *tali che* $x = m - n$*. Denotiamo con* $\mathbb{Z}$ *l'insieme dei numeri interi.*

(6.6) Proposizione *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

(b) *per ogni* $x, y \in \mathbb{Z}$ *si ha* $x + y \in \mathbb{Z}$, $xy \in \mathbb{Z}$ *e* $-x \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Risulta $n = n - 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre da $x = m - n$ ed $y = p - q$ con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ segue

$$x + y = (m + p) - (n + q)\,,$$

$$xy = (mp + nq) - (mq + np)\,,$$

$$-x = n - m\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.7) Definizione *Sia $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è* un numero razionale*, se esistono $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tali che $x = \frac{m}{n}$. Denotiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Diciamo che $x \in \mathbb{R}$ è* irrazionale*, se x non è razionale.*

(6.8) Proposizione *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;

(b) *per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x + y \in \mathbb{Q}$, $xy \in \mathbb{Q}$ e $-x \in \mathbb{Q}$. Se poi $x \neq 0$, $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Risulta $m = m/1$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. Inoltre da $x = m/n$ e $y = p/q$ con $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ segue

$$x + y = \frac{mq + np}{nq}\,,$$

$$xy = \frac{mp}{nq}\,, \qquad -x = \frac{-m}{n}\,.$$

Se poi $x \neq 0$, si ha $m \neq 0$ e

$$x^{-1} = \frac{n}{m}\,,$$

da cui la tesi. ■

Vediamo ora come tra due reali distinti si riesca sempre ad infilare un razionale.

(6.9) Teorema *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.*

Dimostrazione. Se $x < 0 < y$, è sufficiente porre $q = 0$. Se $x \geq 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$. Risulta $0 < ny$. Allora, per la (c) del Teorema (6.1), esiste

$$m = \max\{p \in \mathbb{N} : \ p < ny\}\,.$$

Risulta quindi $m < ny$ e $(m + 1) \geq ny$. Ne segue $m \geq ny - 1 > nx$, quindi $x < m/n < y$. Infine, se $y \leq 0$, risulta $-y < -x$ e $-y \geq 0$. Esiste quindi $q \in \mathbb{Q}$ tale che $-y < q < -x$. Ne segue $-q \in \mathbb{Q}$ e $x < -q < y$. ■

Come mostra il seguente risultato l'insieme degli irrazionali è non vuoto.

(6.10) Teorema *Non esiste nessun $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'affermazione sia falsa. Allora esistono $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ tra loro primi e tali che $n^2 = 2m^2$. In particolare ne segue che n^2 è pari, per cui n stesso è pari, quindi della forma $n = 2k$. Allora si ha $2k^2 = m^2$, per cui m^2 è pari, da cui m stesso è pari, contro l'ipotesi che n e m siano primi tra loro. ■

7 Il binomio di Newton

(7.1) Definizione *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ si chiama* fattoriale *di n il numero naturale $n!$ definito da*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n\,.$$

Si pone anche, per definizione, $0! = 1$.

Per il seguito, è importante osservare che

$$\forall n \in \mathbb{N} :\; (n+1)! = n!(n+1)\,.$$

(7.2) Definizione *Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ poniamo*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

I numeri della forma $\binom{n}{k}$ si chiamano coefficienti binomiali.

(7.3) Proposizione *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$*;*

(b) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;

(c) *se* $k \geq 1$, *si ha*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Dimostrazione. Per la (a) si ragiona per induzione. La (b) e la (c) sono immediate. ■

(7.4) Definizione *Siano* $m, n \in \mathbb{Z}$ *con* $m \leq n$ *e siano* $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ *dei numeri reali. Il numero reale*

$$\sum_{k=m}^{n} x_k$$

detto sommatoria da m *a* n *di* x_k, *è definito da*

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n .$$

Enunciamo senza dimostrazione alcune semplici proprietà delle sommatorie.

(7.5) Proposizione *Siano* $m, n \in \mathbb{Z}$ *con* $m \leq n$, *siano* $x_m, \ldots, x_n, y_m, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *e sia* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Allora si ha*

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k ,$$

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} x_k ,$$

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} x_{k-1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1} .$$

Veniamo ora ad una importante formula per il calcolo della potenza n-esima della somma di due numeri reali.

(7.6) Teorema (Formula del binomio di Newton) *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Risulta

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0 .$$

Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x(x+y)^n + y(x+y)^n = \\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} = \\
&= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k},
\end{aligned}$$

per cui la formula è vera per $n+1$. ■

8 Cenni sui numeri complessi

L'esigenza di estendere ulteriormente l'insieme dei numeri reali nasce in modo naturale in svariate situazioni, ad esempio quella di determinare le soluzioni delle equazioni algebriche di secondo grado quando il discriminante risulta negativo, come ad esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$.

Denotiamo anzitutto con $\mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Poniamo

$$0 := (0,0), \quad 1 := (1,0), \quad i := (0,1).$$

Gli elementi dell'insieme $\mathbb{C}$ si chiamano *numeri complessi*. Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ e $w = (u, v) \in \mathbb{C}$, definiamo

$$z + w := (x+u, y+v),$$

$$zw := (xu - yv, xv + yu),$$

$$-z := (-x, -y).$$

Si verifica facilmente che $i^2 = -1$. Se $z \neq 0$, poniamo anche

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà algebriche.

(8.1) Teorema *Per ogni $z, w, t \in \mathbb{C}$ si ha*

$$(z+w)+t = z+(w+t), \qquad z+w = w+z,$$

$$z+0 = z, \qquad z+(-z) = 0,$$

$$(zw)t = z(wt), \qquad zw = wz,$$

$$z \cdot 1 = z, \qquad z \neq 0 \implies zz^{-1} = 1,$$

$$(z+w)t = zt+wt.$$

Ripetendo la la dimostrazione della Proposizione (2.1) si ottiene la seguente

(8.2) Proposizione *Per ogni $z, w, t \in \mathbb{C}$ si ha:*

$$z+t = w+t \implies z = w,$$

$$(zt = wt \text{ e } t \neq 0) \implies z = w,$$

$$-(-z) = z,$$

$$z \neq 0 \implies (z^{-1})^{-1} = z,$$

$$z \cdot 0 = 0,$$

$$zw = 0 \implies (z = 0 \text{ o } w = 0),$$

$$-(zw) = (-z)w.$$

Le notazioni $z - w$ e z/w hanno in $\mathbb{C}$ lo stesso significato che avevano in $\mathbb{R}$. Se $n \in \mathbb{N}$, anche il numero complesso z^n viene definito come nel caso reale. Infine, se $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$ e $z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, anche la sommatoria $\sum_{k=m}^{n} z_k$ viene definita come nel caso reale. Vale inoltre ancora la formula del binomio di Newton

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Denotiamo con

$$\mathrm{Re}\, : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}\, : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

le funzioni

$$\mathrm{Re}\,(x, y) = x, \qquad \mathrm{Im}\,(x, y) = y.$$

Il numero reale $\mathrm{Re}\,z$ si chiama *parte reale* di z, mentre il numero reale $\mathrm{Im}\,z$ si chiama *parte immaginaria* di z. Evidentemente $z = (\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z)$. I numeri complessi z con $\mathrm{Re}\,z = 0$ si chiamano *immaginari puri*. Si verifica facilmente che vale la seguente

(8.3) Proposizione *Se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha*

$$(x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0)\,,$$

$$(xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0)\,,$$

$$(-x, 0) = -(x, 0)\,,$$

$$x \neq 0 \implies (x^{-1}, 0) = (x, 0)^{-1}\,,$$

$$(x, 0) = (y, 0) \implies x = y\,.$$

La proposizione precedente permette di identificare ogni reale x col numero complesso $(x, 0)$ in modo consistente rispetto a somma e prodotto. Evidentemente un numero complesso z è reale se e solo se $\mathrm{Im}\,z = 0$. Ad esempio, se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, risulta

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy\,.$$

Nel seguito adotteremo spesso la scrittura $x + iy$ invece di (x, y) per denotare un numero complesso z, e diremo che z è scritto in forma cartesiana. Un vantaggio di tale notazione è che la somma ed il prodotto di due numeri complessi e l'opposto ed il reciproco di un numero complesso possono essere calcolati applicando le usuali regole del calcolo, tenendo presente che $i^2 = -1$. Risulta infatti

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)\,,$$

$$(x + iy)(u + iv) = xu + i(xv + yu) + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu)\,,$$

$$-(x + iy) = -x + i(-y)\,,$$

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

(8.4) Definizione *Per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\bar{z} := (x, -y)\,.$$

Il numero complesso $\bar{z}$ *si chiama* coniugato *di* z. *Se* $z = x + iy$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = x - iy$.

(8.5) Teorema *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$ *valgono i seguenti fatti:*

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}\,, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}\,, \qquad \bar{\bar{z}} = z\,,$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}\,, \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}\,.$$

Dimostrazione. Verifichiamo solo che $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$. Posto $z = (x, y)$ e $w = (u, v)$, si ha

$$\overline{zw} = \overline{(xu - yv, xv + yu)} = (xu - yv, -xv - yu)\,,$$

$$\bar{z}\,\bar{w} = (x, -y) \cdot (u, -v) = (xu - yv, -xv - yu)\,,$$

da cui la tesi. Le rimanenti proprietà sono lasciate per esercizio. ■

(8.6) Definizione *Per ogni* $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *poniamo*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Il numero reale positivo $|z|$ *si chiama* modulo *di* z.

Se $x \in \mathbb{R}$, si verifica facilmente che $|(x, 0)| = |x|$. Pertanto l'identificazione fra $x \in \mathbb{R}$ e $(x, 0) \in \mathbb{C}$ è consistente anche rispetto alla nozione di modulo.

(8.7) Teorema *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$ *valgono i seguenti fatti:*

$$|z| = 0 \iff z = 0\,,$$

$$|zw| = |z||w|\,,$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|\,,$$

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|\,,$$

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|\,, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|\,,$$

$$|\bar{z}| = |z|\,,$$

$$|z|^2 = z\bar{z}\,,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Dimostrazione. Scrivendo $z = (x, y)$, si verifica facilmente che

$$|z| = 0 \iff z = 0\,,$$

$$|\mathrm{Re}\, z| \le |z|\,, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \le |z|\,,$$

$$|\overline{z}| = |z|\,,$$

$$|z|^2 = z\overline{z}\,,$$

$$z \ne 0 \implies z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Risulta

$$|zw|^2 = zw(\overline{zw}) = zw\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2\,,$$

da cui $|zw| = |z||w|$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\,,\end{aligned}$$

da cui $|z+w| \le |z| + |w|$. Infine, la disuguaglianza $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$ può essere dedotta come nel Teorema (3.2). ■

9 Esercizi

Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza se:
- $x\mathcal{R}x$ (x è in relazione con se stesso, proprietà riflessiva);
- $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ (proprietà simmetrica);
- $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (proprietà transitiva).

Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine se:
- $x\mathcal{R}x$ (x è ordinato con se stesso, proprietà riflessiva);
- $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \implies x = y$ (proprietà antisimmetrica);
- $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (proprietà transitiva).

Diciamo poi che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine totale se, in aggiunta:
- $x\mathcal{R}y$ oppure $y\mathcal{R}x$, per ogni x, y (ordinamento totale).

(9.1) Esercizio *Sia E l'insieme degli studenti di un liceo che studiano almeno una lingua straniera. Definiamo la seguente relazione: $x\mathcal{R}y$ significa che gli studenti x e y studiano almeno una stessa lingua straniera. Di quali proprietà gode tale relazione?*

(9.2) Esercizio *Verificare che le seguenti relazioni sono di equivalenza.*

1. *Essere nato lo stesso anno.*
2. *Abitare nella stessa regione.*
3. *Parallelismo tra rette.*

(9.3) Esercizio *Si consideri l'insieme $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definiamo la relazione: $x\mathcal{R}y$ significa $xy > 0$. Verificare che è una relazione di equivalenza.*

Cosa cambia se si considera l'insieme $\mathbb{Z}$ e la relazione: $x\mathcal{R}y$ significa $xy \geq 0$?

(9.4) Esercizio *Si consideri l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e si definisca la seguente relazione: $x\mathcal{R}y$ significa $x-y$ è un multiplo di 6. Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Quante e quali sono le classi di equivalenza?*

(9.5) Esercizio *Si consideri l'insieme dei numeri naturali privato dello 0, cioè $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, e si definisca la seguente relazione: $x\mathcal{R}y$ significa x è divisibile per y. Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.*

(9.6) Esercizio *Consideriamo il sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ così definito:*

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq x\right\}.$$

Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo la seguente relazione: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ significa $(a-c, b-d) \in E$. Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.

(9.7) Soluzione esercizio (9.6).

Proprietà riflessiva. *$(a, b)\mathcal{R}(a, b)$ è vera, dato che $(a-a, b-b) = (0, 0) \in E$.*

Proprietà antisimmetrica. *Supponiamo che valgano $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ e $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$. Questo significa che $(a-c, b-d) \in E$ e $(c-a, d-b) \in E$. Per prima cosa si deduce che $a = c$ e quindi che $(0, b-d) \in E$ e $(0, d-b) \in E$, da cui segue che $b = d$.*

Proprietà transitiva. *Supponiamo che valgano $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ e $(c, d)\mathcal{R}(e, f)$. Vogliamo provare che $(a, b)\mathcal{R}(e, f)$. Si ha:*

$$a - e = (a-c) + (c-e) \geq 0$$

per le ipotesi. Inoltre

$$b - f = (b-d) + (d-f) \geq 0$$

e

$$b - f = (b-d) + (d-f) \leq (a-c) + (c-e) = a - e.$$

Quindi $(a-e, b-f) \in E$ e pertanto vale anche la proprietà transitiva.

(9.8) Esercizio *Semplificare le scritture usando le proprietà degli insiemi.*

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$;
2. $A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\}$;
3. $A \cap B \cap (B \cup C^c)$;
4. $\{[(A \cap A) \cap E] \cap \emptyset\} \cap A$;
5. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$.

(9.9) Esercizio *Dati gli insiemi $A = \{1, 2\}$, $B = \{a\}$, $C = \{p, q, r\}$, verificare che:*

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
3. $A \times B \neq B \times A$.

(9.10) Esercizio *Sia, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq n^2\right\}.$$

Mostrare che

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \mathbb{R}.$$

(9.11) Esercizio *Sia, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}.$$

Calcolare

$$\bigcap_{n=3}^{6} A_n.$$

(9.12) Esercizio *Sia, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Calcolare

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

(9.13) Esercizio *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$, *e sia, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^\alpha = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Mostrare che

$$\bigcap_{n\geq 1} B_n^\alpha = \{\alpha\}, \qquad \bigcup_{n\geq 1} B_n^\alpha = B_1^\alpha, \qquad \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \bigcap_{n\geq 1} B_n^\alpha = \mathbb{R}.$$

(9.14) Soluzione esercizio (9.10).
Primo passo. *Dimostriamo che*

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq \mathbb{R}.$$

Sia $x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$. *Allora* $x \in A_{\bar{n}}$ *per qualche* $\bar{n} \geq 1$, *da cui si deduce che* $x \in \mathbb{R}$.

Secondo passo. *Dimostriamo che*

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$. *La proprietà di Archimede assicura che esiste un numero naturale* $\bar{n} \geq 1$ *tale che* $x < \bar{n}$. *Dato che* $\bar{n} \in \mathbb{N}$, *si ha* $\bar{n} \leq \bar{n}^2$; *quindi* $x < \bar{n}^2$. *Pertanto*

$$x \in A_{\bar{n}} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

(9.15) Soluzione esercizio (9.12). *La disequazione* $x^2 + y^2 \leq 2$ *rappresenta un cerchio in* $\mathbb{R}^2$ *centrato nell'origine* $(0, 0)$ *e con raggio* $\sqrt{2}$. *L'insieme* A_n *è formato dai punti del cerchio con ordinata* y *compresa tra* $-1/n$ *e* $1/n$. *Consideriamo l'insieme*

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, y = 0\right\}.$$

Si vede facilmente che $B \subseteq A_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; *quindi*

$$B \subseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Sia ora $(x, y) \in \bigcap_{n \geq 1} A_n$. *Se fosse* $y > 0$, *allora la proprietà di Archimede ci assicura che esiste* $\bar{n} \geq 1$ *tale che*

$$\frac{1}{y} < \bar{n}.$$

Quindi

$$y > \frac{1}{\bar{n}}$$

e pertanto $(x, y) \notin A_{\bar{n}}$ *e* $(x, y) \notin \bigcap_{n \geq 1} A_n$. *Si ragiona allo stesso modo se fosse* $y < 0$. *Pertanto l'unica possibilità è che* $y = 0$. *Di conseguenza* $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, *dato che* $x^2 + y^2 \leq 2$. *Quindi* $(x, y) \in B$.

(9.16) Esercizio *Determinare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi.*

1. $E = \left\{x : x = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. $E = \left\{x : x = \frac{n^2+1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. $E = \left\{x : x = \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. $E = \left\{x : x = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$.

5. $E = \left\{\frac{xy}{x+y} : x, y \in]0, 1[\right\}$.

(9.17) Esercizio *Trovare l'estremo inferiore e superiore di* $\left\{\frac{2x}{1+x^2} : x \in [-1,1]\right\}$.

(9.18) Esercizio *Siano* A *e* B *due sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbb{R}$. *Provare che*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

(9.19) Esercizio *Trovare l'estremo inferiore e superiore di* $\left\{x > 0 : \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right\}$.

(9.20) Esercizio *Calcolare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi:*

1. $A = \left\{x : x = \dfrac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$
2. $B = \left\{x : x = \dfrac{n-2}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$
3. $C = \left\{x : x = \dfrac{2n+3}{5} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(9.21) Esercizio *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme* A:

$$A = \left\{a_n = \frac{3n^2 - (-1)^n n}{2n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$$

e dimostrare che coincidono con il massimo e il minimo dell'insieme stesso.

(9.22) Esercizio *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme* A *così definito:*

$$A = \{a_n | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \qquad \text{con} \qquad a_n = \begin{cases} 2/n & \text{con} \quad n \quad \text{pari} \\ 1/(n+1) & \text{con} \quad n \quad \text{dispari} \end{cases}$$

(9.23) Esercizio *Si consideri l'insieme* $E = \{9^x + 3^{x+1} - 4 > 0\}$. *Determinare l'estremo inferiore e superiore di* E *e dire se sono anche minimi e massimi di* E.

(9.24) Esercizio *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *con* $\inf A = 5$. *Dire se le seguenti affermazioni sono vere, false o non sono deducibili dalle ipotesi.*

1. $5 \in A$.
2. $5 \notin A$.
3. $6 \in A$.

4. $\forall x \in A,\ x > 5.$

5. $\forall x \in A,\ x \geq 5.$

6. $\forall x \in A,\ x \leq 5.$

7. $\exists x \in A : x > 4.$

8. $\exists x \in A : x > 5.$

9. $\exists x \in A : x \geq 5.$

10. $\max A$ *esiste.*

11. $\min A$ *esiste.*

(9.25) Esercizio *Sia* $I = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}$. *Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi:*

1. $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 2x - y \quad x, y \in I\}$

2. $B = \{b \in \mathbb{R} : b = |x|y \quad x, y \in I\}$

3. $C = \left\{c \in \mathbb{R} : c = 1 + \dfrac{x^2}{|y|} \quad x, y \in I \quad y \neq 0\right\}$

(9.26) Esercizio *Mostrare che* $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ *non ammette estremo inferiore e superiore nell'ambito dei numeri razionali. Procedere per passi; come prima cosa mostrare che se* M *è l'estremo superiore esso è tale che* M^2 *non può essere nè maggiore nè minore di 2. Il passo successivo consiste nel mostrare che se* $M^2 = 2$ *allora* M *è irrazionale.*

(9.27) Esercizio *Sia dato l'insieme* A*:*

$$A = \left\{a_n = \frac{7}{5} + \frac{3(-1)^n}{5n} - \frac{4}{5n^2}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

determinare l'estremo superiore e inferiore.

(9.28) Soluzione esercizio (9.16).

1. $\inf E = 0$, $\sup E = \max E = 1$.

2. $\inf E = \min E = 1$, $\sup E = +\infty$.

3. $\inf E = \min E = -1$, $\sup E = 1$.

4. $\inf E = \min E = 1$, $\sup E = \max E = \frac{7}{2}$.

5. $\inf E = 0$, $\sup E = \frac{1}{2}$.

(9.29) Soluzione esercizio (9.27). *Scriviamo A come $A = A_1 \cup A_2$ con:*

$$A_1 = \{a_n | n = 2k - 1; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \qquad A_2 = \{a_n | n = 2k; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Osservo che A_1 ammette come minimo zero, dato che la quantità $\frac{3}{5n} + \frac{4}{5n^2}$ decresce al crescere di n. Inoltre dato che il generico elemento di A_1 è

$$a_{2k-1} = \frac{7}{5} - \frac{3}{5(2k-1)} - \frac{4}{5(2k-1)^2} < \frac{7}{5}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

A_1 ammette come maggiorante $7/5$ che risulta coincidere con il minore dei maggioranti quindi $\sup(A_1) = 7/5$ (la dimostrazione di questo fatto è simile all'esercizio precedente). Per quanto riguarda A_2 osservo che i primi due elementi sono $a_2 = 3/2$ e $a_4 = 3/2$ e inoltre:

$$a_{2k} = \frac{7}{5} + \frac{3}{5(2k)} - \frac{4}{5(2k)^2} < \frac{7}{5} + \frac{3}{10k} < \frac{7}{5} + \frac{3}{30} = \frac{3}{2} \quad \forall k > 2$$

quindi il $\sup(A_2) = 3/2$ mentre l'estremo inferiore è sicuramente maggiore di zero. Osserviamo che $\inf(A) = \inf(A_1) = 0$ mentre il $\sup(A) = \sup(A_2) = 3/2$.

(9.30) Esercizio *Siano $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\forall z \in \mathbb{R} : z > y \implies z \geq x\,.$$

Provare che si ha $x \leq y$.

(9.31) Esercizio *Risolvere i seguenti prodotti di numeri complessi*

1. $i(1-i)$

2. $(1+i)(1-i)$

3. $(1+i)^2(1-i)$

4. $(2-3i)(2+i)$

(9.32) Esercizio *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi*

1. $\frac{1}{1-i}$

2. $\frac{1-i}{(1+i)^2}$

3. $\frac{1+4i}{2-3i}$

4. $\frac{2-3i}{2+i}$

(9.33) Esercizio *Sia z un numero complesso avente parte immaginaria positiva. Dimostrare che*

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

ha parte immaginaria positiva.

(9.34) Esercizio *Considerare il seguente numero complesso*

$$w = \frac{z-1+4i}{z-3-i}$$

1. *Determinare il luogo dei punti z appartenenti al piano di Gauss per cui w è reale;*

2. *Determinare il luogo dei punti z appartenenti al piano di Gauss per cui w è immaginario;*

3. *Rappresentare graficamente le due soluzioni.*

(9.35) Esercizio *Trasformare in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi*

1. $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$*;*

2. $2-2i$*;*

3. $-1+\sqrt{3}i$*;*

4. $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$*.*

(9.36) Esercizio *Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri complessi (pu ò essere utille passare prima alla forma esponenziale e poi ricovertire il risultato in forma algebrica)*

1. $(1-i)^6$*;*

2. $(1+i)^4$*;*

3. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}$.

(9.37) Esercizio *Dimostrare che se* $z = 1/2 + \sqrt{3}i/2$ *allora* z^5 *è il coniugato di* z.

(9.38) Esercizio *Ricordando la definizione di radici n-esime di un numero complesso determinare*

1. *le radici seste dell'unità;*
2. *le radici quarte di* $z = -4$*;*
3. *le radici quarte di* $z = i$*;*
4. *le radici quinte di* $z = \frac{1-i}{1+i}$.

(9.39) Esercizio *Risolvere le seguenti equazioni*

1. $2iz + 1 = 0$*;*
2. $(2 + 3i)z - 3 + 2i = 0$*;*
3. $(z - 1)^3 = -2i$*;*
4. $5z^2 - 4z + 1 = 0$*;*
5. $z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i$.

(9.40) Esercizio *Risolvere la seguente equazione frazionaria*

$$\frac{z^3 + 1}{z^3 - 1} = \frac{1}{i}.$$

(9.41) Esercizio *Risolvere la seguente equazione e rappresentare graficamente la soluzione*

$$|z - 1| = |z + 1|.$$