

# Diario del Corso di Analisi Matematica I - Mod. 1

**Corso di Laurea:** Matematica Applicata

**Docente:** Sisto Baldo

*ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatore: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!*

# Indice

<b>1 Lezione del 2/10/2013 (2 ore)</b>	<b>4</b>
<i>Numeri reali: perché ne abbiamo bisogno?</i>	
<b>2 Lezione del 2/10/2013 (3 ore)</b>	<b>5</b>
<i>Estremo inferiore, caratterizzazione di sup e inf.</i>	
<b>3 Lezione del 3/10/2014 (2 ore)</b>	<b>10</b>
<i>Funzione esponenziale. Funzioni circolari. Funzioni e relazioni. Comportamento della funzione <math>f(x) = \frac{\sin x}{x}</math> vicino a 0. Limiti: definizione informale.</i>	
<b>4 Lezione del 6/10/2014 (2 ore)</b>	<b>13</b>
<i>Definizione di limite. Funzioni continue. Teorema dei carabinieri.</i>	
<b>5 Lezione del 8/10/2014 (2 ore)</b>	<b>15</b>
<i>Ancora teoremi elementari sui limiti. Continuità di alcune funzioni elementari. Limiti destri, sinistri, infiniti.</i>	
<b>6 Lezione del 9/10/2014 (3 ore)</b>	<b>18</b>
<i>Forme indeterminate. Limiti di funzioni composte. Successioni e loro limiti. Limite di una successione monotona. Forme indeterminate. Numero di Nepero.</i>	
<b>7 Lezione del 15/10/2014 (2 ore)</b>	<b>22</b>
<i>Altri limiti fondamentali con esponenziali. Teorema di esistenza degli zeri.</i>	
<b>8 Lezione del 16/10/2014 (3 ore)</b>	<b>25</b>
<i>Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa di funzioni continue e strettamente crescenti su un intervallo. Teorema di Bolzano Weierstrass. Teorema di Weierstrass.</i>	
<b>9 Lezione del 17/10/2014 (2 ore)</b>	<b>28</b>
<i>Derivate: euristica, definizione, interpretazione geometrica e fisica. Teoremi per il calcolo delle derivate: algebra delle derivate, derivazione di funzione composta e di funzione inversa. Derivate di funzioni elementari</i>	
<b>10 Lezione del 22/10/2014 (2 ore)</b>	<b>32</b>
<i>Derivata di funzione composta e inversa. Convessità e concavità.</i>	
<b>11 Lezione del 23/10/2014 (3 ore)</b>	<b>35</b>

*Alcuni controesempi. Principio di Fermat. Teoremi di Rolle e Lagrange e conseguenze. Polinomi di Taylor.*

**12 Lezione del 24/10/2014 (2 ore) 40**  
*Teorema di l'Hôpital. Teorema di Taylor con resto di Peano. Derivate successive e punti di estremo relativo. Teorema di Cauchy.*

**13 Lezione del 29/10/2014 (2 ore) 44**  
*Teorema di Taylor con resto di Lagrange. Approssimazione di funzioni elementari con polinomi di Taylor. Serie di Taylor. Irrazionalità di  $e$ . Serie geometrica. Funzioni non analitiche.*

**14 Lezione del 30/10/2014 (3 ore) 48**  
*Ancora serie di Taylor. Cenni sulle serie di potenze. Serie logaritmica. Euristica dell'integrale. Integrale di Riemann: funzioni a scala, integrale superiore e inferiore, integrabilità.*

**15 Lezione del 31/10/2014 (2 ore) 55**  
*Uniforme continuità. Teorema di Heine-Cantor. Integrabilità delle funzioni continue. Linearità dell'integrale.*

**16 Lezione del 6/11/2014 (3 ore) 59**  
*Additività rispetto all'intervallo dell'integrale. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale e prime conseguenze. Teorema della media integrale, dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Calcolo di primitive: integrazione per parti e per sostituzione. Esercizi sugli integrali.*

**17 Lezione del 7/11/2014 (2 ore) 65**  
*Integrazione di funzioni razionali. Integrali impropri, principi del confronto.*

**18 Lezione del 12/11/2014 (1 ora) 67**  
*Convergenza assoluta e convergenza degli integrali impropri.*

**19 Lezione del 13/11/2014 (3 ore) 69**  
*Criteri di convergenza per le serie. Criteri del rapporto e della radice. Serie di potenze: raggio di convergenza.*

**20 Lezione del 14/11/2014 (2 ore) 78**  
*Teorema di regolarità della somma di una serie di potenze. Applicazioni.*

**21 Lezione del 19/11/2014 (2 ore) 84**  
*Massimo e minimo limite. Successioni di Cauchy e completezza di  $\mathbf{R}$ .*

# 1 Lezione del 2/10/2013 (2 ore)

Buona parte della prima ora di lezione è stata dedicata alla presentazione del corso: orario, esercitazioni, esami...

Argomento del corso: calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale.

Visto che nel corso ci occuperemo di funzioni reali di variabile reale, sarà bene capire esattamente cosa sono i numeri reali!

Consideriamo la seguente catena di insiemi numerici, sempre più grandi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Ogni volta che passiamo da un insieme al successivo, *guadagnamo qualcosa...* Nell'insieme  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  dei numeri naturali non è possibile trovare l'elemento inverso di un numero rispetto alla somma (l'opposto): perché questo si possa fare dobbiamo allargarci all'insieme  $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  dei numeri interi. Analogamente, in  $\mathbf{Z}$  non è possibile definire l'operazione inversa del prodotto: per questo, si introduce l'insieme  $\mathbf{Q}$  dei numeri razionali ( $\mathbf{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ ).

Con l'insieme dei numeri razionali potremmo dirci soddisfatti, almeno dal punto di vista delle quattro operazioni! E allora, perché sentiamo il bisogno di allargare ulteriormente l'insieme dei “numeri”?

Questa necessità divenne evidente già agli albori della matematica greca (anche se i greci avevano una visione più “geometrica” che “algebrica” della matematica): i pitagorici si accorsero che *la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 non è un numero razionale*. In termini moderni (e grazie al teorema di Pitagora), questo equivale a dire che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale... In seguito ci divertiremo a dimostrare questo fatto!

Per i pitagorici, la scoperta dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$  ebbe sconvolgenti conseguenze filosofiche...per noi, significa solo che dobbiamo trovare un insieme *più ampio* di numeri, in modo che almeno uno di essi abbia quadrato uguale a 2 (e in cui magari sia possibile risolvere altri interessanti problemi!).

Una buona risposta a queste necessità è l'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali, che noi ben conosciamo. Vero?

Cosa sono i numeri reali di cui abbiamo parlato (e che abbiamo usato) per buona parte della nostra carriera scolastica?

Una possibile risposta: sono tutti i numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Questo è un buon modello dei numeri reali, che presenta però un piccolo problema: se *definiamo* i reali come numeri decimali infiniti, non è poi facilissimo definire le operazioni e la relazione d'ordine,

e mostrare poi che esse godono di tutte le proprietà che ci aspettiamo... Comunque, questo è possibile senza eccessive difficoltà.

Un approccio alternativo (adottato da molti testi di analisi matematica) è quello assiomatico: i numeri reali sono *per definizione* un *campo ordinato e completo*.

Questo significa che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), ed una *relazione d'ordine* che godono di tutta una serie di buone proprietà che elencheremo meglio tra poco. Un tale oggetto si dice *campo ordinato*...ma anche  $\mathbf{Q}$  è un campo ordinato!

Quel che distingue  $\mathbf{R}$  da  $\mathbf{Q}$  è l'*assioma di completezza*, che vedremo la prossima volta in una delle sue possibili formulazioni.

Riprendiamo i nostri discorsi sull'insieme dei numeri reali. Siccome abbiamo affermato che la radice quadrata di 2 non è un numero razionale, vediamo di dimostrarlo!

In termini precisi, dire che  $\sqrt{2}$  è razionale equivale ad affermare che esiste un numero razionale  $q = m/n$  tale che  $q > 0$  e  $q^2 = 2$ . Riducendo la frazione ai minimi termini, non è restrittivo supporre che i numeri naturali  $m$  e  $n$  non abbiano fattori primi in comune.

Ora, la nostra supposizione equivale a  $m^2 = 2n^2$ , da cui segue che  $m^2$  è un numero pari. Poiché ogni fattore primo di  $m^2$  deve essere presente anche in  $m$ , ne deriva che  $m$  è pari.

Dunque,  $m = 2r$  per qualche numero naturale  $r$ , e la nostra identità diventa  $4r^2 = 2n^2$ , da cui  $2r^2 = n^2$ . Ripetendo esattamente il ragionamento appena fatto, questo mostra che  $n$  è pari. Assurdo perché abbiamo supposto che  $m$  e  $n$  non abbiano fattori in comune, e quindi essi non possono essere entrambi pari!

In sostanza, il teorema appena dimostrato ci dice che esistono tutta una serie di problemi "naturali" per la matematica che *non si possono risolvere* nel campo  $\mathbf{Q}$  dei razionali.

## 2 Lezione del 2/10/2013 (3 ore)

È per questo che risulta necessario introdurre l'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali, del quale diamo la seguente definizione:

*DEFINIZIONE:* l'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali è un campo ordinato completo.

Questo significa che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), entrambe associative e commutative. Inoltre, entrambe le operazioni hanno un elemento neutro (0 e 1 rispettivamente) e sono "invertibili" (cioè per ogni  $x \in \mathbf{R}$  esiste un altro elemento che

denotiamo  $(-x)$  tale che  $x + (-x) = 0$ ; per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 0$  esiste un altro elemento  $x^{-1}$  tale che  $x \cdot x^{-1} = 1$ ). Vale inoltre la proprietà distributiva, che lega la somma al prodotto. Un insieme con due operazioni che godono di queste proprietà è detto *campo*.

C'è poi una *relazione d'ordine*, che dati due numeri reali ci consente di dire qual è il più grande. Questa relazione d'ordine è compatibile con le operazioni (nel senso che possiamo manipolare le disuguaglianze nel modo in cui siamo abituati: sommando uno stesso numero reale ad ambo i membri di una disuguaglianza essa rimane vera, così come se moltiplichiamo ambo i membri per uno stesso numero reale positivo). Un campo che gode di queste proprietà è un *campo ordinato*: ma anche  $\mathbf{Q}$  è un campo ordinato!

Il campo ordinato  $\mathbf{R}$  è poi *completo*: diamo due enunciazioni dell'assioma di completezza (in classe abbiamo visto solo la seconda di quelle che seguono, la prima viene proposta agli interessati...):

*ASSIOMA DI COMPLETEZZA, I FORMULAZIONE (Dedekind):* Se  $A$  e  $B$  sono sottinsiemi di  $\mathbf{R}$ , entrambi non vuoti e tali che  $a \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ , allora esiste un numero reale  $c$  tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Un tale numero  $c$  si dice *elemento separatore* di  $A$  e  $B$ .

In soldoni, se abbiamo due sottinsiemi non vuoti  $A$  e  $B$  della retta reale tali che  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$ , possiamo trovare un numero reale che sta sia a destra di  $A$  che a sinistra di  $B$ . In altre parole, e sempre in modo informale, possiamo dire che la retta reale “non ha buchi”!

*ASSIOMA DI COMPLETEZZA, II FORMULAZIONE (Esistenza dell'estremo superiore):* Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di  $\mathbf{R}$  ammette estremo superiore in  $\mathbf{R}$ .

Per capire la formulazione dell'assioma di completezza che si rifà al concetto di estremo superiore, abbiamo bisogno di alcune definizioni:

*DEFINIZIONI:* Se  $A \subset \mathbf{R}$ , un *maggiorante* di  $A$  è un numero reale  $M$  tale che  $M \geq a$  per ogni  $a \in A$ .

Un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  si dice superiormente limitato se ammette almeno un maggiorante.

L'*estremo superiore* di un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{R}$  è il *minimo* dei maggioranti di  $A$ , se questo minimo esiste.

Cerchiamo di comprendere il significato di questa definizione di estremo superiore (che per inciso si indica col simbolo  $\sup A$ ...).

Se l'insieme  $A$  ammette massimo, allora l'estremo superiore coincide col massimo. Infatti il massimo dell'insieme è un maggiorante per definizione, e inoltre nessun numero più piccolo del massimo può essere un maggiorante (perché è superato dal massimo stesso, che è un elemento dell'insieme).

D'altra parte, un insieme infinito non è detto che possieda massimo anche se è superiormente limitato: per esempio, la semiretta  $A = \{x \in \mathbf{R} : x < 2\} = (-\infty, 2)$  non possiede un elemento massimo. Infatti, dato un qualunque elemento  $a \in A$ , il numero  $\frac{a+2}{2}$  è ancora minore di 2, ed è maggiore di  $a$ : *a non può essere dunque l'elemento massimo della semiretta*. Invece, è immediato verificare che  $\sup A = 2$ ... L'estremo superiore è la *naturale generalizzazione del concetto di massimo* agli insiemi superiormente limitati che non hanno massimo!

L'assioma di completezza nella sua seconda formulazione dice una cosa non ovvia: *qualunque* sottinsieme non vuoto e superiormente limitato  $A \subset \mathbf{R}$  ammette il sup. La cosa *non* è immediata perché il sup è definito come minimo di un insieme *infinito* (l'insieme dei maggioranti di  $A$ ), e non sempre un insieme infinito ammette minimo!

*Per gli studenti interessati, mostriamo l'equivalenza delle due formulazioni dell'assioma di completezza. Fermo restando che gli studenti non interessati possono limitarsi a studiare quella che predica l'esistenza del sup...*

Cominciamo col mostrare che se vale l'assioma di Dedekind, allora ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di  $\mathbf{R}$  ammette estremo superiore.

Sia infatti  $A \subset \mathbf{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  superiormente limitato. Definiamo

$$B = \{b \in \mathbf{R} : b \text{ è un maggiorante di } A\}.$$

La coppia di insiemi  $A$  e  $B$  soddisfa le richieste dell'assioma di Dedekind ( $B$  è non vuoto perché  $A$  è superiormente limitato, e giace a destra di  $A$  perché contiene solo maggioranti di  $A$ ), quindi esiste un elemento separatore  $c \in \mathbf{R}$  tale che  $a \leq c \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ . La disuguaglianza di sinistra dice che  $c$  è un maggiorante di  $A$ , mentre quella di destra assicura che è più piccolo di ogni altro maggiorante: in conclusione,  $c = \sup A$ .

Mostriamo che la seconda formulazione dell'assioma di completezza implica la prima.

Siano  $A$ ,  $B$  due sottinsiemi come nell'assioma di Dedekind (cioè sono non vuoti e  $A$  giace tutto a sinistra di  $B$ ). Poniamo  $c = \sup A$  (esiste per ipotesi, visto che  $A$  è non vuoto, ed è anche superiormente limitato perché  $B$  è non vuoto ed è tutto fatto di maggioranti di  $A$ ).

Dico che  $c$  è un elemento separatore tra  $A$  e  $B$ : infatti,  $c$  è un maggiorante di  $A$  per definizione di sup. Inoltre, è minore o uguale di *ogni* elemento di  $B$  perché è il minimo dei maggioranti di  $A$ , e  $B$  è costituito interamente da maggioranti di  $A$ . Q.E.D.

Evidentemente, l'assioma di completezza (in una qualunque delle sue formulazioni equivalenti) *non è vero* nel campo dei razionali: per esempio, l'insieme  $A = \{q \in \mathbf{Q} : q \geq 0, q^2 \leq 2\}$  è un sottinsieme di  $\mathbf{Q}$  non vuoto e superiormente limitato (per esempio, 2 è un maggiorante), ma esso non ha estremo superiore in  $\mathbf{Q}$ : il problema è che possiamo trovare maggioranti razionali *arbitrariamente vicini* a  $\sqrt{2}$ , che però non appartiene ai razionali. Ovviamente, se vediamo questo insieme come *sottinsieme di  $\mathbf{R}$* , l'estremo superiore c'è ed è uguale a  $\sqrt{2}$ .

L'affermazione appena fatta è una conseguenza praticamente immediata della seguente, importante proprietà di *densità* dei numeri razionali in  $\mathbf{R}$ :

*PROPOSIZIONE (Proprietà archimedeica e densità di  $\mathbf{Q}$  in  $\mathbf{R}$ ):* Siano  $a, b$  numeri reali con  $0 < a < b$ . Allora esiste un numero naturale  $n$  tale che  $na > b$  (proprietà archimedeica).

Se poi  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$  (di segno qualunque), esiste un numero razionale  $q$  tale che  $a < q < b$  (densità di  $\mathbf{Q}$  in  $\mathbf{R}$ ).

*DIM.:* Proviamo che valgono la proprietà archimedeica e la densità dei razionali. Per provare la proprietà archimedeica, basta osservare che esiste un numero naturale  $n$  tale che  $n > \frac{b}{a}$ : basta prendere  $n = [\frac{b}{a}] + 1$ <sup>1</sup>. Moltiplicando per  $a$  si ha la tesi.

Proviamo poi la densità dei razionali nel caso  $0 < a < b$ . Intanto, per la proprietà archimedeica esiste  $n \in \mathbf{N}$  tale che  $n(b - a) > 1$ , da cui  $nb > 1 + na$ . Ne segue che c'è un numero naturale  $m$  compreso tra  $nb$  e  $na$  (possiamo prendere semplicemente  $[nb]$ , tranne nel caso in cui  $nb$  è intero: in quel caso prendiamo  $nb - 1$ ). Ma allora  $na < m < nb$ , da cui  $a < \frac{m}{n} < b$ , come volevasi. Se poi  $a < 0 < b$ , basta prendere  $q = 0$ . Se invece  $a < b < 0$ , basta cambiare di segno... Q.E.D.

In matematica, oltre all'estremo superiore si usa spesso l'estremo inferiore che è l'oggetto simmetrico:

*DEFINIZIONE:* Un minorante di un insieme  $A \subset \mathbf{R}$  è un numero reale  $c$  tale che  $c \leq a$  per ogni  $a \in A$ .  $A$  si dice inferiormente limitato se possiede un minorante. L'estremo inferiore di  $A$  (se esiste) è il massimo dei minoranti di  $A$ , e si indica con  $\inf A$ .

Ovviamente, l'estremo inferiore coincide con il minimo di  $A$  quando questo esiste.

Inoltre, un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza consiste nel chiedere che ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore (esercizio)!

Per comodità, vale anche la pena di introdurre una notazione per indicare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di insiemi illimitati, e dell'insieme vuoto:

*DEFINIZIONE:* Il fatto che un insieme  $A$  non sia superiormente limitato si esprime con la scrittura  $\sup A = +\infty$ . Analogamente, per un insieme illimitato inferiormente scriveremo  $\inf A = -\infty$ . Poniamo poi  $\sup \emptyset = -\infty$ ,  $\inf \emptyset = +\infty$ .

La definizione assiomatica di  $\mathbf{R}$  è comoda (è sostanzialmente un menù delle proprietà che possiamo utilizzare quando manipoliamo i numeri reali),

---

<sup>1</sup>Con  $[x]$  indichiamo la *parte intera* di un numero reale  $x$ , ossia il più grande numero intero minore o uguale a  $x$ .



ma rimane il problema di mostrare che *esiste almeno un insieme, dotato di operazioni e relazione d'ordine, che soddisfa tutti gli assiomi*: abbiamo bisogno di un *modello* dei numeri reali.

Come accennavamo, un tale modello è costituito dai *numeri decimali infiniti*. Non è difficile convincersi che con tale modello si possono definire le operazioni e la relazione d'ordine, e che esse godono di tutte le proprietà che ci servono...

Per gli studenti interessati, cerchiamo di mostrare che in questo modello vale l'assioma di completezza: precisamente, supponiamo di avere un insieme  $A \subset \mathbf{R}$  (cioè  $A$  è una collezione di decimali infiniti) non vuoto e inferiormente limitato, e mostriamo come sia possibile identificarne l'estremo inferiore *come decimale infinito*.

Evidentemente, non è restrittivo supporre che 0 sia un minorante di  $A$  (basta compiere una traslazione, cioè aggiungere a tutti gli elementi di  $A$  uno stesso numero, per esempio l'opposto di un minorante: anche l'estremo inferiore risulterà modificato nello stesso modo...).

Ci troviamo nella seguente situazione: abbiamo un sottinsieme della retta reale che giace tutto a destra di 0, e ci chiediamo come calcolare *le cifre decimali* del massimo dei suoi minoranti.

Evidentemente, per trovare l'estremo inferiore a meno di un'unità, ci basta prendere il *massimo dei numeri naturali che sono minoranti di  $A$* , per trovarlo a meno di un decimo ci basta prendere il *massimo dei numeri decimali finiti con una cifra dopo la virgola che sono minoranti di  $A$* , per trovarlo a meno di un centesimo troveremo il *massimo dei numeri decimali finiti con due cifre dopo la virgola che sono minoranti di  $A$* , e così via... Ogni volta, dobbiamo trovare il massimo di un insieme finito. Inoltre, ogni volta che raffiniamo la suddivisione è evidente che *le cifre che avevamo già trovato in precedenza non cambiano*.

Proseguendo indefinitamente, abbiamo una ricetta per trovare tutte le cifre che vogliamo di un numero decimale infinito  $c$ , che gode di questa proprietà: se arrestiamo  $c$  alla  $k$ -esima cifra dopo la virgola e chiamiamo  $c_k$  il numero decimale finito così ottenuto<sup>2</sup>,  $c_k$  è un minorante di  $A$  ed esiste un elemento di  $A$  che dista meno di  $1/10^k$  da  $c_k$  (altrimenti avrei potuto aumentare di almeno un'unità la  $k$ -esima cifra decimale di  $c$ ). Siccome  $k$  può essere preso arbitrariamente grande, questo ci dice che *esistono punti di  $A$  arbitrariamente vicini a  $c$* .

In conclusione,  $c$  è per costruzione un minorante di  $A$ , ed è il massimo perché l'insieme  $A$  possiede punti arbitrariamente vicini a  $c$ , per cui un qualunque numero più grande di  $c$  non può essere più un minorante di  $A$ .

L'esistenza della radice quadrata di un numero reale positivo può essere recuperata usando l'estremo superiore: se  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ , definiamo  $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq a\}$ . Questo definisce un numero reale positivo, il cui quadrato si può dimostrare che è uguale ad  $a$ .

Non dimostriamo questo fatto, perché esso è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, che verrà enunciato e dimostrato tra poche lezioni in questo corso... Durante questo breve periodo, faremo un atto di fede e continueremo a "confidare" nell'esistenza delle radici  $n$ -esime, della funzione esponenziale, della funzione logaritmo, etc...

È utile ricordare le seguenti *caratterizzazione* di estremo superiore ed estremo inferiore: siano  $A \subset \mathbf{R}$ ,  $M, m \in \mathbf{R}$ . Allora si ha  $\sup A = M$  se e solo se

- $a \leq M$  per ogni  $a \in A$  ( $M$  è un maggiorante);
- per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{a} \in A$  tale che  $\bar{a} > M - \varepsilon$  (nessun numero strettamente minore di  $M$  è un maggiorante).

Analogamente si ha  $m = \inf A$  se e solo se

- $a \geq m$  per ogni  $a \in A$  ( $m$  è un minorante);

---

<sup>2</sup> $c_k$  non è altro che il numero decimale ottenuto al  $k$ -passo del nostro algoritmo

- per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{a} \in A$  tale che  $\bar{a} < m + \varepsilon$  (nessun numero strettamente maggiore di  $m$  è un minorante).

Usando questa caratterizzazione, si può far vedere per esempio che dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

si ha  $\inf A = \min A = 0$ , mentre  $\sup A = 1$ .

### 3 Lezione del 3/10/2014 (2 ore)

Ci siamo dedicati ad un ripasso critico sulle potenze: potenze ad esponente naturale, intero, razionale (la definizione è “obbligata” se vogliamo che valgano le proprietà delle potenze!).

Potenze ed esponente reale: se  $a > 1$  e  $x \in \mathbf{R}$ , definiamo

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq x\}.$$

Si può dimostrare che questo oggetto ha tutte le proprietà della funzione esponenziale che ben conosciamo (omettiamo però la dimostrazione).

Abbiamo parlato brevemente di come sono definite le funzioni trigonometriche seno e coseno: in particolare, ci siamo resi conto che c'è una difficoltà dovuta al fatto che è necessario definire in modo rigoroso la lunghezza di un arco di curva.

Facciamo quindi un brevissimo ripasso sul concetto di funzione e su quello di grafico di una funzione: una funzione  $f : A \rightarrow B$ , dove  $A, B$  sono insiemi ( $A$  si chiama dominio,  $B$  codominio) può essere pensata come una “scatola nera” o una “regola” che ad ogni elemento  $a \in A$  associa uno ed un solo elemento  $f(a) \in B$ . Qualche esempio di funzioni che “esistono in natura”: la temperatura nella nostra aula o il valore di una certa azione alla Borsa di Milano (entrambe in funzione del tempo), la forza elastica esercitata da una molla in funzione dell'elongazione, il segnale acustico raccolto da un microfono in funzione del tempo, la funzione che associa ad ogni sedia presente in quest'aula il nome di chi la occupa...

Caso particolarmente importante per noi: le funzioni reali di variabile reale, cioè quelle per cui  $A \subset \mathbf{R}$  e  $B \subset \mathbf{R}$ . Grafico di una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ : è il sottinsieme del piano cartesiano

$$G_f = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}.$$

Tra i sottinsiemi del piano cartesiano, come distinguere quelli che sono grafici di una funzione reale di variabile reale? Sono i sottinsiemi  $G$  tali che per ogni  $x \in \mathbf{R}$  troviamo una ed una sola  $y \in \mathbf{R}$  tale che  $(x, y) \in G$ .

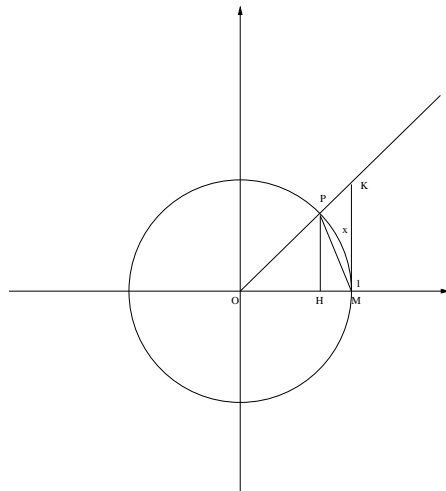
Nel caso generale in cui  $A$  e  $B$  sono insiemi qualunque, si introduce il prodotto cartesiano  $A \times B$  di due insiemi  $A$  e  $B$  come l'insieme delle *coppie ordinate*  $(a, b)$  in cui  $a \in A$  e  $b \in B$ :  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Il grafico di una funzione  $f : A \rightarrow B$  è allora il sottinsieme di  $A \times B$  definito esattamente come sopra:

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

Identifichiamo i sottinsiemi di  $A \times B$  che sono grafici di una funzione  $f : A \rightarrow B$ : otteniamo una “ricetta”, simile a quella sopra, che può essere adottata come definizione rigorosa di funzione tra due insiemi. Riportiamo di seguito questa definizione

*DEFINIZIONE (corrispondenza, funzione):* Dati due insiemi  $A, B$ , una corrispondenza tra  $A$  e  $B$  è, per definizione, un sottinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$ . Una corrispondenza  $\mathcal{R}$  tra  $A$  e  $B$  si dice funzione se per ogni  $a \in A$  esiste un unico  $B \in B$  tale che  $(a, b) \in \mathcal{R}$ .

Dimostriamo un paio di disuguaglianze che torneranno utili nel seguito: attraverso semplici considerazioni geometriche, scopriamo che per  $0 < x < \pi/2$  valgono le disuguaglianze  $x \leq \tan x$  e  $\sin x < x$ :



La seconda disuguaglianza si ottiene osservando che l'arco  $PM$  (lungo  $x$ ) è più lungo della corda  $PM$ , che a sua volta è più lunga del segmento  $PH = \sin x$  (sono rispettivamente cateto e ipotenusa del triangolo rettangolo  $OHP$ ).

Per ottenere la prima disuguaglianza, osserviamo che il settore circolare  $OMP$  è contenuto nel triangolo rettangolo  $OMK$ , per cui l'area del settore circolare è minore dell'area del triangolo. D'altra parte, l'area del settore circolare è  $x/2$ , mentre l'area del triangolo è  $\tan x/2$ .

Vogliamo ora introdurre, dapprima in modo assolutamente informale, le nozioni di limite di una funzione reale di variabile reale e di funzione continua.

Cerchiamo ora di affrontare un "esercizio" piuttosto difficile: vogliamo capire come è fatto il grafico della funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , funzione reale definita su  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Osserviamo che questa è una funzione pari (cioè  $f(-x) = f(x)$ ) e che per  $x > 0$  ha lo stesso segno della funzione seno ed è compresa tra le funzioni  $-1/x$  e  $1/x$ . Quello che non è per niente chiaro a priori, è come si comporta la funzione per *valori piccoli della  $x$* ...

Per  $0 < x < \pi/2$  sappiamo poi che  $\sin x < x < \tan x$  (lo abbiamo mostrato la volta scorsa...) Ne segue subito che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi/2.$$

Si noti che le disuguaglianze rimangono valide anche per  $-\pi/2 < x < 0$  perché tutte le funzioni coinvolte sono pari.

Geometricamente, questo dice che il grafico della funzione  $f(x)$ , per angoli piccoli, è compreso tra i grafici della funzione  $\cos x$  e della funzione costante 1: possiamo quindi concludere che quando  $x$  si avvicina a 0, il valore della funzione  $f(x)$  deve necessariamente avvicinarsi ad 1. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Possiamo dire, in altre parole, che la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  tende a 1 quando  $x$  tende a 0.

Cerchiamo di dare una prima pseudodefinitione di limite:

*DEFINIZIONE INFORMALE: la scrittura*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

*esprime il fatto che, se si avvicina sufficientemente la  $x$  a  $x_0$  (con  $x \neq x_0$ ), il valore di  $f(x)$  diventa arbitrariamente vicino al numero  $\ell$ .*

Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione  $f$  sia definita in  $x_0$  (e, se lo fosse, conveniamo comunque di *non tenerne conto quando andiamo a verificare la relazione di limite*). Quel che serve, è solo che la funzione  $f$  sia definita in punti *arbitrariamente vicini ad  $x_0$  e diversi da  $x_0$*  (in matematiche,  $x_0$  deve essere un punto di accumulazione del dominio di  $f$ ).

## 4 Lezione del 6/10/2014 (2 ore)

Attendiamo ancora qualche istante per dare una definizione precisa di limite: essa arriverà inesorabilmente tra non molto.

Piuttosto, avendo a disposizione il concetto di limite si può introdurre quello di funzione continua:

*DEFINIZIONE:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo. Se  $x_0 \in [a, b]$ , diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio  $[a, b]$ , diciamo semplicemente che essa è continua.

Ci si convince facilmente che l'idea geometrica dietro al concetto di continuità è piuttosto semplice: il grafico di una funzione continua è una “curva continua”, cioè può essere disegnato “senza staccare la penna dal foglio”. Infatti, se rileggiamo la definizione di continuità alla luce della nostra pseudo-definizione di limite, vediamo che una funzione è continua in  $x_0$  quando  $f(x)$  diventa *arbitrariamente vicino* a  $f(x_0)$  a patto di prendere  $x$  *sufficientemente vicino* a  $x_0$ . In maniera ancora più informale possiamo dire che una funzione continua  $f(x)$  ha la proprietà di “cambiare di poco” il suo valore quando si “cambia di poco” la variabile indipendente  $x$ .

A questo punto, viene naturale chiedersi se già conosciamo delle funzioni continue... La risposta è affermativa: si pensi alla funzione *costante*  $f(x) = k$ , o alla funzione *identica*  $f(x) = x$ . In questi due casi, le (pseudo)-definizioni date sopra diventano delle tautologie!

Dopo questi discorsi informali, è ormai ora di arrivare ad una definizione rigorosa del concetto di limite: vale la pena di sottolineare che nei prossimi pochi secondi... percorreremo un iter che storicamente ha richiesto moltissimo tempo ed un'accesa discussione nella comunità matematica! Daremo infatti la definizione di limite dovuta a Weierstrass.

Avevamo detto che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se succede che, avvicinando *sufficientemente*  $x$  a  $x_0$  (con  $x \neq x_0$ ),  $f(x)$  diventa *arbitrariamente vicina* a  $\ell$ . Possiamo tradurre questa frase nella seguente

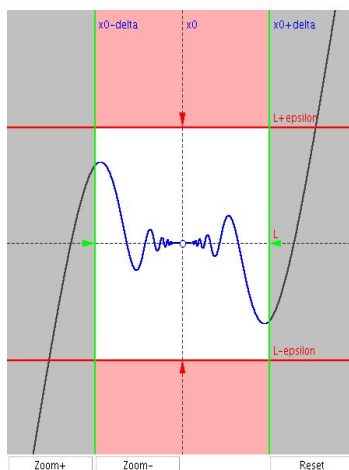
*DEFINIZIONE:* Sia  $f$  una funzione definita in un intorno<sup>3</sup> di  $x_0$ . Diciamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo  $I_\ell$  centrato in  $\ell$ , piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo  $J_{x_0}$  centrato in  $x_0$  tale che  $f(x) \in I_\ell$  per ogni  $x \in J_{x_0}$ ,  $x \neq x_0$ .

Se scriviamo  $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$  e  $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , la definizione si può tradurre nella seguente (che è assolutamente equivalente a quella sopra, ed è quella che ha sempre riscosso il maggior successo di pubblico e di critica):

*DEFINIZIONE:* Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $x_0$ . Diciamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e soltanto se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , è possibile trovare  $\delta > 0$  tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (P)$$

Vi sottopongo un mio “tentativo” di illustrare la definizione di limite con un grafico interattivo<sup>4</sup> sul quale si può scegliere il proprio  $\varepsilon$  a piacere, e verificare poi l’esistenza di  $\delta$ .... Non sono però completamente convinto dell’efficacia del risultato!)



<sup>3</sup>Un intorno di  $x_0$  è, per definizione, un insieme che contiene un intervallo centrato in  $x_0$ .

<sup>4</sup><http://profs.sci.univr.it/~baldo/aa2002/nuovolimite/nuovolimite.html>

Osserviamo, che la definizione di limite ha senso anche se  $f$  è definita su un insieme qualunque  $A$ , purchè  $A$  possieda punti *distinti da  $x_0$  e vicini quanto si vuole a  $x_0$* : questo si esprime dicendo che  $x_0$  è un *punto di accumulazione* di  $A$ . Ovviamente, in tal caso la disuguaglianza nella definizione di limite andrà verificata solo per gli  $x \in A$ .

Verifichiamo che con la definizione di limite appena vista, valgono alcune proprietà dei limiti e delle funzioni continue che suonano abbastanza naturali e che si riveleranno utilissime:

- *Continuità delle costanti e della funzione identica*: Per mostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  basta prendere  $\delta = \varepsilon$  nella definizione di limite. Dimostrare che il limite di una costante è la costante stessa è altrettanto facile!
- *TEOREMA (dei carabinieri)*: Se  $f, g, h$  sono tre funzioni definite in un intorno di  $x_0$ ,  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  in tale intorno e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ , allora esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

*DIM.*: sia  $\varepsilon > 0$ , e scegliamo  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ,  $|g(x) - \ell| < \varepsilon$  ogni qual volta  $0 < |x - x_0| < \delta$  (a priori, la definizione di limite potrebbe darci due valori diversi di  $\delta$  per  $f$  e per  $g$ : perché sia vero quanto appena scritto, basta prendere il più piccolo dei due).

Le due disuguaglianze per  $f$  e per  $g$  possono anche essere scritte:  $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ ,  $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$ . Usando l'ipotesi  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  otteniamo allora (per ogni  $x$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$ ):

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè  $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ , Q.E.D.

## 5 Lezione del 8/10/2014 (2 ore)

Continuamo nella nostra dimostrazione di risultati elementari che seguono dalla definizione di limite:

- Una funzione che ammette limite finito in un punto è *limitata in un intorno di quel punto*: se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$ , allora esiste un intervallo  $I$  centrato in  $x_0$  e una costante  $M > 0$  tale che  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$  (che appartenga anche al dominio di  $f$ ).

Analogamente, se  $f$  è come sopra e  $\ell \neq 0$ , allora esiste un intervallo  $J$  centrato in  $x_0$  tale che  $|f(x)| \geq |\ell|/2$  per ogni  $x \in J \setminus \{x_0\}$  (che appartenga anche al dominio di  $f$ ).

Per provare queste affermazioni basta applicare la definizione di limite, per la prima con  $\varepsilon = 1$  e per la seconda con  $\varepsilon = |\ell|/2$ .

- *Algebra dei limiti*: Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1} \quad \text{se } \ell_1 \neq 0.$$

Questi risultati, applicati alle funzioni continue, ci dicono ad esempio che i polinomi sono funzioni continue!

Dimostriamo le affermazioni sull'algebra dei limiti, cominciando dalla prima: per definizione di limite, scelto  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $0 < |x - x_0| < \delta$  si ha  $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ ,  $|g(x) - \ell_2| < \varepsilon$ . Ma allora  $|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\varepsilon$ , che implica la nostra tesi.

Per quanto riguarda il limite del prodotto, osserviamo dapprima che grazie al punto precedente possiamo trovare una costante positiva  $M$  tale che  $|f(x)| \leq M$ ,  $|g(x)| \leq M$  in un opportuno intorno di  $x_0$  ( $x \neq x_0$ ).

Fissato poi  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta$  come sopra: evidentemente non è restrittivo supporre che  $\delta$  sia tanto piccolo da far valere le nostre limitazioni  $|f(x)| \leq M$ ,  $|g(x)| \leq M$  per  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Allora

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \leq \\ &|f(x)| |g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1| |\ell_2| \leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

che implica la tesi.



Infine, mostriamo l'ultima delle proprietà elencate: fissiamo  $\bar{\varepsilon} > 0$  e osserviamo che

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell_1} \right| = \frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|}.$$

Usando il punto precedente: in un opportuno intervallino centrato in  $x_0$ , diciamo di raggio  $\delta_1$ , si ha  $|f(x)| \geq |\ell|/2$  (per  $x \neq x_0$ ). A questo punto, basta riapplicare la definizione di limite con  $\varepsilon$  qualunque per stimare il numeratore: troviamo così un  $\delta < \delta_1$  tale che

$$\frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|} < \frac{2\varepsilon}{|\ell_1|^2}$$

ogni qual volta  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \neq x_0$ .

Abbiamo sostanzialmente usato il “teorema dei carabinieri” per far vedere che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ... anche se a rigore avremmo avuto bisogno di mostrare che la funzione  $\cos x$  è continua in 0: abbiamo dato per scontato che “ $\cos x$  si avvicina a 1 quando  $x$  si avvicina a 0”. Questo, fortunatamente, può essere dedotto dalle considerazioni appena fatte: dimostriamo dunque la continuità delle funzioni seno e coseno sull'intera retta reale.

Anzitutto, abbiamo visto che per angoli acuti si ha  $0 < \sin x \leq x$  (mentre per ragioni di simmetria avremo  $x \leq \sin x < 0$  per  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ): grazie al teorema dei carabinieri deduciamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

In altre parole, la funzione seno è continua in 0.

Sempre per angoli acuti (e positivi), da semplici considerazioni geometriche si ricava che  $1 - \cos x < x$ , da cui deduciamo subito che  $1 - x < \cos x < 1$ . Dal teorema dei carabinieri abbiamo allora  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  (per il limite a sinistra di 0, si ricordi che la funzione coseno è pari).

In realtà seno e coseno sono funzioni continue ovunque: se  $x_0 \in \mathbf{R}$  possiamo scrivere

$$\sin x = \sin(x_0 + (x - x_0)) = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0)$$

da cui si deduce facilmente che  $\sin x$  è continua in  $x_0$ . In maniera analoga, la funzione  $\cos x$  è continua in tutti i punti.

Introduciamo alcune variazioni sul tema: limiti destro e sinistro, limiti all'infinito e limiti infiniti (e mostriamo qualche esempio di ciascuno): se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , diremo che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$  (limite destro) se la restrizione di  $f$  all'insieme  $A \cap (x_0, +\infty)$  ha limite  $\ell$  nel punto  $x_0$  (ovviamente  $x_0$  dovrà essere di accumulazione per tale insieme). Analogamente si definisce il limite sinistro, restringendosi alla semiretta  $(-\infty, x_0)$ .

I limiti infiniti si definiscono come segue:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  se per ogni  $M > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$  implica  $f(x) > M$  (e c'è una definizione analoga per il limite  $-\infty$ ).

## 6 Lezione del 9/10/2014 (3 ore)

Limiti all'infinito: diciamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che  $x > N$  implica  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Analogamente, si definisce il limite a  $-\infty$ , e anche i limiti infiniti all'infinito...

Osserviamo che il calcolo del limite di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, detti *forme indeterminate*.

Infatti non è difficile convincersi che se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$ . Invece, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , (*forma indeterminata 0/0*) non è così chiaro cosa succeda al limite del rapporto!

Questo per un buon motivo: il limite del rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 può combinare *qualsunque cosa*. Può essere un qualunque numero reale, essere infinito o non esistere. Per vederlo prendiamo  $x_0 = 0$  e (i)  $f(x) = g(x) = x$ : in questo caso il limite del rapporto è 1; (ii)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^3$ : in questo caso il limite è  $+\infty$ ; (iii)  $f(x) = x \sin(1/x)$ ,  $g(x) = x$ : in questo caso il limite non esiste.

Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella appena vista, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni  $f$  e  $g$  non permette di stabilire quanto fa il limite di  $f/g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f + g$  oppure  $f^g$ ) sono  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ...

Il lettore può provare a ripetere l'esercizio sopra per la forma indeterminata  $0 \cdot \infty$  (prodotto di una funzione che tende a 0 e di una che tende all'infinito), mostrando che anche in questo caso il limite del prodotto può essere finito, infinito o non esistere.

Analizziamo ora il limite di funzioni composte. Nel caso delle funzioni continue, l'enunciato è piuttosto semplice: la composizione di due funzioni continue è continua. In altre parole  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sono due funzioni definite (per semplicità) su tutto  $\mathbf{R}$ , ovunque continue, allora la funzione composta (funzione di funzione)  $f(g(x))$  è pure lei continua: un risultato del tutto plausibile se ricordiamo la nostra pseudo-definizione di continuità.

Per i limiti, occorre una certa cautela dovuta al fatto che nella definizione di limite non vogliamo tener conto del comportamento della funzione *nel punto in cui si calcola il limite*.

Diamo un enunciato preciso, che implica evidentemente quanto detto sopra sulle funzioni continue:

*TEOREMA:* Sia  $f$  definita in un intorno (ev. bucato) di  $x_0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ,  $g$  definita in un intorno (ev. bucato) di  $y_0$  tale che  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$ . Supponiamo poi che  $g$  sia (definita e) continua in  $y_0$ , oppure che si abbia  $f(x) \neq y_0$  in un intorno di  $x_0$ . Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

*DIM.:* Dimostriamo il risultato nel secondo caso: dato  $\varepsilon > 0$ , troviamo  $\eta > 0$  tale che  $|g(y) - \ell| < \varepsilon$  se  $0 < |y - y_0| < \eta$ .

Troviamo poi  $\delta$  tale che, se  $0 < |x - x_0| < \delta$ , allora  $|f(x) - y_0| < \eta$  (e questa quantità è positiva, a patto di prendere  $\eta$  abbastanza piccolo, grazie all'ipotesi che  $f(x) \neq y_0$  in un intorno di  $x_0$ ). Usando dunque la disuguaglianza valida per  $g$ , otteniamo

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \quad \text{se } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

Se poi  $g$  è continua in  $y_0$ , con la stessa notazione usata sopra avremo  $g(y_0) = \ell$ , per cui la disuguaglianza  $|g(y) - \ell| < \varepsilon$  vale per  $|y - y_0| < \eta$  (non c'è più bisogno di supporre  $y \neq y_0$ ). Q.E.D.

*OSSERVAZIONE:* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), allora esiste la funzione inversa  $g : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ , (rispettivamente  $g : [f(b), f(a)] \rightarrow [a, b]$ ), anch'essa continua. Questo risultato è "geometricamente evidente", ed una sua dimostrazione rigorosa sarà dedotta facilmente dal teorema di esistenza degli zeri e da una notevole proprietà delle funzioni crescenti o decrescenti.

Per il momento, basti dire che questo implica ad esempio la continuità della funzione radice quadrata...

Si noti che per parlare di limite a  $+\infty$  di una funzione  $f$ , basta che il dominio di  $f$  sia un insieme *illimitato superiormente*: in particolare, data una funzione  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ , ha senso chiedersi se esiste il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ .

Abbiamo poi visto che purtroppo non esiste sempre. Ad esempio non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  (questa funzione compie *infinite* oscillazioni tra  $-1$  e  $1$  in ogni intorno comunque piccolo di  $0$ ).

Ecco di seguito un caso particolare importante di limite all'infinito... Una funzione definita su  $\mathbf{N}$  si chiama *successione*. Di solito, per le successioni si adotta una notazione differente da quella usata per le funzioni: piuttosto

che scrivere  $f(n)$ , si usa una scrittura del tipo  $\{a_n\}$ , dove il simbolo  $a_n$  rappresenta il valore della successione in  $n \in \mathbf{N}$ .

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, scopriamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che per  $n \geq \bar{n}$  si abbia  $|a_n - \ell| < \varepsilon$ .

Abbiamo già visto che il limite di una funzione in un punto non necessariamente esiste, così come non necessariamente esiste il limite di una successione per  $n \rightarrow +\infty$ : per esempio, la successione  $a_n = (-1)^n$  non ha limite.

Ci piacerebbe avere un risultato che dica almeno che le successioni *fatte in un certo modo* hanno limite. Ancora una volta, ci viene in aiuto la completezza di  $\mathbf{R}$ :

*TEOREMA: Sia  $\{a_n\}$  una successione crescente (cioè  $a_{n+1} \geq a_n$  per ogni  $n$ ). Allora  $\{a_n\}$  ammette limite per  $n \rightarrow +\infty$ , e si ha*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

*Analogo risultato vale per successioni decrescenti: in questo caso il limite coincide con l'estremo inferiore dell'immagine della successione.*

*Dimostrazione:* Sia  $S = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ . Supponiamo dapprima che sia  $S \in \mathbf{R}$ : vedremo poi il caso  $S = +\infty$ .

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $S$  è un maggiorante dei valori assunti dalla successione, abbiamo che  $a_n \leq S < S + \varepsilon$  per ogni  $n$ . D'altra parte,  $S - \varepsilon$  non è più un maggiorante (per definizione di sup), per cui esiste un elemento della successione, chiamiamolo  $a_{\bar{n}}$ , tale che  $a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$ . Siccome la successione è crescente, se  $n \geq \bar{n}$  si ha  $a_n \geq a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$ .

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute sopra, abbiamo che per  $n > \bar{n}$  si ha  $|a_n - S| < \varepsilon$ .

Se poi  $S = +\infty$ , l'immagine della successione non ammette maggioranti. Dunque, per ogni fissato  $M > 0$  esiste  $\bar{n}$  tale che  $a_{\bar{n}} > M$ . Per la crescita della successione abbiamo allora  $a_n \geq a_{\bar{n}} > M$  per ogni  $n \geq \bar{n}$  e dunque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  Q.E.D.

In maniera del tutto analoga, si mostra che una funzione crescente ammette limite a  $+\infty$ , e che questo limite è uguale al sup. Ancora, una funzione crescente  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ammette limite destro e sinistro in ogni punto: precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

Usiamo ora il teorema sui limiti delle successioni monotone per *definire il numero di Nepero e (la base dei logaritmi naturali)*: poniamo per definizione

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Naturalmente, occorre far vedere che questo limite *esiste ed è finito!*

L'idea della dimostrazione non è difficile: mostriamo dapprima che la successione  $a_n = (1 + 1/n)^n$  è crescente (e quindi il limite esiste!). Questo può essere dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli<sup>5</sup>.

Dobbiamo far vedere che  $a_n \geq a_{n-1}$  per ogni numero naturale  $n > 1$ . Ora, manipolando un po' la disuguaglianza da dimostrare si vede che questa equivale a  $(\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq (\frac{n-1}{n})^n$ , cioè a  $(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq (1 - \frac{1}{n})^n$ : ma questo è esattamente quel che ci dice la disuguaglianza di Bernoulli! (In realtà, tenendo conto dei casi in cui la disuguaglianza di Bernoulli è stretta, abbiamo mostrato che la successione  $a_n$  è strettamente crescente...)

Per mostrare poi che il limite è finito, occorre mostrare che la successione è superiormente limitata. Per far questo prendiamo la successione  $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ , e mostriamo che questa è *decreciente*. Infatti, manipolandola un po' ci si rende conto che la disuguaglianza  $b_n \leq b_{n-1}$  è equivalente alla seguente:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n.$$

D'altra parte, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n},$$

come volevamo.

Si ha allora  $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$ , e possiamo essere certi che  $e$  è un numero reale compreso tra 2 e 4. Evidentemente, si possono avere stime migliori prendendo  $n$  grande, in quanto  $a_n < e < b_n$ ...

---

<sup>5</sup>La disuguaglianza di Bernoulli afferma che  $(1+a)^n \geq 1+na$  se  $a > -1$  e  $n \in \mathbf{N}$ . Essa può essere dimostrata facilmente utilizzando il *principio di induzione*, procedendo come segue. Per  $n = 0$  la disuguaglianza è ovviamente vera. Supponiamola vera per un certo  $n$ : allora  $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$ , che dimostra il passo induttivo. Si noti che, in realtà, per  $n \geq 2$ ,  $a \neq 0$  la disuguaglianza è stretta!

## 7 Lezione del 15/10/2014 (2 ore)

Dalla definizione del numero di Nepero  $e$  deriva il seguente *limite fondamentale* (di funzione reale!):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e.$$

La cosa può essere dimostrata senza troppa difficoltà giocando con le parti intere: ricordo che il simbolo  $[x]$  indica *il più grande numero intero minore o uguale a  $x$* , da cui si ha evidentemente  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]} = e$  grazie alla definizione del numero  $e$ . Inoltre, per  $x > 0$  valgono le ovvie disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Ora, è immediato verificare che la funzione a sinistra e quella a destra tendono entrambe ad  $e$  (grazie all'osservazione fatta sopra), e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.

Usando il limite fondamentale appena dimostrato e la continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo (per il momento diamola per buona: la dimostreremo tra poco!), possiamo dimostrare senza eccessiva difficoltà che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Per dimostrare il primo limite, possiamo cominciare a far vedere che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  (questo è un semplice esercizio), da cui  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$  (basta “cambiare variabile” ponendo  $y = 1/x$ ... è anche opportuno distinguere il limite destro e il limite sinistro). Il limite voluto segue allora prendendo il logaritmo in base  $e$  (ricordando anche il teorema sul limite di funzione composta: prendiamo per buona la continuità della funzione logaritmo!). Il secondo dei due limiti fondamentali segue invece dal primo con il “cambio di variabile”  $y = e^x - 1$  (anche in questo caso, ci serve la continuità della funzione esponenziale per dire che  $y \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$ ).

Verifichiamo finalmente che le funzioni esponenziali  $f(x) = a^x$  (con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) sono continue. Grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente verificarne la continuità in  $x_0 = 0$ : ci basta far vedere che  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ .

Supponiamo per fissare le idee che sia  $a > 1$  (la generalizzazione al caso  $0 < a < 1$  è lasciata per esercizio: basti osservare che  $a^x = (1/a)^{-x}$ ...).

Cominciamo col mostrare che vale il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Definiamo  $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ : questa è una successione positiva, ed il nostro limite sarà provato se facciamo vedere che  $b_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Ora, si vede subito che  $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$  (dove per l'ultimo passaggio usiamo la disuguaglianza di Bernoulli), da cui  $0 < b_n \leq \frac{a-1}{n}$ . Il limite segue allora dal teorema dei carabinieri. Sia ora  $\varepsilon > 0$ . Troviamo  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $a^{1/\bar{n}} < 1 + \varepsilon$ . Siccome la funzione esponenziale è crescente, se ne deduce che  $1 < a^x < 1 + \varepsilon$  se  $0 < x < \frac{1}{\bar{n}}$ , per cui  $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$ . Per mostrare che anche il limite sinistro ha lo stesso valore, basta osservare che  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \dots$

Dalla continuità di esponenziale e logaritmo si deducono molte proprietà importanti, ad esempio la continuità della funzione  $f(x) = x^b$  ( $x \geq 0$ ): basta scrivere  $x^b = e^{b \log x}$  e usare la continuità di esponenziale e logaritmo.

Ecco un altro esercizio guidato per dimostrare due limiti fondamentali molto utili: visto che abbiamo parlato della funzione esponenziale e delle sue proprietà, questo è un buon momento per farlo!

*ESERCIZIO:* Si provino i due seguenti *limiti fondamentali*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$$

per ogni  $a > 1$  e per ogni  $b > 0$ .

[*SUGGERIMENTO:* Cominciamo con l'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli,  $a^n/\sqrt{n} = (1 + (a-1))^n/\sqrt{n} \geq (1 + n(a-1))/\sqrt{n} = 1/\sqrt{n} + \sqrt{n}(a-1) \rightarrow +\infty$ , e quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$ .

Si ha poi, per  $x > 0$ ,

$$\frac{a^x}{\sqrt{x}} \geq \frac{a^{[x]}}{\sqrt{[x]+1}} = \frac{a^{[x]+1}}{a\sqrt{[x]+1}}.$$

La quantità a destra, per  $x \rightarrow +\infty$  tende a  $+\infty$  grazie al limite di successione appena visto. Ne consegue che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ .

Da questo segue facilmente il primo dei due limiti fondamentali scritti sopra, in quanto

$$\frac{a^x}{x^b} = \left( \frac{(a^{\frac{1}{2b}})^x}{\sqrt{x}} \right)^{2b} \dots$$

Per verificare il secondo "limite fondamentale", è sufficiente cambiare variabile ponendo  $y = \log x$ .

Uno dei risultati fondamentali sulle funzioni continue, è il  
**TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI:** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua tale che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$ .

Questo teorema dall'aria innocua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua  $f(x) = x^2 - a$  (con  $a > 0$ ) sull'intervallo  $[0, a+1]$ . Si vede subito che  $f(0) = -a < 0$ , mentre  $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$ . Il teorema ci assicura che esiste un punto  $c$  dell'intervallo tale che  $c^2 - a = 0$ : abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di  $a$ . Essa è poi unica perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga possiamo dimostrare l'esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine... Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

Propongo due diverse dimostrazioni del teorema di esistenza degli zeri (in aula abbiamo visto la seconda!).

*PRIMA DIMOSTRAZIONE (lunghetta ma istruttiva...):* Usiamo il cosiddetto *metodo di bisezione*. Sia  $d = (b - a)/2$  il punto medio dell'intervallo  $[a, b]$ : se  $f(d) = 0$  siamo felicissimi perché abbiamo trovato il punto voluto, in caso contrario avremo  $f(d) < 0$  oppure  $f(d) > 0$ . In ogni caso, in uno dei due "mezzi intervalli"  $[a, d]$  oppure  $[d, b]$  si ripropone la situazione di partenza:  $f$  è negativa nell'estremo sinistro dell'intervallo, positiva nell'estremo destro. Chiamiamo  $[a_1, b_1]$  il semiintervallo che gode di questa proprietà.

Ripetiamo poi la stessa costruzione: prendiamo il punto di mezzo dell'intervallo  $[a_1, b_1]$  e osserviamo che se la funzione non si annulla nel punto di mezzo (ma se così fosse avremmo finito), in uno dei due mezzi intervalli che chiameremo  $[a_2, b_2]$  si ripropone la situazione di partenza:  $f(a_2) < 0$  e  $f(b_2) > 0$ .

Iteriamo questa costruzione: se il processo non si arresta perché troviamo un punto in cui la funzione si annulla, avremmo individuato una successione infinita di intervalli  $[a_n, b_n]$ , ciascuno contenuto nel precedente e tali che  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$ . Per costruzione abbiamo che la successione degli estremi sinistri  $a_n$  è crescente, la successione degli estremi destri  $b_n$  è decrescente e inoltre  $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ . Siccome una successione crescente e limitata ammette limite finito, esisterà il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$ , ed evidentemente  $c \in [a, b]$ .

È evidente che si ha anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$  per quanto osservato sopra sulla differenza tra  $a_n$  e  $b_n$ . Grazie alla continuità di  $f$ , si ha poi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$



D'altra parte, il primo limite deve essere necessariamente  $\leq 0$  in quanto limite di una successione di numeri negativi, mentre il secondo deve essere  $\geq 0$  in quanto limite di una successione di numeri positivi: siccome i due limiti sono entrambi uguali a  $f(c)$ , ne deriva che  $f(c) = 0$ . Q.E.D.

*DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA:* Vogliamo proporre un'altra dimostrazione del teorema, leggermente più rapida.

Poniamo  $c = \sup A$ , dove  $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ . Questo è evidentemente un numero reale compreso tra  $a$  e  $b$ . Dico che  $f(c) = 0$ .

Infatti, se per assurdo avessimo  $f(c) > 0$ , per definizione di limite avremmo  $f(x) > 0$  anche per tutti gli  $x$  in un certo intorno sinistro  $[c - \delta, c]$  di  $c$ <sup>6</sup>. Quindi  $c - \delta$  sarebbe un maggiorante di  $A$  più piccolo di  $c$ , contro la definizione di estremo superiore.

Se poi fosse  $f(c) < 0$ , dovrebbe essere  $c < b$  (perché  $f(b) > 0$ ). Per lo stesso motivo di prima, troveremmo  $\delta > 0$  tale che  $f(x) < 0$  per  $x \in [c, c + \delta]$ , e  $c$  non sarebbe più un maggiorante di  $A$ . Q.E.D.

## 8 Lezione del 16/10/2014 (3 ore)

Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

*TEOREMA (dei valori intermedi):* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ .

*Dimostrazione:* Sia  $y_0$  un valore compreso tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione  $g(x) = f(x) - y_0$ ...

Q.E.D.

Questo teorema è particolarmente utile per dimostrare che certe funzioni continue sono *invertibili*.

*DEFINIZIONE:* Una funzione  $f : A \rightarrow B$  ( $A, B$  insiemi) si dice *iniettiva* o *uno a uno* se  $f(a_1) = f(a_2)$  implica  $a_1 = a_2$ : in altre parole, dato  $b \in B$  esiste al più un  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$  (oppure nessuno!).

$f$  si dice poi *suriettiva* se per ogni  $b \in B$  esiste  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$ , ossia se *l'immagine coincide col codominio*:  $f(A) = B$ .

Infine,  $f$  si dice *biiettiva* o *biunivoca* o *invertibile* se è sia iniettiva che suriettiva. In tal caso, esiste un'unica funzione  $g : B \rightarrow A$  tale che  $g(f(a)) = a$  per ogni  $a \in A$  e  $f(g(b)) = b$  per ogni  $b \in B$ . Tale  $g$  si chiama *inversa* di  $f$ . Vale evidentemente anche il viceversa: esiste dunque l'inversa se e soltanto se  $f$  è biiettiva.

---

<sup>6</sup>Questo semplice fatto è noto come *teorema della permanenza del segno*: se una funzione ha limite positivo in  $x_0$ , allora è positiva in un intorno di  $x_0$  (con la possibile esclusione di  $x_0$ ).

Dal teorema dei valori intermedi segue che se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *suriettiva* sull'intervallo  $[f(a), f(b)]$ : in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Ecco un teorema che assicura la continuità della funzione inversa:

*TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone): Una funzione crescente  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è continua se e solo se*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

*Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.*

*DIM.:* Se  $f$  è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che  $f$  non sia continua, e sia  $x_0$  un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità  $x_0 \in (a, b)$ : le semplici modifiche necessarie nei casi  $x_0 = a$  o  $x_0 = b$  sono lasciate per esercizio).

Abbiamo osservato che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : a \leq x < x_0\} < \\ \ell_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Per la crescita di  $f$ , segue subito che  $f([a, b])$  contiene al più un punto dell'intervallo aperto  $(\ell_1, \ell_2)$ , ossia il valore  $f(x_0)$  se questo non coincide con uno dei due limiti: per questo motivo  $f$  non può essere suriettiva.

Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo  $[a, b]$ , è anch'essa continua*. Infatti, la funzione inversa è strettamente crescente e suriettiva da  $[f(a), f(b)]$  in  $[a, b]$ .

Sono in particolare continue le radici, i logaritmi, le funzioni trigonometriche inverse...

Un altro, importante risultato sulle funzioni continue è il

*TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ammette massimo e minimo. (Attenzione: è importante che il dominio della funzione sia un intervallo chiuso e limitato, e che la funzione sia continua. Abbiamo visto con qualche esempio che senza queste ipotesi la tesi può anche essere falsa!).*

Per dimostrare il teorema di Weierstrass useremo un risultato che si rivelerà utilissimo in molte altre occasioni: il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Oggi non è rimasto neanche il tempo per enunciare tale teorema: ci limitiamo a dare un'importante definizione che sarà necessaria a comprenderlo.

*DEFINIZIONE:* Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , una sua *sottosuccessione* è una nuova successione del tipo  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ , dove  $n_k$  è a sua volta una *successione strettamente crescente di numeri naturali*.

Per esempio, da una data successione si può estrarre la sottosuccessione dei termini di indice pari, dei termini di indice dispari, di quelli il cui indice è divisibile per 54...

Evidentemente, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ , a maggior ragione si avrà  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$  per ogni sottosuccessione della prima. È però interessante notare che anche da una successione che *non ha limite* si può estrarre una sottosuccessione che ce l'ha: enunciamo e dimostriamo il Teorema di Bolzano-Weierstrass che afferma proprio questo!

*TEOREMA (di Bolzano-Weierstrass):* Da una successione limitata  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  è sempre possibile estrarre una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$  che ammette limite finito.

*DIM.:* Dimostriamo il teorema di Bolzano-Weierstrass usando il buon vecchio metodo di bisezione. Per ipotesi, la nostra successione è limitata, cioè esiste un intervallo  $[\alpha, \beta]$  tale che  $a_n \in [\alpha, \beta]$  per ogni  $n \in \mathbf{N}$ .

Se dividiamo l'intervallo  $[\alpha, \beta]$  in due metà, ce ne dovrà essere almeno una (che chiameremo  $[\alpha_1, \beta_1]$ ) tale che  $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$  per infiniti indici  $n$ . Analogamente, se dividiamo  $[\alpha_1, \beta_1]$  in due parti uguali, ce ne sarà una che chiameremo  $[\alpha_2, \beta_2]$  tale che  $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$  per infiniti indici  $n$ .

Proseguendo in questo modo, costruiamo una successione infinita di intervalli  $[\alpha_k, \beta_k]$ , ciascuno dei quali è una delle due metà del precedente, con la proprietà che la successione  $\{a_n\}$  cade entro  $[\alpha_k, \beta_k]$  per infiniti indici  $n$ .

Evidentemente,  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione crescente per cui esisterà

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \ell \in [\alpha, \beta].$$

Inoltre, avremo anche  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = \ell$  poiché  $\beta_k - \alpha_k = (\beta - \alpha)/2^k$ .

Costruiamo una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  di  $\{a_n\}$  nel modo seguente: come  $n_1$  prendiamo il più piccolo indice  $n$  per cui  $a_n$  appartiene a  $[\alpha_1, \beta_1]$ , come  $n_2$  il più piccolo indice  $n > n_1$  per cui  $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$  (esisterà certamente: di indici siffatti ce ne sono infiniti per costruzione di  $[\alpha_2, \beta_2]$ )... Proseguiamo allo stesso modo:  $n_k$  sarà il più piccolo indice  $n > n_{k-1}$  per cui  $a_n \in [\alpha_k, \beta_k]$ .

In questo modo, avremo individuato una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  di  $\{a_n\}$  tale che  $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$  per ogni  $k$ . Grazie al teorema dei carabinieri, si avrà quindi  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$ . Q.E.D.

*DIM. DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS:* Sia

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Dobbiamo mostrare che  $M$  è finito ed è il massimo di  $f$ , cioè che esiste  $\bar{x} \in [a, b]$  tale che  $f(\bar{x}) = M$ . L'esistenza del minimo si dimostra poi in modo analogo.

Innanzitutto, dalla definizione di sup segue che possiamo trovare una successione  $\{x_n\} \subset [a, b]$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se  $M$  è finito e  $n \in \mathbf{N}$ , basta osservare che  $M - \frac{1}{n}$  non è un maggiorante dell'immagine di  $f$  per trovare  $x_n \in [a, b]$  tale che  $M - 1/n < f(x_n) \leq M$ .

Se viceversa  $M = +\infty$  e  $n \in \mathbf{N}$ , allora  $n$  non è un maggiorante dell'immagine di  $f$  (perché essa è illimitata superiormente): esiste dunque  $x_n$  tale che  $f(x_n) > n$ .

La successione  $\{x_n\}$  è limitata (perché lo è l'intervallo  $[a, b]$ ): il teorema di Bolzano-Weierstrass ci fornisce una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}_k$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$ . Evidentemente,  $\bar{x} \in [a, b]$  (e per questo è essenziale la chiusura dell'intervallo...).

Allora, grazie alla continuità di  $f$  in  $\bar{x}$  si ha:

$$M = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}),$$

e  $\bar{x}$  è il punto di massimo cercato. Q.E.D.

## 9 Lezione del 17/10/2014 (2 ore)

*Concluso il nostro studio delle funzioni continue, è giunto il momento di avvicinarci al calcolo differenziale. Cominciamo dunque a introdurre il fondamentale concetto di derivata di una funzione.*

Supponiamo di avere una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , e di voler capire come è fatto il suo grafico: questo può avere un notevole interesse applicativo, per esempio se vogliamo massimizzare o minimizzare una quantità fisica rappresentata da  $f$ .

Se guardiamo il grafico di una funzione “a caso” (che sia però abbastanza regolare: supponiamo che il grafico sia una linea continua e senza spigoli vivi), ci accorgiamo che ci sarebbe estremamente utile saper identificare i tratti “in salita” e i tratti “in discesa” del grafico della funzione! Per far questo, abbiamo bisogno di una definizione di *pendenza del nostro grafico in un punto*.

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se  $f(x) = mx + q$ , il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso “stradale”: rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale!) è data *dal coefficiente angolare*  $m$ . In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se  $m > 0$  il grafico è in “salita”, se  $m = 0$  è “piano” e se  $m < 0$  è in “discesa”!

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante, ma potrà cambiare da punto a punto. Vedremo la prossima volta come fare a definire in modo rigoroso questa “pendenza nel punto”!

Vediamo come possiamo definire la “pendenza” del grafico di una funzione reale di variabile reale in un suo punto di ascissa  $x_0$ : se prendiamo due punti *abbastanza vicini* sulla retta reale,  $x_0$  e  $x_0 + h$ , è ragionevole pensare che la “pendenza” del grafico di  $f$  in  $x_0$  (qualunque cosa questo significhi!), sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico,  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ . Tale pendenza è data dall’espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

detta “rapporto incrementale”.

E’ ragionevole supporre che prendendo  $h$  sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini), avremo un’approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ . Diamo dunque la seguente

*DEFINIZIONE:* La pendenza del grafico di  $f$  per  $x = x_0$  si chiama *derivata di  $f$  in  $x_0$*  e si indica con  $f'(x_0)$ . Essa si definisce ponendo

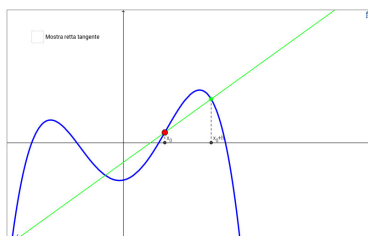
$$f'(x_0) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

*purché il limite esista finito.*

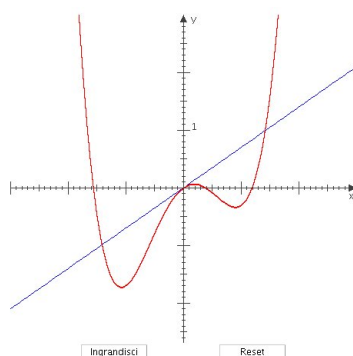
*Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in  $x_0$ .*

In particolare, se  $f'(x_0)$  esiste, la *retta tangente* al grafico di  $f$  per  $x = x_0$  sarà la retta passante per  $(x_0, f(x_0))$  la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

Per visualizzare meglio la definizione di derivata, vi propongo una animazione interattiva<sup>7</sup> che illustra il concetto



I più curiosi potranno trovare anche un modo alternativo di vedere la retta tangente, come “limite di ingrandimenti del grafico di  $f$  attorno a  $(x_0, f(x_0))$ ”:



Diamo altre possibili interpretazioni del rapporto incrementale e della derivata: velocità media e velocità istantanea di un corpo che si muove di moto rettilineo, velocità media e istantanea di una reazione chimica, tasso di interesse (o tasso di inflazione...).

Un risultato assai semplice ma importante è il seguente

*TEOREMA:* Se  $f$  è una funzione definita in un intorno di  $x_0$  derivabile in  $x_0$ , allora  $f$  è anche continua in  $x_0$ .

*Dimostrazione:* Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = 0.$$

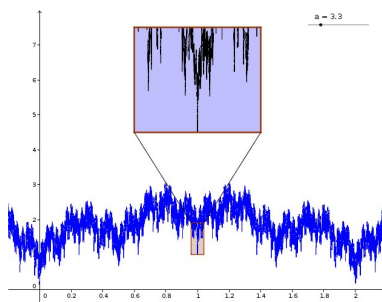
Infatti, nell’ultima espressione la frazione tende a  $f'(x_0)$ , mentre il fattore  $h$  tende a 0.

Q.E.D.

Osserviamo che il viceversa non è vero: una funzione può essere continua ma non derivabile in un punto, come ad esempio la funzione  $f(x) = |x|$  in 0.

<sup>7</sup><http://www.geogebraTube.org/material/show/id/196977>

In realtà, può suggerere ben di peggio: nel 1872 Karl Weierstrass costruì una funzione ovunque continua sulla retta reale, ma non derivabile in alcun punto. La costruzione di questa funzione richiede conoscenze un po' più raffinate di quelle che possediamo in questo momento. Nel frattempo, però, possiamo ammirarne il grafico (cliccando sull'immagine parte un filmato!):



Come abbiamo fatto con i limiti, possiamo chiederci cosa sia la derivata della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni:

*TEOREMA (Algebra delle derivate):* Siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  due funzioni definite in un intorno di  $x_0$ , derivabili in  $x_0$ .

- (i) La somma di  $f$  e  $g$  è derivabile in  $x_0$ , e  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ;
- (ii) Il prodotto di  $f$  e  $g$  è derivabile in  $x_0$ , e  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ;
- (iii) se  $g(x_0) \neq 0$ , allora  $f/g$  è derivabile in  $x_0$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

*Dimostrazione:* La (i) è praticamente ovvia (il rapporto incrementale della somma è la somma dei rapporti incrementali...

Dimostriamo la (ii): abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} &= \\ \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} &= \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0 + h) + f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} & \end{aligned}$$

e passando al limite per  $h \rightarrow 0$  (tenendo conto anche della continuità delle funzioni derivabili) si ottiene (ii).

Per dimostrare la (iii), calcoliamoci la derivata di  $1/g(x)$ : dobbiamo fare

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

La (iii) segue allora immediatamente usando la formula appena ricavata e la (ii). Q.E.D.

Usando queste semplici regole, e la stessa definizione di derivata, verifichiamo senza difficoltà che  $(x^n)' = nx^{n-1}$  per  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ,  $(e^x)' = e^x$  (e analogamente  $(a^x)' = a^x \log a$ ),  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ .

## 10 Lezione del 22/10/2014 (2 ore)

Vediamo ora come si deriva una funzione composta:

*TEOREMA (Chain Rule):* Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $x_0$ , derivabile in  $x_0$ , e sia  $g$  una funzione definita in un intorno di  $y_0 = f(x_0)$ , derivabile in  $y_0$ . Allora la funzione composta  $g \circ f(x) = g(f(x))$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

*DIM.:* Introduciamo la seguente funzione ausiliaria, definita in un intorno di 0:

$$A(k) = \begin{cases} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0, \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione è *continua in 0*, per definizione di derivata.

Costruiamo ora il rapporto incrementale della funzione  $g \circ f$ , e passiamo al limite per  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} &= \\ A(f(x_0+h) - f(x_0)) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

Q.E.D.



Usando questa formula possiamo calcolarci altre derivate. Per esempio, se  $x > 0$  e  $a \in \mathbf{R}$  abbiamo:  $(x^a)' = (e^{a \log x})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$ .

Analogamente

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \log f(x)})' = \dots$$

Ci poniamo ora la questione della derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile (ed invertibile).

*TEOREMA (Derivata della funzione inversa):* Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua e strettamente crescente su un intervallo aperto  $I$ ,  $g : J \rightarrow I$  la sua inversa (definita sull'intervallo  $J = f(I)$ ). Se  $f$  è derivabile in  $x_0 \in I$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora  $g$  è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$ , e  $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ . In altre parole,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

*Dimostrazione:* Osserviamo che se *sapessimo già* che la funzione inversa  $g$  è derivabile in  $y_0$ , la formula per la derivata di  $g$  sarebbe facilissima da trovare. Infatti  $g(f(x)) = x$ , e derivando ambo i membri si ha  $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$ , da cui la formula voluta.

Siccome però non sappiamo che  $g$  è derivabile in  $y_0$ , dobbiamo proprio trovare il limite del rapporto incrementale  $(g(y_0 + h) - g(y_0))/h$  per  $h \rightarrow 0$ .

Se poniamo  $y_0 + h = f(x_0 + k)$ , applicando la  $g$  ad ambo i membri troviamo  $g(y_0 + h) = x_0 + k = g(y_0) + k$ , da cui  $g(y_0 + h) - g(y_0) = k$ . Siccome sappiamo che con le nostre ipotesi la funzione inversa  $g$  è continua, vediamo che quando  $h \rightarrow 0$  anche  $k \rightarrow 0$ . Dunque

$$g'(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Q.E.D.

Utilizziamo il teorema di derivazione della funzione inversa per trovare la derivata di  $\arcsin y$ :

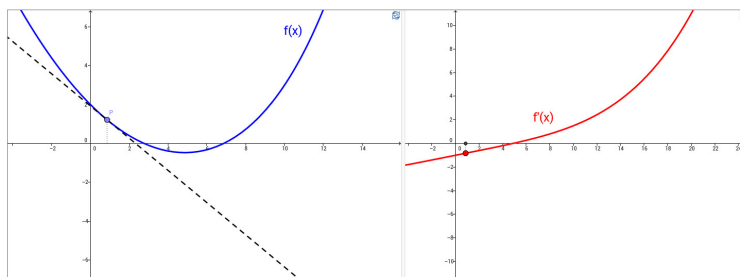
$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga troviamo che  $(\arccos y)' = -1/\sqrt{1 - y^2}$ , e che  $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2)$  (per quest'ultima formula, si ricordi l'identità  $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \tan^2 \alpha)$ ).

Ora abbiamo a disposizione un arsenale di risultati sufficiente a calcolare le derivate di tutte le funzioni esprimibili in termini di funzioni elementari tramite operazioni algebriche e di composizione. Quindi, in linea di principio, siamo in grado di studiare l'andamento di un gran numero di funzioni studiando il segno delle loro derivate.<sup>8</sup>

Per determinare in modo più accurato l'andamento del grafico di una funzione, è utile saper trovare gli intervalli di concavità e di convessità del grafico stesso: bisogna cioè saper determinare se, in un certo intervallo, la funzione “fa la pancia” verso il basso o verso l'alto....

Prima di proseguire nella lettura, potete esaminare la seguente introduzione interattiva alle funzioni convesse...<sup>9</sup>



Cominciamo con una definizione rigorosa di convessità *per una funzione derivabile*: in realtà, si può dare una definizione più generale, valida anche per funzioni non derivabili.

*Definizione:* Diciamo che una funzione derivabile  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è *convessa sull'intervallo*  $[a, b]$  se il grafico di  $f$  giace tutto al di sopra di ogni retta tangente al grafico stesso, condotta per un punto qualunque di  $[a, b]$ . Con linguaggio simbolico, vogliamo che per ogni  $x_0 \in [a, b]$  e per ogni  $x \in [a, b]$  valga

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Se vale sempre la disuguaglianza opposta, diremo che la funzione è *concava*.

Se disegniamo il grafico di una funzione convessa, osserviamo come la pendenza delle rette tangenti cresca man mano che il punto di tangenza si sposta verso destra: in effetti, questa è una caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili:

*TEOREMA:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile. Allora  $f$  è convessa se e solo se la funzione derivata  $f'$  è *crescente* sull'intervallo  $[a, b]$ .

<sup>8</sup>A rigore, bisogna dire che per ora abbiamo solo “intuito” che una funzione con derivata positiva su un intervallo è crescente in tale intervallo: l'effettiva dimostrazione di questo plausibilissimo fatto verrà data in seguito!

<sup>9</sup><http://www.geogebraTube.org/student/m210555>

*Dimostrazione:* Supponiamo che  $f$  sia convessa, e prendiamo  $x_1, x_2$  in  $[a, b]$ . Per la disuguaglianza di convessità abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ f(x) &\geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2), \end{aligned}$$

disuguaglianze valide per ogni  $x \in [a, b]$ . In particolare, prendiamo  $x = x_2$  nella prima disuguaglianza,  $x = x_1$  nella seconda, e sommiamo: si ottiene

$$(f'(x_1) - f'(x_2)) \cdot (x_2 - x_1) \leq 0,$$

che è proprio la crescita della funzione derivata.

Viceversa, supponiamo che la funzione  $f'$  sia crescente e prendiamo  $x_0 \in [a, b]$ . Consideriamo la funzione derivabile  $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$ . Si ha  $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ , per cui  $g'$  è una funzione crescente che è negativa per  $x < x_0$ , mentre è positiva per  $x > x_0$ . Ne deduciamo che la funzione  $g$  ha un minimo assoluto per  $x = x_0$ : essa è infatti *decreciente* nell'intervallo a sinistra di  $x_0$ , *crescente* nell'intervallo a destra di  $x_0$ <sup>10</sup>. Poichè  $g(x_0) \geq 0$ , abbiamo  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ : questa è proprio la disuguaglianza di convessità!

Q.E.D.

Grazie a questo teorema, abbiamo un comodo criterio di convessità per funzioni la cui derivata sia ancora derivabile (ossia per funzioni derivabili due volte): una funzione  $f$  derivabile due volte in un intervallo sarà *convessa* se  $f''(x) \geq 0$  per ogni  $x$  nell'intervallo, sarà invece *concava* se  $f''(x) \leq 0$  in ogni punto  $x$  dell'intervallo.

## 11 Lezione del 23/10/2014 (3 ore)

Passiamo ora ad esaminare con le dovute cautele un fatto che abbiamo usato sinora con indebita disinvoltura. Infatti, abbiamo osservato che siccome la derivata corrisponde geometricamente alla “pendenza del grafico”, se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, essa sarà crescente in esso.

Questo fatto è intuitivamente molto plausibile, perché non si vede come una funzione possa avere il grafico “in salita” in tutti i punti di un intervallo senza essere anche crescente! D'altra parte, non ne abbiamo vista alcuna dimostrazione rigorosa: tale dimostrazione è lo scopo dei discorsi che seguono.

---

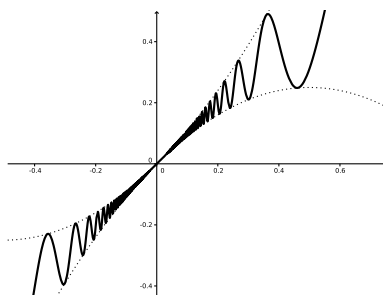
<sup>10</sup>Abbiamo usato ancora una volta il fatto che una funzione derivabile è crescente su un intervallo se e solo se la sua derivata è non negativa.

Per apprezzare maggiormente la portata del teorema che afferma la crescita di una funzione con derivata positiva in un intervallo, vale la pena di vedere un paio di esempi “patologici” ...che sottolineano quanto la derivata sia un oggetto intrinsecamente *locale*: avere un teorema che consente di ottenere informazioni globali dalla derivata è quindi particolarmente interessante!

*ESEMPIO*: Come primo esempio, abbiamo considerato la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(1/x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcolando esplicitamente la derivata per  $x \neq 0$ , abbiamo verificato che questa cambia di segno infinite volte in un intorno di 0: non esiste alcun intorno di 0 in cui la funzione è crescente o decrescente. D'altra parte, un calcolo diretto usando la definizione di derivata mostra che  $f$  è derivabile in 0 con  $f'(0) = 1$ .



Dunque, dal fatto che la derivata sia strettamente positiva *in un punto* non possiamo dedurre che la funzione è crescente in un intorno di quel punto!

Si noti però che l'esempio funziona perché la derivata di  $f$  è discontinua in 0: se la derivata fosse continua, dovrebbe essere positiva in un intervallino centrato in 0 e la funzione sarebbe crescente in tale intervallo.

*ESEMPIO*: Vediamo una funzione ancora più patologica. Una funzione può essere derivabile (e quindi continua) in un punto, ma essere discontinua in *tutti* gli altri punti del suo dominio.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Grazie alla densità di razionali e di irrazionali in  $\mathbf{R}$ , si vede subito che questa funzione è discontinua per ogni  $x \neq 0$ . D'altra parte, essa è derivabile in 0 con derivata 1 (si usi la definizione di derivata).

Anche questa funzione ha ovviamente la proprietà di avere derivata strettamente positiva in 0, ma di non essere crescente in alcun intorno di 0.

Torniamo dunque al nostro risultato teorico! Cominciamo col ricordare la seguente definizione:

**DEFINIZIONE:** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Un punto  $x_0 \in [a, b]$  si dice di *massimo relativo* (risp., di *minimo relativo*) per  $f$  se esiste un intorno  $I_{x_0}$  di  $x_0$  tale che  $f(x) \leq f(x_0)$  (risp.,  $f(x) \geq f(x_0)$ ) per ogni  $x \in I_{x_0} \cap [a, b]$ .

Veniamo ad un primo, semplice risultato: se una funzione è derivabile in un punto di *massimo o minimo relativo interno* all'intervallo di definizione, in quel punto la derivata si deve annullare:

**TEOREMA (Principio di Fermat):** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$  un punto di *massimo o minimo relativo* per  $f$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f'(x_0) = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE:** Supponiamo per fissare le idee che  $x_0$  sia di minimo relativo.

Consideriamo il rapporto incrementale per  $f$  in  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se prendiamo  $h$  abbastanza piccolo, in modo che  $x_0 + h$  appartenga all'intorno  $I_{x_0}$  nella definizione di minimo relativo, vediamo subito che il numeratore è maggiore o uguale a 0. Ne consegue che il rapporto incrementale sarà positivo (o nullo) per  $h > 0$  abbastanza piccolo, e negativo (o nullo) per  $h < 0$  abbastanza piccolo in modulo. Ne segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

e contemporaneamente

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dunque,  $f'(x_0) = 0$ , Q.E.D.

Si noti che questo teorema può essere falso per punti di massimo o minimo relativo che siano *agli estremi* dell'intervallo su cui  $f$  è definita. Per esempio, si consideri la funzione  $f(x) = x$  sull'intervallo  $[0, 1]$ ...

Due conseguenze del principio di Fermat sono i teoremi di Rolle e di Lagrange, che sono tra i risultati più importanti del calcolo differenziale per funzioni di una variabile:

*TEOREMA (di Rolle):* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua, derivabile nell'intervallo  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b)$ , allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .

*DIMOSTRAZIONE:* Grazie al teorema di Weierstrass, la funzione possiede un punto di massimo assoluto  $x_M$ , e uno di minimo assoluto  $x_m$ .

Se uno di questi punti appartiene all'interno dell'intervallo, esso è anche di massimo o minimo relativo, e per il principio di Fermat la derivata si deve annullare in quel punto (che sarà dunque il punto  $c$  cercato).

In caso contrario,  $x_m$  e  $x_M$  coincidono con gli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo. Allora, per ogni  $x \in [a, b]$  si ha

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a),$$

per cui il massimo e il minimo di  $f$  coincidono. Ne segue che  $f$  è costante, e la sua derivata si annulla in *tutti* i punti dell'intervallo. Q.E.D.

*TEOREMA (di Lagrange):* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua, derivabile nell'intervallo  $(a, b)$ . Esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

*DIM.:* Consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Questa è una funzione continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Inoltre  $g(a) = f(a) = g(b)$ , per cui possiamo applicare il teorema di Rolle e ottenere un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $g'(c) = 0$ . Questo è proprio il punto cercato. Q.E.D.

A lezione, abbiamo visto che le ipotesi dei teoremi di Rolle e Lagrange non possono essere in generale indebolite, e abbiamo discusso il significato geometrico di questi risultati.

Quel che è più importante, è comunque la seguente conseguenza del teorema di Lagrange, da noi già ampiamente utilizzata:

*COROLLARIO:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile. Se  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora  $f$  è crescente in  $[a, b]$ .

Se  $f'$  è invece minore o uguale a 0, la funzione è decrescente in  $[a, b]$ . Infine, se  $f' = 0$  in tutto l'intervallo, la funzione è costante.

*DIMOSTRAZIONE:* Facciamo vedere per esempio che vale la prima delle nostre affermazioni: supponiamo che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Siano poi  $x_1$  e  $x_2$  due punti di  $[a, b]$ , con  $x_1 < x_2$ . Appliciamo il teorema di Lagrange a  $f$  sull'intervallo  $[x_1, x_2]$ : troviamo  $c \in (x_1, x_2)$  tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Per l'ipotesi sulla derivata, il membro di destra è maggiore o uguale a zero. Q.E.D.

Ci occuperemo ora del problema di approssimare una funzione regolare, in un intorno di un punto, mediante polinomi.

Supponiamo di avere una funzione  $f$  derivabile in  $x_0$ : se ci chiedessero qual è la retta che meglio approssima il grafico di  $f$  vicino a  $x_0$ , probabilmente risponderemmo tutti che è la retta tangente  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ : la cosa è ancora più plausibile se facciamo un disegno!

Vediamo però di precisare meglio (in maniera quantitativa) in che senso la retta tangente è quella che approssima meglio  $f$  in un intorno di  $x_0$ : se  $g(x) = ax + b$  è un polinomio di primo grado che approssima  $f$ , possiamo scrivere che  $f(x) = g(x) + R(x)$ , dove  $R(x)$  è un "resto" che vogliamo sia il più piccolo possibile quando  $x$  si avvicina a  $x_0$ .

Siccome  $R(x) = f(x) - a(x - x_0) - b$ , notiamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 \iff b = f(x_0).$$

In questo senso, tutte le rette che passano per il punto  $(x_0, f(x_0))$  "approssimano  $f$ ", nel senso che il resto tende a zero quando  $x$  si avvicina a  $x_0$ ! Perché, dunque, la retta tangente è meglio delle altre?

Perché è l'unica per cui *il resto tende a zero più rapidamente di  $x - x_0$* , cioè è l'unica per cui si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Infatti, siccome abbiamo già osservato che deve essere  $b = f(x_0)$ , la quantità di cui dobbiamo fare il limite diventa:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \rightarrow f'(x_0) - a.$$

Dunque, il limite è zero se  $a = f'(x_0)$ , mentre è non nullo in tutti gli altri casi.

Concludiamo dunque che la retta tangente è la retta di migliore approssimazione intorno a  $x_0$ , nel senso che è quella per cui *il resto tende a 0 più rapidamente quando  $x \rightarrow x_0$* !

Nel tentativo di generalizzare quanto appena scoperto, diventa naturale chiedersi qual è il polinomio di grado  $n$  che meglio approssima una certa funzione  $f$  (che supporremo derivabile quante volte si vuole) in un intorno di

$x_0$ . Ci viene il sospetto che sia un polinomio simile alla retta tangente, nel senso che le sue derivate fino alla  $n$ -esima nel punto  $x_0$  dovranno coincidere con quelle di  $f$ ...

Per semplificarci la vita, supponiamo che sia  $x_0 = 0$ : ci si può sempre ridurre a questa situazione con una traslazione lungo l'asse delle  $x$ .

Il polinomio di Taylor di grado  $n$  per  $f$  centrato in 0 è definito da

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

(Si noti che, ironia della sorte, il polinomio di Taylor "di grado  $n$ " ha in realtà grado minore o uguale a  $n$ ...)

*LEMMA 1:* Sia  $f$  una funzione derivabile  $n$  volte in 0. Tra tutti i polinomi  $P(x)$  di grado minore o uguale a  $n$ , il polinomio di Taylor  $P_n(x)$  è l'unico tale che  $P(0) = f(0)$ ,  $P'(0) = f'(0)$ ,  $P''(0) = f''(0)$ , ...,  $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ .

*DIM.:* Il generico polinomio di grado minore o uguale a  $n$  sarà della forma  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

Ora, derivando  $h$  volte il monomio  $x^k$  si ottiene  $k(k-1)\dots(k-h+1)x^{k-h}$  se  $h < k$ ,  $k!$  per  $h = k$ , mentre si ottiene 0 per  $h > k$ . Tale funzione è sempre nulla in 0, tranne che nell'unico caso in cui  $h = k$ , in cui vale  $k!$ .

Dunque, sostituendo nelle relazioni che abbiamo si ottiene  $P(0) = a_0 = f(0)$ ,  $P'(0) = a_1 = f'(0)$ ,  $P''(0) = 2a_2 = f''(0)$ , e in generale (per  $k \leq n$ )  $P^{(k)}(0) = k!a_k = f^{(k)}(0)$ . Di conseguenza, i coefficienti del polinomio devono essere proprio quelli che abbiamo attribuito al polinomio di Taylor di grado  $n$ . Q.E.D.

## 12 Lezione del 24/10/2014 (2 ore)

Per dimostrare che il polinomio di Taylor di grado  $n$  è quello che meglio approssima il grafico di  $f$  vicino a  $x_0$  (tra tutti i polinomi di grado  $\leq n$ ), ci sarà molto utile il Teorema di l'Hôpital, che è più in generale utilissimo per il calcolo del limite di forme indeterminate. Esso è applicabile a limiti di rapporti nella forma  $0/0$  o  $\infty/\infty$ :

*TEOREMA (l'Hôpital):* Siano  $f, g$  funzioni derivabili in un intorno di  $x_0$ , tranne eventualmente in  $x_0$  (dove possono anche non essere definite). Supponiamo inoltre che  $g'(x) \neq 0$  in tale intorno e che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$



oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e questi due limiti sono uguali. L'enunciato del teorema rimane vero anche se  $x_0 = \pm\infty$  e per limiti destri/sinistri (con le ovvie modifiche delle ipotesi).

A lezione, abbiamo visto un esempio di applicazione di questo teorema. Attenzione: il limite del rapporto  $f(x)/g(x)$  (in una delle due forme indeterminate suddette) può benissimo esistere anche se non esiste il limite del rapporto delle derivate. Ad esempio, si prenda  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ,  $g(x) = x$  con  $x_0 = 0$ : il rapporto si presenta nella forma  $0/0$  e tende a 0, ma non esiste il limite del rapporto delle derivate.

Non vedremo la dimostrazione del teorema.

Come conseguenza della regola di l'Hôpital abbiamo anche ottenuto un risultato semplice e utile: Sia  $f$  una funzione derivabile in un intorno  $I_{x_0}$  di  $x_0$ , tranne eventualmente in  $x_0$ . Se  $f$  è continua in  $x_0$ , e se esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$ , allora  $f$  è derivabile anche in  $x_0$  e  $f'(x_0) = \ell$ . Risultato simile se il limite  $\ell$  è infinito: in quel caso  $\ell$  è il limite del rapporto incrementale di  $f$  in  $x_0$  (solo che in quel caso...non lo chiamiamo derivata!). Infine, il risultato vale anche per limiti destri e sinistri della derivata (e in quel caso fornisce informazioni sulla derivata destra e sinistra).

Per ottenere questo risultato è sufficiente applicare il teorema di l'Hôpital al rapporto incrementale di  $f$  in  $x_0$ . In alternativa, il risultato si può dimostrare utilizzando direttamente il teorema di Lagrange.

Proseguiamo la nostra discussione sull'approssimazione di funzioni mediante polinomi. Ci servirà il seguente lemma:

*LEMMA 2:* Sia  $g(x)$  una funzione derivabile  $n - 1$  volte in un intorno di 0, con derivata  $n$ -esima in 0. Se  $g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$ , allora abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

DIM.: Basta applicare  $n - 1$  volte il teorema di L'Hôpital (grazie alle nostre ipotesi, ad ogni passo abbiamo una forma indeterminata  $0/0$ ) ed infine la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{n x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n! x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0)}{x} &= \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

*OSSERVAZIONE:* Se  $g$  è come nel lemma, ma qualcuna delle derivate di ordine minore o uguale a  $n$  è diversa da 0, il limite *non può* essere 0: rifacendo lo stesso calcolo, si trova che è infinito, oppure è un numero diverso da zero.

Come corollario, otteniamo una prima forma del Teorema di Taylor:

*TEOREMA (Di Taylor con resto di Peano):* Sia  $f$  una funzione derivabile  $n - 1$  volte in un intorno di 0 con derivata  $n$ -esima in 0. Se  $P_n(x)$  denota il polinomio di Taylor di grado  $n$  centrato in 0, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

*Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a  $n$ , il polinomio di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.*

DIM.: Grazie al Lemma 1, la funzione  $g(x) = f(x) - P_n(x)$  soddisfa le ipotesi del Lemma 2, e il teorema risulta dimostrato. L'unicità del polinomio di Taylor rispetto a questa proprietà segue dall'Osservazione fatta dopo la dimostrazione del Lemma 2. Q.E.D.

*OSSERVAZIONE:* Se al posto di 0 prendiamo un generico punto  $x_0$ , il polinomio di Taylor di grado  $n$  centrato in  $x_0$  sarà

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

In questo caso, il teorema di Taylor dice che se  $f$  è derivabile  $(n - 1)$  volte in un intorno di  $x_0$ , e possiede derivata  $n$ -esima in  $x_0$ , allora

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

A proposito della formula di Taylor con resto di Peano, torna comoda la definizione di "o piccolo":

*DEFINIZIONE:* Date due funzioni  $f, g$  definite in un intorno di  $x_0$ , diremo che  $f$  è un “o piccolo” di  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ , e scriveremo  $f(x) = o(g(x))$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

cioè se  $f(x)$  tende a zero più rapidamente di  $g(x)$  per  $x \rightarrow 0$ .

Con il linguaggio degli “o piccoli”, il teorema di Taylor con resto di Peano dice che  $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$ ...

Applichiamo ora la formula di Taylor con resto di Peano allo studio dei massimi e dei minimi relativi di una funzione. L’idea è che spesso, per capire se un punto in cui la derivata prima si annulla è di massimo o minimo relativo, basta studiare il segno della derivata seconda:

*TEOREMA:* Sia  $f$  una funzione derivabile  $k$  volte in  $x_0$  ( $k \geq 2$ ), e supponiamo che le prime  $k - 1$  derivate esistano in un intorno di  $x_0$ . Supponiamo anche che  $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ , mentre  $f^{(h)}(x_0) = 0$  per  $h = 1, \dots, k - 1$  (in altre parole, la prima derivata che non si annulla è la  $k$ -esima).

Allora

- se  $k$  è dispari,  $x_0$  non è né di massimo relativo né di minimo relativo;
- se  $k$  è pari e  $f^{(k)}(x_0) > 0$ , allora  $x_0$  è un punto di minimo relativo;
- se  $k$  è pari e  $f^{(k)}(x_0) < 0$ , allora  $x_0$  è un punto di massimo relativo.

DIM.: Si tratta di studiare il segno della funzione  $f(x) - f(x_0)$  quando  $x$  varia in un intorno sufficientemente piccolo di  $x_0$ : se tale funzione è positiva siamo in presenza di un punto di minimo relativo, se è negativa di un massimo (mentre se essa cambia di segno in ogni intorno, comunque piccolo, di  $x_0$ , il punto non è né di massimo né di minimo).

Se prendiamo  $x$  abbastanza vicino a  $x_0$  in modo che valgano le ipotesi del teorema di Taylor, otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x) = \left[ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} \right] (x - x_0)^k.$$

Siccome  $R_k(x)/(x - x_0)^k \rightarrow 0$ , la quantità tra parentesi quadre tende a  $f^{(k)}(x_0)/k!$  per  $x \rightarrow x_0$ . Di conseguenza, essa avrà lo stesso segno di  $f^{(k)}(x_0)$  quando  $x$  varia in un intorno sufficientemente piccolo di  $x_0$ . Poiché è invece chiaro che il polinomio  $(x - x_0)^k$  è sempre positivo per  $k$  pari, mentre cambia di segno per  $k$  dispari (a seconda che  $x$  stia a destra o a sinistra di  $x_0$ ), la tesi segue immediatamente. Q.E.D.

## 13 Lezione del 29/10/2014 (2 ore)

*Osservazione:* Il teorema dimostrato la volta scorsa ci dice che se  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) > 0$ , allora  $f(x) > f(x_0)$  (con la disuguaglianza stretta) se  $x \neq x_0$  è sufficientemente vicino a  $x_0$ : in altre parole, il punto in questione è un punto di minimo relativo stretto, e dunque non può di sicuro essere di massimo relativo.

Questo ci permette di invertire in parte il risultato precedente: se  $f$  è derivabile due volte in un intorno di  $x_0$  e  $x_0$  è di massimo relativo, allora  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \leq 0$  (La derivata prima si annulla per il principio di Fermat, mentre la seconda non può essere positiva perché se lo fosse il risultato precedente mi darebbe un punto di minimo relativo “stretto”, il che sarebbe assurdo!). Analogamente, in un punto di minimo relativo deve essere  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \geq 0$ .

In molti casi, il nostro teorema permette di stabilire se un punto in cui si annulla la derivata prima corrisponde ad un massimo o minimo relativo: basta trovare la prima derivata diversa da zero (a patto che la funzione sia derivabile abbastanza volte)! Può però capitare che la funzione sia derivabile infinite volte, ma *tutte* le derivate si annullino nel punto che ci interessa:

*ESEMPIO:* Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Con un po' di fatica si vede che  $f$  è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano.

D'altra parte, siccome la funzione  $f$  è non negativa, è evidente che 0 è un punto di minimo relativo.

Convieni tenere presente la funzione  $f$  di questo esempio: tornerà utile tra non molto!

Dimostriamo ora una versione leggermente più generale del teorema di Lagrange, che ci tornerà utile per trovare subito dopo un'espressione molto precisa del resto nella formula di Taylor.

*TEOREMA (di Cauchy):* Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni continue, derivabili in  $(a, b)$ . Supponiamo poi che  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in (a, b)$ . Allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DIM.: Si noti che risulta  $g(b) \neq g(a)$  (altrimenti otterremo un assurdo col teorema di Rolle): di conseguenza, il denominatore del secondo membro nella tesi non si annulla, e il teorema ha perfettamente senso.

Per dimostrarlo, basta applicare il teorema di Rolle alla funzione ausiliaria  $h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$ . Q.E.D.

Il teorema di Cauchy permette di dimostrare la regola di l'Hôpital (ma non lo faremo...), ed anche di dimostrare una variante particolarmente utile del teorema di Taylor.

Il prossimo teorema esprime appunto in modo molto preciso il resto che si ha nella formula di Taylor: questo permette di valutare l'errore che si commette, in un fissato punto  $x \neq x_0$ , sostituendo a  $f(x)$  il valore del suo polinomio di Taylor di ordine  $n$  centrato in  $x_0$ .

*TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Lagrange):* Sia  $f$  una funzione derivabile  $(n + 1)$  volte in un intervallo centrato in  $x_0$ , e sia  $x$  un punto appartenente a tale intervallo. Allora esiste un punto  $c$ , compreso tra  $x_0$  e  $x$ , tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di grado  $n$  centrato in  $x_0$ .

DIM.: Consideriamo la funzione  $g(x) = f(x) - P_n(x)$  (cioè il resto  $n$ -esimo).

Abbiamo visto la volta scorsa che essa ha la fondamentale proprietà di avere  $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$ . Inoltre,  $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$  perché la derivata  $(n + 1)$ -esima del polinomio  $P_n$  si annulla identicamente.

L'idea è ora di applicare  $(n + 1)$  volte il teorema di Cauchy, a partire dal rapporto

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}.$$

Infatti, il teorema di Cauchy applicato a tale espressione ci garantisce l'esistenza di un punto  $c_1$  compreso tra  $x_0$  e  $x$ , tale che l'espressione stessa è uguale a

$$\frac{g'(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n}.$$

L'ultima quantità può essere anche riscritta

$$\frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n - (n+1)(x_0 - x_0)^n},$$

e possiamo riapplicare il teorema di Cauchy... Ripetendo questo passaggio per  $(n+1)$  volte troviamo:

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dots = \frac{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(c_n - x_0)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

dove  $c_1, \dots, c_n, c$  sono opportuni punti compresi tra  $x_0$  e  $x$ . Q.E.D.

*ESERCIZIO:* Supponiamo che una funzione  $f$  soddisfi le ipotesi del teorema appena dimostrato, e che inoltre la derivata  $f^{(n+1)}$  sia continua in  $x_0$ . Mostrare che allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

(In buona sostanza, avremo ridimostrato il Teorema di Taylor con resto di Peano, anche se con ipotesi leggermente più forti perché chiediamo la continuità della derivata  $(n+1)$ -esima...)

Mettiamo subito a frutto il teorema dimostrato, usandolo per approssimare alcune importanti funzioni con polinomi.

Cominciamo col prendere  $f(x) = e^x$  (e  $x_0 = 0$ ): la formula di Taylor con resto di Lagrange ci dice che esiste un punto  $c$  compreso tra 0 e  $x$  tale che

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Dimostriamo ora che il resto, qualunque sia  $x \in \mathbf{R}$ , tende a 0 per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si noti che, anche se  $c$  dipende in generale sia da  $x$  che da  $n$ , la quantità  $e^c$  è maggiorata da  $e^{|x|}$ , per cui ci basterà far vedere che  $x^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Questo fatto, a sua volta, si dimostra immediatamente ricordando la stima

$$n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

che abbiamo provato per induzione.

In conclusione, abbiamo fatto vedere che

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

L'ultimo limite si chiama *serie di Taylor di  $e^x$* , e si denota usualmente con  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ :

In generale, si ha la seguente definizione di serie:

**DEFINIZIONE:** Se  $\{a_k\}$  è una successione di numeri reali, col simbolo  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (che si legge “*serie degli  $a_k$* ”, si intende per definizione il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k,$$

a patto che tale limite esista. Se il limite è finito, si dice che la serie *converge*, se è infinito che *diverge*, se infine non esiste si dice che la serie è *indeterminata*.

Come ulteriore applicazione del teorema di Taylor con resto di Lagrange, dimostriamo che *il numero di Nepero  $e$  è irrazionale*.

Supponiamo infatti per assurdo che si abbia  $e = p/q$ , con  $p$  e  $q$  numeri naturali. Applichiamo il teorema di Taylor con resto di Lagrange alla funzione esponenziale, con  $x_0 = 0$  e  $x = 1$ : per ogni  $n \in \mathbf{N}$  troviamo un punto  $c \in (0, 1)$  tale che

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + e^c \frac{1}{n+1!}.$$

Prendiamo  $n > q$ , e moltiplichiamo ambo i membri dell'identità per  $n!$ . Otteniamo:

$$\frac{p}{q} n! = \left( 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \cdot n! + \frac{e^c}{n+1}.$$

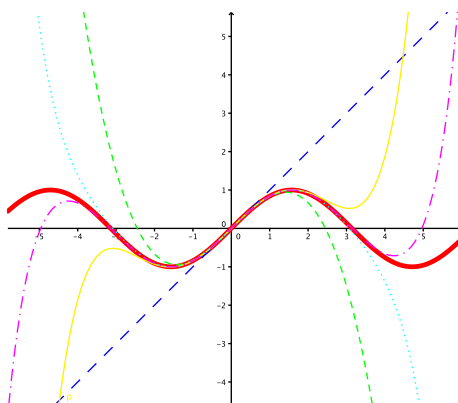
Il membro di sinistra dell'uguaglianza è evidentemente un intero, così come il primo pezzo del membro di destra (la quantità tra parentesi tonde moltiplicata per  $n!$ ). Invece, l'ultimo termine è non nullo e si maggiora con  $e/(n+1)$  (perché  $c < 1$ ), e quest'ultima quantità è strettamente minore di 1 per  $n$  abbastanza grande: questo è evidentemente assurdo (un intero non può essere uguale ad un intero più una quantità minore di 1).

## 14 Lezione del 30/10/2014 (3 ore)

Con lo stesso tipo di conti, abbiamo poi verificato che si ha anche

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

per ogni  $x \in \mathbf{R}$ . Nella figura, tanto per rendere visivamente la cosa, abbiamo disegnato i primi polinomi di Taylor della funzione seno:



Ricordiamo poi la formula per la somma di una progressione geometrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

La si può dimostrare facilmente per induzione oppure moltiplicando ambo i membri per  $1 - x$ ...

Cerchiamo poi di determinare un'altra serie di Taylor interessante in modo un po' bizzarro. Precisamente, studiamo la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ . Per definizione di serie, abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1, \\ +\infty & \text{se } x \geq 1, \\ \cancel{\text{A}} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

dove abbiamo usato la formula per la somma di una progressione geometrica.



In conclusione, per  $-1 < x < 1$  si ha

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

mentre al di fuori di questo intervallo la serie non converge ad un limite finito (o non converge affatto).

Ora, non è affatto difficile verificare che questa è proprio la serie di Taylor (centrata in 0) della funzione  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ : infatti abbiamo  $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ , da cui  $f^{(k)}(0) = k! \dots$ . Oppure, basta osservare che  $1 + x + x^2 + \dots + x^n$  è il polinomio di Taylor di grado  $n$  di  $1/(1-x)$  perché soddisfa il Teorema di Taylor con resto di Peano (conto immediato!).

Questo è un esempio di funzione la cui serie di Taylor centrata in zero converge alla funzione stessa su un intervallo centrato nell'origine, ma non sull'intera retta reale.

Sostituendo  $x$  con  $-x$  nella serie precedente si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad -1 < x < 1.$$

A questo punto, sorge spontanea la seguente questione: se  $f$  è una funzione derivabile infinite volte in  $x_0$ , è sempre possibile trovare un intorno di  $x_0$  tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k?$$

La risposta è negativa:

*ESEMPIO:* Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

si può far vedere che essa è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano (tralasciamo la dimostrazione: il punto chiave sarebbe far vedere, per esempio per induzione, che per  $x \neq 0$  si ha per ogni  $n$

$$f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2},$$

dove  $g_n(x)$  è un polinomio... A questo punto, basta passare al limite per  $x \rightarrow 0$  per concludere che la derivata  $n$ -esima esiste ed è nulla nell'origine).

Ne segue che la serie di Taylor centrata in 0 per  $f$  è identicamente nulla, e quindi evidentemente essa coincide con  $f$  solo per  $x = 0$ .

Le funzioni la cui serie di Taylor converge alla funzione stessa in un intorno di  $x_0$  si dicono *analitiche in  $x_0$* : la funzione dell'esempio non è analitica, mentre la funzione esponenziale, il seno ed il coseno lo sono.

Per concludere la parte sui polinomi e sulle serie di Taylor, vogliamo dare una brevissima panoramica, senza dimostrazioni, della *teoria delle serie di potenze*: studieremo queste cose in maggior dettaglio più avanti!

Una *serie di potenze* è per definizione una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

dove  $\{a_k\}$  è una successione nota di numeri reali. Questo è proprio il tipo di serie che si ottiene come serie di Taylor (centrata nell'origine) di una funzione derivabile infinite volte!

Nel caso peggiore, una serie di potenze converge solo per  $x = 0$ ... In tutti gli altri casi, converge in un intervallo centrato nell'origine, del tipo  $(-r, r)$  (oppure  $[-r, r]$ ,  $(-r, r]$  o  $[-r, r)$ ...  $r$  può anche essere infinito). Il numero  $r$  si chiama raggio di convergenza della serie di potenze, e ci sono metodi piuttosto semplici per calcolarlo.

Supponiamo dunque che la nostra serie di potenze abbia raggio di convergenza positivo, e chiamiamo  $f(x)$  la somma della serie (per  $x$  nell'intervallo in cui questa converge):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Allora si può dimostrare che  $f(x)$  è una funzione derivabile infinite volte, e che la serie di potenze non è altro che la serie di Taylor della sua somma  $f(x)$  (...e dunque quel che avevamo visto nel caso della funzione  $1/(1-x)$  non era casuale). Inoltre, la derivata si calcola semplicemente derivando la serie termine a termine:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

con la serie delle derivate che converge nello stesso intervallo della serie originale (tranne, eventualmente, gli estremi).

Si noti che quest'ultima affermazione non è immediatamente ovvia: stiamo derivando una *somma infinita* di funzioni!

Come conseguenza di questo teorema, si può mostrare che

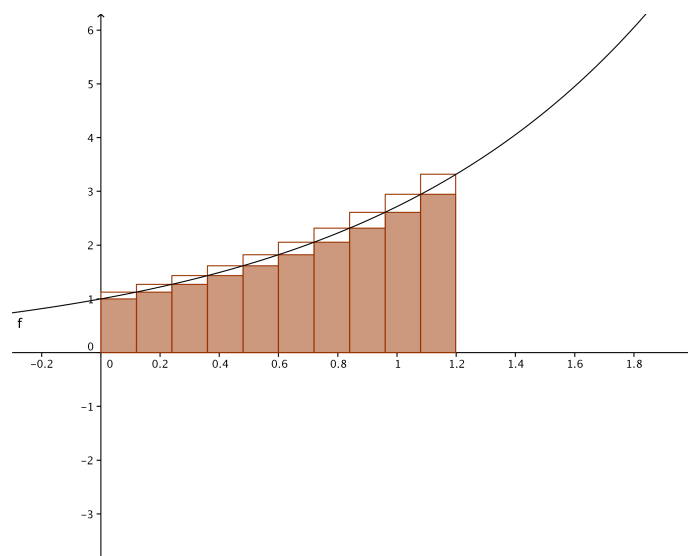
$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{per } x \in (-1, 1).$$

Infatti, si può far vedere, con i semplici metodi che vedremo più avanti, che la serie data converge nell'intervallo indicato *ad una qualche funzione*. D'altra parte, la serie delle derivate è la serie geometrica di ragione  $(-x)$ , scritta poco sopra: questa sappiamo che converge a  $1/(1+x)$ . Siccome quest'ultima è proprio la derivata di  $\log(1+x)$ , deduciamo che la serie originale converge proprio a questa funzione (più un eventuale costante: ma la costante è evidentemente 0, come si verifica calcolando funzione e serie per  $x = 0\dots$ ).

Conclusi per ora i nostri discorsetti sulla formula di Taylor, cominceremo a studiare una definizione rigorosa di area per certe figure piane delimitate da un contorno curvilineo. Questo ci porterà a dare la definizione di integrale nel senso di Riemann per una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ .

Partiamo da un esempio concreto: supponiamo di voler dare un senso all'area della regione limitata del piano delimitata dall'asse delle  $x$ , dal grafico della funzione  $f(x) = e^x$ , dall'asse delle  $y$  e dalla retta  $x = a$ : si tratta di una specie di trapezio rettangolo, solo che il lato obliquo è curvo (è infatti il grafico della funzione  $e^x$ ).

Un'idea potrebbe essere la seguente: dividiamo l'intervallo  $[0, a]$  in  $n$  intervallini uguali (che avranno quindi estremi  $0, a/n, 2a/n, 3a/n, \dots, a$ ). Per ciascuno di questi intervallini, costruiamo un rettangolo che ha l'intervallino stesso come base, e altezza uguale al valore della funzione esponenziale *nell'estremo di sinistra*: in altre parole, sull'intervallino  $[ka/n, (k+1)a/n]$  costruiamo un rettangolo di altezza  $e^{ka/n}$ .



In questo modo otteniamo una figura “a scala” che è tutta *contenuta* nella figura curvilinea di cui vogliamo calcolare l’area: l’area di questa scala inscritta si calcola subito, e vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} e^{ka/n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1}.$$

L’ultima espressione, per  $n \rightarrow +\infty$ , tende al numero  $(e^a - 1)$ , che rappresenta quindi il limite delle nostre approssimazioni per difetto.

In maniera analoga, possiamo costruire una “scala circoscritta” alla regione che ci interessa, prendendo su ciascun intervallino  $[ka/n, (k+1)a/n]$  un rettangolo di altezza  $e^{(k+1)a/n}$ . In tal caso, l’area della scalinata sarà

$$e^{a/n} \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1},$$

che tende ancora al limite  $e^a - 1$ . Possiamo dunque legittimamente affermare che l’area del trapezoide curvilineo sotto la funzione esponenziale tra 0 e  $a$ , vale esattamente  $e^a - 1$ : tale numero si chiama *integrale* della funzione esponenziale tra 0 e  $a$ , e si indica

$$\int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

Vediamo ora come l’idea soggiacente a questo conticino con la funzione esponenziale sia estendibile ad un gran numero di funzioni!

**DEFINIZIONE:** Una funzione  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  si dice *a scala* se esiste una suddivisione di  $[a, b]$  in un numero finito di intervallini di estremi  $a = x_0 <$

$x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ , in modo tale che  $\phi$  assuma valore costante  $c_i$  su ciascun intervallino  $(x_i, x_{i+1})$  (per  $i = 0, \dots, N - 1$ ).

L'integrale della suddetta funzione a scala si definisce come

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

Come si vede, una funzione a scala è caratterizzata dal fatto che il suo grafico è un *istogramma*. Si noti che se  $\phi$  è positiva, l'integrale della funzione a scala è semplicemente l'area dell'unione finita di rettangoli delimitata dal grafico di  $\phi$ , l'asse delle  $x$  e le rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ . Se  $\phi$  ha anche tratti negativi, l'unica differenza è che gli scalini con "altezza negativa" si contano con "area negativa".

Le funzioni a scala ed il loro integrale godono delle seguenti proprietà, la cui dimostrazione è lasciata alla riflessione del lettore:

*LEMMA:* Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono funzioni a scala su  $[a, b]$ , e  $c \in \mathbf{R}$ , allora

- $c\phi_1$  e  $\phi_1 + \phi_2$  sono funzioni a scala;
- l'integrale è lineare:

$$\begin{aligned} \int_a^b (c\phi_1(x)) dx &= c \int_a^b \phi_1(x) dx \\ \int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x)) dx &= \int_a^b \phi_1(x) dx + \int_a^b \phi_2(x) dx; \end{aligned}$$

- l'integrale è monotono: se  $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora

$$\int_a^b \phi_1(x) dx \leq \int_a^b \phi_2(x) dx.$$

Siamo ora in grado di definire l'integrale superiore, l'integrale inferiore ed eventualmente l'integrale di una funzione limitata:

*DEFINIZIONE:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata. L'integrale superiore di  $f$  si definisce come

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) dx : \phi \text{ a scala, } \phi \geq f \text{ in } [a, b] \right\}.$$

Analogamente, l'integrale inferiore di  $f$  si definisce come

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ a scala, } \psi \leq f \text{ in } [a, b] \right\}.$$

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono, diremo che la funzione  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ , ed indicheremo il valore comune dei due integrali con

$$\int_a^b f(x) dx,$$

integrale secondo Riemann di  $f$  su  $[a, b]$ .

Vale una semplice caratterizzazione dell'integrale di Riemann, che permette tra l'altro di verificare la correttezza di quanto trovato sopra per l'integrale della funzione esponenziale:

*PROPOSIZIONE:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata.  $f$  è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  si possono trovare due funzioni a scala  $\phi, \psi$  con  $\psi \leq f \leq \phi$  in  $[a, b]$  tali che

$$\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Prima di dare la semplice dimostrazione di questo risultato, vediamo un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann:

*ESEMPIO (Funzione di Dirichlet):* Si consideri la funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Abbiamo già incontrato questa funzione, ed abbiamo osservato che essa è ovunque discontinua. Attualmente, invece, ci preme di osservare che una funzione a scala maggiore o uguale a  $f$  sarà ovunque maggiore o uguale a 1, e che una funzione a scala minore o uguale a  $f$  è ovunque minore o uguale a 0. Questo segue dalla densità dei razionali e degli irrazionali: in ogni "scalino" di qualunque funzione a scala, esistono sia punti razionali in cui la funzione vale 1, che punti irrazionali in cui essa vale 0.

Se ne deduce che

$$\overline{\int_0^1} f(x) dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x) dx = 0,$$

e la funzione non è integrabile secondo Riemann.

## 15 Lezione del 31/10/2014 (2 ore)

*DIM. della caratterizzazione delle funzioni integrabili:* Se  $f$  è integrabile, per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore possiamo trovare due funzioni a scala  $\phi$  e  $\psi$ , la prima maggiore o uguale e la seconda minore o uguale a  $f$ , tali che

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x) dx &< \int_a^b f(x) dx + \varepsilon/2, \\ \int_a^b \psi(x) dx &> \int_a^b f(x) dx - \varepsilon/2,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Viceversa, prendiamo  $\varepsilon > 0$  e consideriamo le due funzioni a scala  $\phi$ ,  $\psi$  che ci vengono assicurate dall'ipotesi.

Per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore avremo

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x) dx &\geq \overline{\int_a^b f(x) dx}, \\ \int_a^b \psi(x) dx &\leq \underline{\int_a^b f(x) dx},\end{aligned}$$

per cui

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , ne deriva che l'integrale superiore e l'integrale inferiore sono uguali. Q.E.D.

A questo punto, diventa importante far vedere che tutte le funzioni “abbastanza decenti” sono integrabili. Per esempio, sono integrabili le funzioni monotone:

*TEOREMA:* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è crescente (decrescente), allora è integrabile secondo Riemann.

DIM.: Per fissare le idee, trattiamo il caso in cui  $f$  sia crescente.

Dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali (lunghe  $(b-a)/n$ ), di estremi  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Definiamo una funzione a scala maggiorante  $\phi_n$  e una funzione a scala minorante  $\psi_n$  nel modo seguente: nell' $i$ -esimo intervallino  $[x_i, x_{i+1})$ , poniamo  $\phi_n$  uguale a  $f(x_{i+1})$ , e  $\psi_n$  uguale a  $f(x_i)$ .

Si ha

$$\int_a^b \phi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] =$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)],$$

e l'ultima quantità può essere resa piccola a piacere a patto di prendere  $n$  abbastanza grande. Q.E.D.

Verificare che sono integrabili anche le funzioni continue non sarà altrettanto facile...

*TEOREMA (Integrabilità delle funzioni continue):* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann.

La dimostrazione di questo teorema è molto meno semplice di quella che abbiamo dato per le funzioni monotone: in effetti, abbiamo bisogno di un concetto nuovo, quello di *uniforme continuità*.

*DEFINIZIONE:* Una funzione  $f$  si dice *uniformemente continua* su un intervallo  $I$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x, y \in I$  con  $|x - y| < \delta$ , si ha  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

In questa definizione chiediamo qualcosa di più della continuità in tutti i punti di  $I$ : stiamo infatti pretendendo che  $\delta$  dipenda da  $\varepsilon$ , ma non dal punto in cui andiamo a valutare la continuità. Lo stesso  $\delta$  deve funzionare in tutti i punti dell'intervallo  $I$ !

In effetti, se è vero che ogni funzione uniformemente continua in  $I$  è anche continua in  $I$ , il viceversa può essere falso: per esempio, la funzione  $f(x) = x^2$  è continua in tutti i punti della retta reale, ma non è uniformemente continua su  $\mathbf{R}$ .

Se però consideriamo soltanto intervalli chiusi e limitati, i due concetti coincidono:

*TEOREMA (di Heine-Cantor):* Una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è anche uniformemente continua.

*DIM.:* Ragioniamo per assurdo. Se  $f$  non fosse uniformemente continua, dovrebbe esistere  $\varepsilon_0 > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  esistano  $x, y \in [a, b]$  con  $|x - y| < \delta$  e tali che  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ .



Poniamo  $\delta = \frac{1}{n}$  ( $\delta$  può essere scelto arbitrariamente...): per quanto appena visto possiamo trovare due punti  $x_n, y_n \in [a, b]$  con  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ .

Ora, la successione  $\{x_n\} \subset [a, b]$  è limitata, per cui possiamo estrarre una successione  $\{x_{n_k}\}$  tale che esiste  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$ . Evidentemente, visto che si ha  $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$  avremo anche  $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \bar{x}$ .

Per la continuità di  $f$  in  $\bar{x}$  avremo allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_{n_k}) = f(\bar{x}),$$

e in particolare

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Questo è assurdo perché per costruzione la disuguaglianza  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$  deve valere per ogni  $k$ . Q.E.D.

*DIM. dell'integrabilità di  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continua:*

Sia  $\varepsilon > 0$ . Per il teorema di Heine-Cantor,  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ , e possiamo trovare  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  quando  $x, y \in [a, b]$  e  $|x - y| < \delta$ .

In particolare, se  $I$  è un qualunque sottointervallo chiuso di  $[a, b]$  di lunghezza minore di  $\delta$ , avremo

$$\max\{f(x) : x \in I\} - \min\{f(x) : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

Scegliamo ora  $n$  abbastanza grande, in modo che  $(b-a)/n < \delta$ , e suddividiamo  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali tramite i punti  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Definiamo una funzione a scala maggiorante  $\phi_n$  ed una minorante  $\psi_n$  nel modo seguente: sull' $i$ -esimo intervallino  $[x_i, x_{i+1})$ , la funzione  $\phi_n$  vale  $M_i = \max\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ , mentre  $\psi_n$  vale  $m_i = \min\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ . Per quanto visto sopra, sarà  $M_i - m_i \leq \varepsilon$ .

Abbiamo

$$\int_a^b \phi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} (M_i - m_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a),$$

e questa quantità può essere resa piccola a piacere. Q.E.D.

Avendo ora una grande abbondanza di funzioni integrabili, passiamo a verificare che l'integrale gode delle stesse proprietà di linearità dell'integrale delle funzioni a scala:

*PROPOSIZIONE:* Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni integrabili secondo Riemann,  $c \in \mathbf{R}$ . Allora le funzioni  $c \cdot f$  e  $f + g$  sono integrabili secondo Riemann e si ha

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

DIM.: Supponiamo dapprima  $c > 0$ . L'integrabilità della funzione  $c \cdot f$  (e la prima delle due identità nella tesi) segue subito se si osserva che l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a  $c \cdot f$  coincide con l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a  $f$  moltiplicate per  $c$ . Poiché per le funzioni a scala è lecito "portare la costante  $c$  fuori dal segno di integrale" (si veda il lemma enunciato la volta scorsa), ne deduciamo che

$$\overline{\int_a^b c \cdot f(x) dx} = c \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Un'identità del tutto analoga vale per l'integrale inferiore, da cui la tesi.

Se invece  $c < 0$  (il caso  $c = 0$  è ovvio!), l'unico cambiamento da fare viene dal fatto che una funzione a scala maggiorante per  $f$  moltiplicata per  $c$ , darà una funzione a scala minorante per  $c \cdot f$ .

Ci rimane da dimostrare l'integrabilità della somma di due funzioni integrabili: osserviamo che

$$\{\Phi : \Phi \text{ a scala, } \Phi \geq f + g\} \supset \{\phi_1 + \phi_2 : \phi_1, \phi_2 \text{ a scala, } \phi_1 \geq f, \phi_2 \geq g\},$$

da cui, ricordando la definizione di integrale superiore:

$$\overline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} + \overline{\int_a^b g(x) dx}.$$

(A lezione abbiamo visto un esempio che mostra come, se togliamo l'ipotesi che  $f$  e  $g$  siano integrabili, possa anche succedere che valga la disuguaglianza stretta).

Analogamente, per gli integrali inferiori si ottiene

$$\underline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \geq \underline{\int_a^b f(x) dx} + \underline{\int_a^b g(x) dx}.$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze e ricordando l'integrabilità di  $f$  e  $g$  otteniamo

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b [f(x) + g(x)] dx \leq \int_a^b [f(x) + g(x)] dx \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

da cui la tesi. Q.E.D.

## 16 Lezione del 6/11/2014 (3 ore)

Una proprietà dell'integrale che ci sarà piuttosto utile, è l'additività rispetto all'intervallo di integrazione:

*PROPOSIZIONE:* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile,  $c \in (a, b)$  si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Lasciamo per esercizio la facile dimostrazione.

È comodo definire l'integrale anche su intervalli "orientati alla rovescia": se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile secondo Riemann, poniamo *per definizione*

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Con questa posizione, la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo vale *in generale*, anche se  $c$  non è compreso tra  $a$  e  $b$  (in tal caso,  $f$  dovrà essere integrabile sul più grande tra gli intervalli coinvolti...).

Per il calcolo effettivo degli integrali, lo strumento fondamentale risulta il seguente

*TEOREMA (teorema fondamentale del calcolo integrale):* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua, e definiamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora  $F$  è derivabile, e  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Evidentemente, se siamo in grado di calcolare la funzione integrale  $F(x)$  associata a  $f$ , siamo a maggior ragione in grado di calcolare l'integrale  $\int_a^b f(x) dx$  (che sarà uguale semplicemente a  $F(b)$ ).

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale  $F(x)$  è da ricercarsi tra le funzioni la cui derivata è data da  $f(x)$  (che si chiamano *primitive* di  $f$ ). Si capisce quindi che se siamo in grado di trovare le primitive di una data funzione  $f(x)$ , saremo anche in condizione di trovare la funzione integrale ad essa associata: vediamo ora come fare! La dimostrazione del teorema fondamentale, invece, la vedremo domani.

*DEFINIZIONE:* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , una *primitiva* di  $f$  è una funzione  $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  tale che  $G'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale è una primitiva dell'integranda. Ora, spesso è facile "indovinare" una primitiva di una funzione  $f$  (e vedremo presto delle tecniche per trovare in modo più sistematico le primitive di moltissime funzioni elementari). Se ci riusciamo, siamo anche in grado di calcolare l'integrale di  $f$ :

*PROPOSIZIONE:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua,  $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una qualunque primitiva di  $f$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

DIM.: Per il Teorema fondamentale, anche la funzione integrale  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  è una primitiva di  $f$ . Ne segue che la funzione  $F(x) - G(x)$  ha derivata nulla in  $[a, b]$ , e quindi è costante: esiste  $C \in \mathbf{R}$  tale che

$$F(x) = G(x) + C$$

per ogni  $x \in [a, b]$ . Siccome  $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ , ponendo  $x = a$  nell'ultima identità troviamo  $C = -G(a)$ , da cui  $F(x) = G(x) - G(a)$ . In particolare, per  $x = b$  si ha la tesi. Q.E.D.

Vediamo subito degli esempi di applicazione della formula fondamentale del calcolo integrale.

*ESEMPI:*

- Se  $f(x) = e^x$ , riconosciamo subito che una primitiva è data dalla funzione  $G(x) = e^x$ , e quindi

$$\int_0^a e^x dx = G(a) - G(0) = e^a - 1.$$

Abbiamo così rapidamente riottenuto un risultato che ci eravamo conquistati con una certa fatica a partire dalla definizione di integrale!

- Se  $f(x) = mx$ , si vede che una primitiva è  $G(x) = mx^2/2$ , quindi

$$\int_a^b mx \, dx = m(b^2 - a^2)/2.$$

Possiamo convincerci della veridicità di questa formula se osserviamo che geometricamente l'integrale appena calcolato rappresenta l'area di un trapezio rettangolo di altezza  $(b - a)$  e basi  $ma$  e  $mb$ .

- Se  $f(x) = \sin x$ , una primitiva sarà  $G(x) = -\cos x$ . Quindi

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2,$$

risultato che non sarebbe stato facile prevedere in altro modo!

Per dimostrare il teorema fondamentale ci servirà il seguente risultato:

*TEOREMA (Della media integrale):* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Esiste un punto  $c \in [a, b]$  tale che

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c) \cdot (b - a).$$

DIM.: Sia  $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ,  $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ .

Per la monotonia dell'integrale, avremo  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$ , per cui la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

(che è detta *media integrale*) è compresa tra  $m$  e  $M$ .

Per il teorema dei valori intermedi,  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $m$  e  $M$ , e quindi anche il valore corrispondente alla media integrale! Q.E.D.

*DIM. DEL TEOREMA FONDAMENTALE:* Consideriamo il rapporto incrementale della funzione  $F$  nel punto  $x$ . Ricordando l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo si ha:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Applicando il Teorema della media all'ultimo integrale troviamo un punto  $c$  compreso tra  $x$  e  $x + h$  tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c).$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$ , avremo  $c \rightarrow x$  e  $f(c) \rightarrow f(x)$  (perché  $f$  è continua), da cui

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Q.E.D.

Cerchiamo ora di studiare una maniera un po' più sistematica per trovare le primitive di una data funzione elementare.<sup>11</sup>

Conviene stabilire una notazione per l'insieme di tutte le primitive di una funzione  $f$ :

*DEFINIZIONE:* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua, l'insieme delle primitive  $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  (cioè l'insieme delle funzioni derivabili la cui derivata è uguale ad  $f$ ), si denota con il simbolo  $\int f(x) dx$ :

$$\int f(x) dx = \{G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : G'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]\}.$$

L'insieme delle primitive di  $f$  si chiama talvolta *integrale indefinito* di  $f$ .

Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e a quanto osservato la volta scorsa, sappiamo che la funzione integrale è una primitiva di  $f$ , e anche che due primitive diverse definite su uno stesso intervallo differiscono per una costante, dunque:

$$\int f(x) dx = \left\{ \int_a^x f(t) dt + C : C \in \mathbf{R} \right\}.$$

Con lieve abuso di notazione, se  $G$  è una qualunque primitiva di  $f$  si scrive  $\int f(x) dx = G(x) + C$ , con  $C$  *costante arbitraria*.

Se prendiamo una tabella delle derivate delle funzioni elementari, e la leggiamo al contrario, troviamo la seguente tabella di integrali indefiniti "immediati":

---

<sup>11</sup> La parte che segue sarà corredata da numerosi esempi nelle esercitazioni. In particolare, a lezione non riusciremo a vedere tutti gli integrali che seguono.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^a$ (con $a \neq -1$ )	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$1/x$	$\log x  + C$
$e^x$	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotan x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Altre regole di integrazione vengono direttamente dalle regole di derivazione della somma e del prodotto:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$  (additività),
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$ ,
- $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$  (formula di integrazione per parti).

Dalla formula per la derivata della funzione composta viene un'utile formula di *integrazione per sostituzione*: se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , allora

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Se “cambiamo variabile” ponendo  $y = g(x)$ , l'identità appena scritta diventa  $\int f(y) dy = \int f(g(x))g'(x) dx$ . Questa formula può essere ricordata nel seguente modo, poco ortodosso ma efficace: usando la notazione di Leibniz per la derivata, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} = g'(x),$$

e moltiplicando ambo i membri per  $dx$  (cosa che *ovviamente* non ha alcun senso!) otteniamo l'identità  $dy = d(g(x)) = g'(x) dx$ , che sostituita nell'integrale  $\int f(y) dy$  ci restituisce la formula voluta...

Evidentemente, abbiamo commesso più di un crimine matematico: la derivata NON è un rapporto, e il simbolo  $dx$  nell'integrale NON ha un significato matematico ben definito (se non quello di indicare la variabile indipendente rispetto alla quale si integra). D'altra parte, la notazione per la derivata e l'integrale si è rivelata suggestiva: agendo senza farci troppi scrupoli, abbiamo comunque ottenuto un risultato corretto (infatti lo avevamo già giustificato partendo dalla formula di derivazione di funzioni composte!).

*ESEMPI:*

1. Si voglia calcolare  $\int \cos^2 x \, dx$ . Per una nota identità trigonometrica, abbiamo  $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$  da cui

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

2. Calcoliamo poi  $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$ . Poniamo  $x = \sin y$ , da cui (OK, non è ortodosso ma abbiamo verificato che funziona):  $dx = \cos y \, dy$  e

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \, dy = \int \cos^2 y \, dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C.$$

Ora,  $y = \arcsin x$  e  $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ , da cui  $\sin 2y = 2x\sqrt{1-x^2}$  e l'integrale cercato vale  $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$ .

L'integrale definito di questa funzione tra  $-1$  e  $1$  vale allora  $\pi/2$ ... e questo ha un semplice significato geometrico: quale? Questa è un'ulteriore conferma del fatto che l'integrale di Riemann è l'oggetto giusto per definire l'area di oggetti curvilinei del piano dal contorno abbastanza regolare!

3. Calcoliamo  $\int \log x \, dx$ . Integrando per parti si ha:  $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + C$ .

4. Calcoliamo  $\int e^x \sin x \, dx$ . Integrando due volte per parti si ottiene:  $\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$ . Portando l'ultimo integrale a primo membro si ottiene subito

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

5. Calcoliamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Poniamo  $y = 1 - x^2$ , da cui:  $dy = -2x \, dx$  e l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Oppure, con un uso disinvolto della formula di integrazione per sostituzione:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + C.$$



6. Si voglia calcolare  $\int \sin \sqrt{x} dx$ . Si ottiene subito il risultato ponendo  $\sqrt{x} = y$ , e integrando per parti.
7. Per calcolare l'integrale  $\int \sqrt{1+x^2} dx$ , si operi la sostituzione  $\sqrt{1+x^2} = y - x \dots$

## 17 Lezione del 7/11/2014 (2 ore)

Concludiamo la carellata di metodi di integrazione con alcuni esempi sulle funzioni razionali:

1. Integrazione di funzioni razionali:  $f(x) = A(x)/B(x)$ , con  $A(x)$ ,  $B(x)$  polinomi. Possiamo supporre che il grado di  $A$  sia strettamente minore del grado di  $B$  (altrimenti facciamo la divisione e scriviamo  $A(x)/B(x) = Q(x) + R(x)/B(x)$ , dove  $Q$  ed  $R$  sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione (e  $\deg(R) < \deg(B)$ ). Siccome un polinomio è di integrazione immediata, ci siamo ricondotti al caso di cui sopra). Vediamo per semplicità come si affronta il caso in cui il polinomio a denominatore abbia grado 2: la situazione è nettamente diversa a seconda che  $B(x)$  abbia due radici reali distinte, una radice doppia, nessuna radice reale. Cominciamo dal primo caso: si voglia calcolare  $\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2} dx$ . Abbiamo  $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ : la tecnica da usare è quella della *decomposizione in somma di frazioni parziali*, cerchiamo cioè di scrivere

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1}.$$

Si trova subito che dobbiamo scegliere  $a = 9$ ,  $b = -7$  per cui

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{9}{x-2} dx + \int \frac{-7}{x-1} dx = 9 \log |x-2| - 7 \log |x-1|.$$

2. Caso delle radici reali coincidenti: si voglia calcolare  $\int \frac{3x+5}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{3x+5}{(x-1)^2} dx$ . Scriviamo  $3x+5 = 3(x-1) + 8$ . L'integrale diventa immediato e vale:  $3 \log |x-1| - 8/(x-1) + C$ .
3. Caso del polinomio di secondo grado irriducibile: vogliamo calcolare  $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+6} dx$ . In questo caso, la mossa vincente è scrivere il denominatore come somma di quadrati:  $x^2 + 2x + 6 = (x+1)^2 + 5$ . Cambiamo poi variabile, ponendo  $y = \frac{x+1}{\sqrt{5}} \dots$

4. Tecniche simili siano applicabili a funzioni razionali con denominatore di grado qualunque. In generale, il denominatore può essere decomposto in fattori irriducibili di primo e secondo grado. La tecnica della decomposizione in frazioni parziali funziona ancora: ad esempio

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x^2 + 3}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Questi due esempi mostrano cosa succede quando c'è un fattore lineare ripetuto, oppure quando ci sono fattori di secondo grado irriducibili.

Altro esempio "esotico"

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

5. Per integrare funzioni razionali in seno e coseno, la tecnica standard è utilizzare la sostituzione  $t = \tan(x/2)$  e le note *formule parametriche*  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .

Come abbiamo già osservato in precedenza, la nostra definizione di integrale di Riemann è abbastanza soddisfacente, ma nella pratica può essere utile definire l'integrale di una funzione su intervalli che siano *illimitati*. Precisamente, proponiamo in modo abbastanza naturale la seguente definizione:

**DEFINIZIONE:** Sia  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. L'integrale (improprio o generalizzato) di  $f$  sulla semiretta  $[a, +\infty)$  si definisce come

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

a patto che il limite esista.

A titolo di esempio, abbiamo verificato che  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ , mentre  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$  e infine  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$  non esiste.

In modo analogo possiamo definire l'integrale (generalizzato) di una funzione continua su un intervallo *aperto in uno dei suoi estremi*: se per esempio  $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è continua, definiamo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow a^+} \int_\delta^b f(x) dx,$$

a patto che il limite esista.

Anche in questo caso, l'integrale può essere finito, infinito o non esistere.

Per esempio, un semplice conticino mostra che l'integrale  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  è finito se e soltanto se  $\alpha < 1$ , mentre  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  è finito se e solo se  $\alpha > 1$  (e per  $\alpha = 1$ , entrambi gli integrali sono infiniti). Invece, l'integrale della funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin(1/x)$  non esiste su  $(0, 1]$ .

A questo proposito, vale la pena di notare che se  $f \geq 0$ , l'integrale improprio *esiste sempre* (sia nel caso delle semirette che nel caso degli intervalli semiaperti). Infatti, in quel caso il limite nella definizione di integrale improprio è il limite di una funzione monotona, e sappiamo bene che questo esiste sempre (finito o infinito). Dunque, nel caso delle funzioni non negative, l'integrale improprio può essere finito (e in quel caso diremo che *converge*), oppure può *divergere a*  $+\infty$ .

Una semplicissima osservazione (che deriva dalla proprietà monotonia dell'integrale) è la seguente

*PROPOSIZIONE (Principio del confronto per gli integrali impropri):* Siano  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  due funzioni continue non negative, e supponiamo di sapere che  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, +\infty)$ . Allora, se l'integrale di  $g$  converge, converge anche l'integrale di  $f$ . Se invece l'integrale di  $f$  diverge, diverge anche l'integrale di  $g$ .

Un analogo principio di confronto vale anche per gli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti.

## 18 Lezione del 12/11/2014 (1 ora)

Come conseguenza del principio del confronto abbiamo la seguente Proposizione, che ha anch'essa un'ovvia estensione agli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti:

*PROPOSIZIONE (Principio dell'equivalenza asintotica):* Siano  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  due funzioni continue non negative tali che  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  (questo significa che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$ , e si legge "f è asintoticamente equivalente a g"). Allora gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

hanno lo stesso comportamento: sono entrambi convergenti, oppure entrambi divergenti a  $+\infty$ .

DIM.: Per definizione di limite all'infinito, visto che  $f \sim g$  esisterà  $\bar{a} \geq a$  tale che

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x) \quad \forall x \geq \bar{a}.$$

La tesi segue allora dal principio del confronto applicato agli integrali impropri sulla semiretta  $[\bar{a}, +\infty)$ . Q.E.D.

Meno ovvia è la seguente versione del principio del confronto, valida per una funzione  $f$  di segno qualunque:

*PROPOSIZIONE (della convergenza assoluta):* Sia  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Allora, se l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

converge, esiste finito anche l'integrale improprio di  $f$ .

Possiamo applicare questo risultato, ad esempio, per verificare che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

converge: infatti il modulo dell'integranda ha integrale convergente perché è maggiorato da  $\frac{1}{x^2}$ , che già sappiamo avere integrale convergente.

*DIM. del teorema sulla convergenza assoluta degli integrali impropri:* Consideriamo la funzione  $h(x) = f(x) + |f(x)|$ .

Segue subito che  $0 \leq h(x) \leq 2|f(x)|$ , per cui l'integrale improprio di  $h$  è convergente. Possiamo scrivere allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^M h(x) dx - \int_a^M |f(x)| dx \right],$$

e l'ultimo limite esiste finito perché i due integrali impropri coinvolti sono convergenti. Q.E.D.

Il teorema del confronto si rivela spesso utilissimo per dimostrare la convergenza (o la divergenza, nel caso di funzioni non negative) dell'integrale improprio di una funzione di cui *non si sappia calcolare esplicitamente una primitiva*. Purtroppo, però, la convergenza assoluta è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la convergenza di un integrale improprio:

*ESEMPIO:* L'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  esiste finito, mentre  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$ .

Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x} dx = \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx \rightarrow \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

L'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  converge per il principio del confronto, perché  $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$  e abbiamo visto che l'integrale dell'ultima funzione è finito. Dunque,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  esiste finito.

Facciamo vedere che  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$ .

Infatti, per ogni  $n \in \mathbf{N}$  ( $n \geq 2$ ) avremo

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}.$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  abbiamo quindi trovato la seguente disuguaglianza:

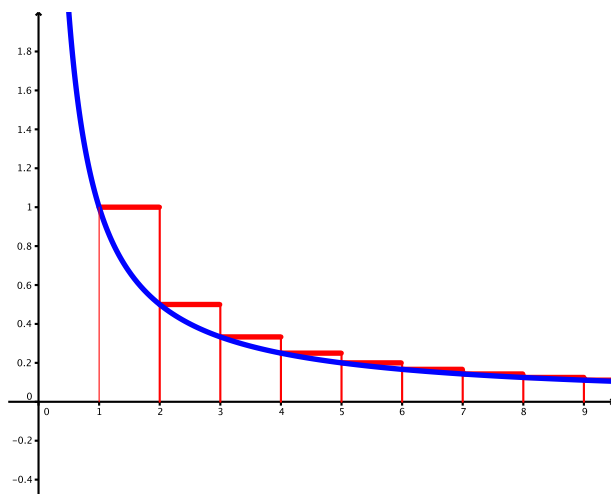
$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

La serie nell'ultima disuguaglianza (cioè la serie dei reciproci dei numeri naturali) si chiama *serie armonica*: mostreremo domani che essa *diverge a*  $+\infty$ , concludendo così la dimostrazione della divergenza del nostro integrale.

## 19 Lezione del 13/11/2014 (3 ore)

Per dimostrare che la serie armonica diverge, useremo ancora una volta il principio del confronto per gli integrali impropri! Infatti, possiamo interpretare la serie armonica come l'integrale tra 2 e  $+\infty$  della funzione a scala (con infiniti scalini)  $\phi(x) = \frac{1}{[x]}$ <sup>12</sup>.

<sup>12</sup>Si noti che la definizione di integrale improprio si può estendere senza cambiare nulla a funzioni anche non necessariamente continue, che siano però integrabili secondo Riemann su tutti gli intervalli limitati. Quindi, è perfettamente lecito fare l'integrale improprio di  $\phi$ .



Visto che  $\phi(x) \geq \frac{1}{x}$ , e visto che  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ , il principio del confronto ci dice che l'integrale di  $\phi$  (che è poi la serie armonica) diverge.

La discussione fatta per mostrare la divergenza dell'integrale improprio di  $\frac{|\sin x|}{x}$ , ci suggerisce un utilissimo *criterio di convergenza per le serie*. Ricordiamo a questo proposito, la fondamentale *definizione di serie* che abbiamo già visto parlando di polinomi di Taylor: se  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  è una successione di numeri reali, poniamo *per definizione*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k,$$

a patto che il limite a secondo membro esista. La successione

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

si chiama *successione delle somme parziali* della serie, per cui la somma della serie è semplicemente il limite delle somme parziali!

*PROPOSIZIONE (Criterio integrale di convergenza per le serie):* Sia  $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione non negativa e decrescente. Allora l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Con questo vogliamo dire che se l'integrale converge, converge anche la serie, mentre se l'integrale diverge a  $+\infty$ , diverge anche la serie.

DIM.: Basta osservare che  $f([x+1]) \leq f(x) \leq f([x])$ , e interpretare la serie come l'integrale della funzione costante a tratti  $f([x])$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{+\infty} f([x]) dx.$$

Il risultato segue allora immediatamente dal principio del confronto tra gli integrali impropri. Q.E.D.

*ESEMPIO*: La serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge se e solo se  $\alpha > 1$ : basta usare il criterio integrale con la funzione  $f(x) = 1/x^\alpha$ .

Da quanto abbiamo appena visto, non ci stupirà scoprire che esistono delle analogie tra integrali impropri e serie! Cominciamo infatti con un elenco di alcune proprietà delle serie che ricordano quanto abbiamo già visto per gli integrali:

- Se  $a_n \geq 0$ , la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  esiste sempre, finita o infinita: infatti, le somme parziali costituiscono una successione monotona. In sostanza una serie a termini positivi converge a una somma finita, oppure diverge a  $+\infty$ .
- Vale il seguente *criterio del confronto per le serie a termini positivi*: se  $0 \leq a_n \leq b_n$ , allora la convergenza di  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  implica la convergenza di  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ , mentre la divergenza di  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  implica la divergenza di  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ .
- Vale anche un *criterio dell'equivalenza asintotica*: se  $a_n, b_n > 0$  e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

allora le serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  hanno lo stesso comportamento. Basta infatti osservare che per  $n$  abbastanza grande  $\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n$ , e applicare il criterio del confronto.<sup>13</sup>

Un'altra proprietà interessante (che per gli integrali impropri *non* vale) è la seguente:

*PROPOSIZIONE:* Se la serie (a termini di segno qualunque)  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  converge, allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$$

DIM.: Se  $s_n$  denota la somma parziale  $n$ -esima della serie e  $s$  la sua somma (cioè  $s_n \rightarrow s$ ), si ha  $a_n = s_n - s_{n-1}$ , e passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ha la tesi. Q.E.D.

Si noti che il viceversa *non è vero*: il termine generale della serie può essere infinitesimo senza che la serie converga. Come esempio, abbiamo visto il caso della serie armonica:  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ .

Questa condizione necessaria *non vale* per gli integrali impropri:

*ESEMPIO/ESERCIZIO:* Sia  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Mostrare che la convergenza dell'integrale improprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  *non implica necessariamente* che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . In questo, gli integrali impropri si comportano in modo diverso dalle serie!

Non abbiamo visto la soluzione in classe, comunque eccola! Ci si convince facilmente che se il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  esiste, allora deve essere proprio 0: usando la definizione di integrale improprio, si vede senza difficoltà che se il limite è un numero diverso da zero, allora l'integrale diverge a  $\pm\infty$  (stiamo infatti calcolando l'area di una regione che contiene una striscia di altezza fissa e lunghezza infinita!).

Vogliamo dunque esibire una funzione  $f$  che abbia integrale improprio convergente e per la quale *non esista* il limite a  $+\infty$ . Se non fosse richiesta

---

<sup>13</sup>Questo criterio è falso per le serie a termini di segno qualunque. Infatti, le serie di termine generale  $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  e  $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$  sono asintoticamente equivalenti. Grazie a un criterio di convergenza che vedremo la prossima volta (criterio di Leibniz), si verifica che la prima serie diverge a  $+\infty$ , mentre la seconda converge.

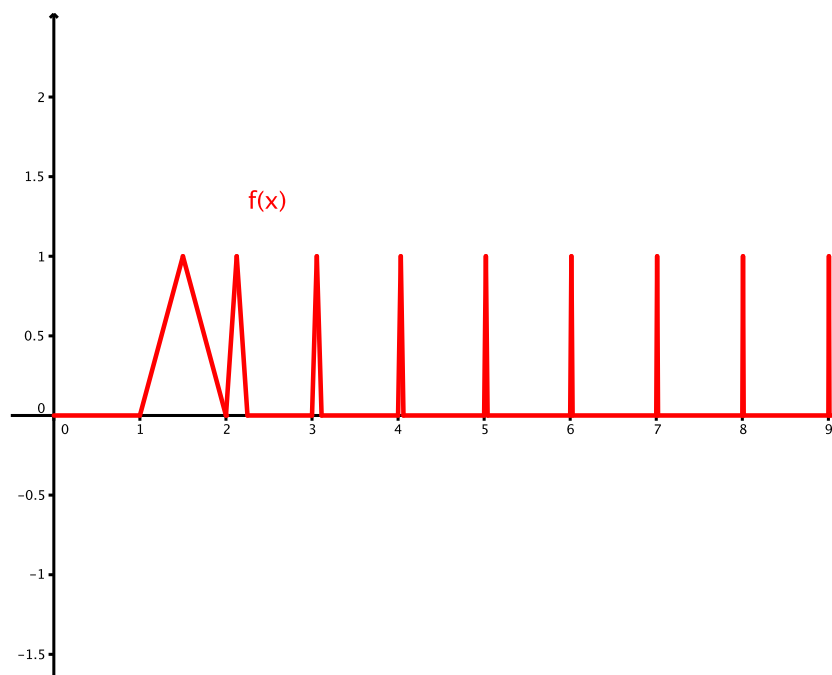


la continuità di  $f$ , potremmo prendere la funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione ha integrale improprio nullo (l'integrale non si accorge che essa vale 1 su un insieme discreto di punti: l'area del sottografico è proprio 0!), ma non ammette limite all'infinito.

Volendo  $f$  continua, siamo costretti a complicare un po' questo esempio. Una possibilità è la funzione della figura:



Si tratta di una funzione lineare a tratti che vale 0 “quasi sempre”, tranne nelle vicinanze dei numeri naturali: nel punto  $x = n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  essa comincia a salire linearmente fino a 1, dove arriva per  $x = n + \frac{1}{2n^2}$ , per poi ridiscendere linearmente a 0 dove arriva per  $x = n + \frac{1}{n^2}$ . In sintesi, a destra del punto  $x = n$ , il grafico di  $f$  produce un triangolo isoscele di base  $1/n^2$  e altezza 1.

Questa funzione non ammette limite per  $x \rightarrow +\infty$ . Ma quanto vale il suo integrale improprio? Esso è la somma delle aree dei triangoli isosceli, cioè  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ : questa è una serie armonica generalizzata *convergente* (perché l'esponente è maggiore di 1)!

Sfruttando ancora l'interpretazione delle serie come integrali impropri (una serie è l'integrale improprio di una funzione a scala con scalini di larghezza unitaria...), abbiamo il seguente risultato:

*PROPOSIZIONE: Se una serie è assolutamente convergente, cioè se converge  $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ , allora anche la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  esiste finita<sup>14</sup>.*

Un altro utilissimo criterio, particolarmente semplice da applicare, è il seguente:

*PROPOSIZIONE (Criteri della radice e del rapporto): Sia  $a_n$  il termine generale di una serie,  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ .*

- Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell_1.$$

Allora, se  $\ell_1 > 1$  la serie non converge, se  $\ell_1 < 1$  converge assolutamente.

- Sia  $a_n \neq 0$ , e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell_2.$$

Allora, se  $\ell_2 > 1$  la serie non converge, se  $\ell_2 < 1$  converge assolutamente<sup>15</sup>.

*OSSERVAZIONE:* I criteri della radice e del rapporto falliscono se i limiti  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  sono uguali ad 1. Per esempio, si consideri la serie armonica generalizzata di termine generale  $a_n = 1/n^\alpha$ . In questo caso, i limiti di radice e rapporto

<sup>14</sup>Anche in questo caso, non vale il viceversa: vedremo che una serie può convergere anche se non converge assolutamente.

<sup>15</sup> Si può far vedere che se esiste il limite del rapporto, allora esiste anche il limite della radice, e questi due limiti sono uguali: per questo, il criterio del rapporto è in realtà una conseguenza del criterio della radice. Mostriamo dunque che se  $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow \ell$ , allora si ha anche  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell$ . Usando la stima ottenuta nella dimostrazione del criterio del rapporto (vedi sotto), scopriamo che per qualunque  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu > 0$  tale che

$$|a_\nu|(\ell - \varepsilon)^{n-\nu} \leq |a_n| \leq |a_\nu|(\ell + \varepsilon)^{n-\nu} \quad \forall n > \nu$$

da cui

$$\sqrt[n]{|a_\nu|}(\ell - \varepsilon)^{1-\nu/n} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_\nu|}(\ell + \varepsilon)^{1-\nu/n}.$$

Il membro di sinistra e quello di destra tendono a  $\ell - \varepsilon$  e a  $\ell + \varepsilon$  rispettivamente, quindi per  $n$  abbastanza grande si avrà  $\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell + 2\varepsilon$ . Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue che  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell$ .

sono entrambi uguali a 1, ma abbiamo visto che la serie converge se  $\alpha > 1$ , mentre diverge per  $\alpha \leq 1$ .

Per dimostrare i criteri del rapporto e della radice occorre ricordare il seguente

*ESEMPIO FONDAMENTALE (Serie geometrica):* Come già abbiamo visto, possiamo usare la formula per la somma della progressione geometrica per studiare la *serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k,$$

in cui  $a$  è un numero reale chiamato *ragione* della serie.

Se  $s_n = \sum_{k=0}^n a^k$  denota la somma parziale  $n$ -esima della serie, abbiamo visto che  $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ . Se studiamo il limite di questa espressione per  $n \rightarrow +\infty$ , vediamo che la serie converge a  $1/(1-a)$  per  $|a| < 1$ , diverge a  $+\infty$  per  $a \geq 1$ , non esiste per  $a \leq -1$ .

*DIM. dei criteri del rapporto e della radice:* Cominciamo dal criterio della radice. Se  $\ell_1 > 1$ , scegliamo  $\varepsilon > 0$  in modo che  $\ell_1 - \varepsilon > 1$ . Per la definizione di limite, sappiamo che per  $n$  abbastanza grande avremo  $\sqrt[n]{|a_n|} > \ell_1 - \varepsilon$ , ossia  $|a_n| > (\ell_1 - \varepsilon)^n$ . Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo  $|a_n| \rightarrow +\infty$ , e la serie non può convergere perché il suo termine generale non tende a zero.

Se  $\ell_1 < 1$ , scegliamo  $\varepsilon > 0$  in modo che  $\ell_1 + \varepsilon < 1$ . Per  $n$  abbastanza grande avremo  $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell_1 + \varepsilon$ , da cui  $|a_n| < (\ell_1 + \varepsilon)^n$ . Poiché la serie geometrica di ragione  $\ell_1 + \varepsilon$  converge, converge *assolutamente* anche la nostra serie (criterio del confronto), e quindi essa converge.

La prossima volta concluderemo dimostrando anche il criterio del rapporto

Dimostriamo il *criterio del rapporto*: supponiamo  $\ell_2 > 1$ , e scegliamo  $\varepsilon$  tanto piccolo che  $\ell_2 - \varepsilon > 1$ . Per definizione di limite, troviamo  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \ell_2 - \varepsilon$  per  $n \geq \nu$ . Allora, se  $n > \nu$ :

$$|a_n| = |a_\nu| \cdot \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \geq |a_\nu| \cdot (\ell_2 - \varepsilon)^{n-\nu}.$$

Passando al limite vediamo che  $|a_n| \rightarrow +\infty$ , e la serie non converge di sicuro.

Se poi  $\ell_2 < 1$ , scegliamo  $\varepsilon > 0$  in modo che  $\ell_2 + \varepsilon < 1$ . Troviamo  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \ell_2 + \varepsilon$  per  $n \geq \nu$ . Rifacendo il conto di prima abbiamo

$$|a_n| = |a_\nu| \cdot \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq |a_\nu| \cdot (\ell_2 + \varepsilon)^{n-\nu},$$

e la serie dei moduli risulta maggiorata da una serie geometrica convergente. Q.E.D.

Che altro dire delle serie a termini di segno qualunque? Se esse non convergono assolutamente, abbiamo ben pochi strumenti a nostra disposizione. Uno di questi è il seguente:

*PROPOSIZIONE (Criterio di Leibniz): Sia  $\{a_n\}$  una successione di numeri non negativi, e si consideri la serie a termini di segno alterno*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

*Se  $a_n$  è decrescente e tende a zero, allora la serie converge.*

DIM.: Al solito, sia  $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$  la successione delle somme parziali. Si ha

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n},$$

cioè la successione delle somme parziali *di indice pari* è decrescente.

Analogamente,  $s_{2n+3} \geq s_{2n+1}$ : la successione delle somme parziali di indice dispari è crescente. Inoltre, evidentemente  $s_1 \geq 0$  e  $s_{2n} \geq s_{2n-1}$ : ne segue che la successione delle somme parziali pari è non negativa, e tenderà a un limite finito  $\ell$  (uguale al suo inf). Anche le somme parziali dispari tenderanno allo stesso limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (s_{2k} - a_{2k+1}) = \ell - 0.$$

Ne segue che  $\ell$  è proprio la somma della serie. Q.E.D.

Il criterio di Leibniz ci dice ad esempio che la versione a segni alterni della serie armonica,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , è convergente (in realtà, si può far vedere che converge a  $\log 2$ ).

Per visualizzare il comportamento di questa serie (e l'idea della dimostrazione del criterio di Leibniz), potete dare un'occhiata ad una animazione<sup>16</sup> costruita con GeoGebra che ho messo in rete.

Si ricorderà che abbiamo incontrato per la prima volta le serie quando ci siamo accorti che alcune funzioni infinitamente derivabili possono essere sviluppate in *serie di Taylor*: la serie che si ottiene in quel caso è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

<sup>16</sup><http://www.geogebra.org/material/show/id/210707>

e si chiama *serie di potenze*.

Abbiamo visto che se  $f(x)$  è una funzione analitica e scegliamo  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , allora la serie di potenze converge in un intorno di 0, e converge proprio a  $f(x)$ ... a dire il vero, questa era proprio la definizione di funzione analitica!

È però interessante anche studiare il problema inverso: se ci viene data una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , cosa possiamo dire del suo insieme di convergenza?

E se scopriamo che essa converge per gli  $x$  in un opportuno intorno di 0, sarà poi vero che la sua somma  $f(x)$  è una funzione infinitamente derivabile, la cui serie di Taylor coincide con la serie di partenza?

Cominciamo con un'osservazione semplice ma interessante:

*LEMMA: Se la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge per  $x = x_0$ , allora converge assolutamente per tutti gli  $x$  con  $|x| < |x_0|$ .*

DIM.: Siccome la serie converge per  $x = x_0$ , abbiamo necessariamente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_0^n = 0$ . In particolare, per  $n$  abbastanza grande avremo  $|a_n x_0^n| \leq 1$ .

Se poi  $|x| < |x_0|$  si ha (sempre per  $n$  abbastanza grande)

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

e la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  converge perché è maggiorata da una serie geometrica convergente. Q.E.D.

Il lemma ci suggerisce di dare la seguente, fondamentale

*DEFINIZIONE: Il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è l'estremo superiore dei valori di  $x$  per cui la serie converge.*

Sia  $r$  il raggio di convergenza della nostra serie di potenze. Grazie al lemma visto sopra, possiamo concludere che

- Se  $r = +\infty$ , la serie converge assolutamente per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .
- Se  $r > 0$ , la serie converge assolutamente nell'intervallo aperto  $(-r, r)$ , mentre non converge per  $|x| > r$ .
- Se  $r = 0$ , la serie converge soltanto per  $x = 0$ .

Tutti e tre questi comportamenti sono possibili: la serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  converge per ogni  $x \in \mathbf{R}$ , la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  ha raggio di convergenza 1, mentre la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$  ha raggio di convergenza 0 come si può facilmente verificare con il criterio della radice.

Si noti anche che il nostro lemma non dice nulla sul comportamento della serie per  $x = \pm r$ , cioè agli estremi dell'intervallo di convergenza: in effetti, in quei due punti può succedere qualunque cosa (la serie può convergere in tutti e due i punti, in uno solo di essi, oppure in nessuno dei due).

La convergenza di una serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza è spesso la cosa più difficile da valutare, e lo studio deve essere condotto caso per caso.

## 20 Lezione del 14/11/2014 (2 ore)

Vediamo ora come è possibile trovare il raggio di convergenza di una serie di potenze: in *quasi tutti i casi* è possibile dare una risposta grazie al criterio della radice o del rapporto.

Supponiamo infatti di sapere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

(oppure che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ ). Usando il criterio della radice (del rapporto) vediamo subito che la serie converge per  $|x| < \frac{1}{\ell}$ , mentre non converge per  $|x| > \frac{1}{\ell}$  (nei casi  $\ell = 0$  e  $\ell = +\infty$ , l'insieme di convergenza è rispettivamente  $\mathbf{R}$  e  $\{0\}$ ...).

L'unica situazione in cui questo metodo non funziona, è quella in cui non esiste il limite della radice  $n$ -esima di  $|a_n|$  (anche in questo caso, tuttavia, è possibile aggirare il problema: se volete sapere come fare, leggete la nota<sup>17</sup> qui sotto...).

---

<sup>17</sup> *La semplice osservazione appena fatta può essere trasformata in una ricetta universale per trovare il raggio di convergenza: se è vero che non sempre esiste il limite della successione  $\sqrt[n]{|a_n|}$ , è però sempre possibile farne il massimo limite, un oggetto di cui vi infliggerò a breve la definizione.*

*Ora, il criterio della radice vale pari pari (e anche la dimostrazione non cambia granché) se si sostituisce il limite con il massimo limite: possiamo quindi affermare che il raggio di convergenza della nostra serie di potenze è dato dal reciproco di  $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Dimostrazione completa tra poche lezioni!*

Nei casi in cui questo metodo funziona, l'insieme di convergenza è un intervallo simmetrico rispetto all'origine (tramite eventualmente agli estremi: la serie può convergere in uno, entrambi o nessuno degli estremi dell'intervallo!). Vedremo domani che questa proprietà di simmetria è sempre vera, anche quando non esiste il limite del rapporto o della radice, e che il raggio di questo intervallo si chiama *raggio di convergenza* della serie di potenze.

Supponiamo di avere una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ . Possiamo allora definire una funzione  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbf{R}$  nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ci chiediamo quali siano le proprietà della funzione  $f(x)$ : vedremo la prossima volta che  $f$  è *derivabile infinite volte*, e che la serie di potenze coincide con la serie di Taylor di  $f$ .

Torniamo allo studio della funzione somma  $f(x)$  di una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ . Vale il seguente:

*TEOREMA (Regolarità delle serie di potenze):* Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ . Allora  $f(x)$  è continua e derivabile in  $(-r, r)$ . Inoltre la serie delle derivate  $\sum_{n=1} a_n \cdot n x^{n-1}$  ha ancora raggio di convergenza  $r$ , e nell'intervallo  $(-r, r)$  converge proprio alla derivata  $f'$  di  $f$ .

Il teorema dice dunque che una serie di potenze si può derivare termine a termine. Inoltre, iterando il procedimento si ottiene che  $f(x)$  è derivabile infinite volte, e che la serie di partenza non è altro che la serie di Taylor di  $f$  centrata in 0.

La dimostrazione del teorema sulla regolarità della somma delle serie di potenze è piuttosto complicata...ma siccome siete degli studenti di matematica ho deciso di non risparmiarvela! La vedremo la prossima volta.

Questo risultato è meno ovvio di quanto possa sembrare: se abbiamo una serie di funzioni continue, è in generale falso che la somma della serie sia continua, come mostra l'esempio seguente.

*ESEMPIO:* Poniamo  $g_n(x) = \arctan(nx)$ ,  $f_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$ . Allora la somma parziale  $N$ -esima della serie di funzioni continue

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

è  $g_N(x)$ , che tende chiaramente ad una funzione discontinua per  $N \rightarrow +\infty$ .

Per concludere la lezione, abbiamo verificato la parte più semplice dell'enunciato, ossia abbiamo eseguito la semplice verifica che la serie derivata  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  ha ancora raggio di convergenza  $r$ . Infatti, il reciproco del raggio di convergenza della serie derivata è dato da  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , e l'ultima espressione sappiamo che vale  $1/r$ .

*DIM. della regolarità della somma di una serie di potenze.*

Per poter dimostrare il teorema di regolarità, abbiamo bisogno di alcuni lemmi. Il primo di essi riguarda la velocità con cui il resto  $N$ -esimo di una serie di potenze va a zero.

Se prendiamo una serie numerica convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , il resto  $N$ -esimo è per definizione  $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ : è immediato verificare che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$ .

Se poi consideriamo il caso della nostra serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  di raggio di convergenza  $r > 0$ , il resto  $N$ -esimo  $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$  tenderà a zero per ogni  $x \in (-r, r)$ . Il primo lemma dice che se  $0 < \rho < r$  e  $x \in [-\rho, \rho]$ , allora possiamo stimare la velocità con cui  $R_N(x)$  tende a zero in maniera *indipendente da  $x$* : in matematica, si dice che la serie di potenze converge *uniformemente* in  $[-\rho, \rho]$ .

*LEMMA 1:* Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ ,  $\rho \in (0, r)$ . Allora, per ogni  $x \in [-\rho, \rho]$  si ha

$$|R_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n.$$

*In altre parole, il resto  $N$ -esimo della serie è maggiorato, per ogni  $x \in [-\rho, \rho]$ , dal resto  $N$ -esimo della serie numerica convergente (la serie di potenze converge assolutamente per  $x = \rho \dots$ )  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ .*

*Dim.:* Sia  $x \in [-\rho, \rho]$ ,  $M \geq N$ . Usando la disuguaglianza triangolare otteniamo:

$$\left| \sum_{n=N+1}^M a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |a_n| |x|^n \leq \sum_{n=N+1}^M |a_n| \rho^n,$$

e passando al limite per  $M \rightarrow +\infty$  si ha la tesi. Q.E.D.



Il prossimo lemma costituisce la prima parte del teorema di regolarità che vogliamo dimostrare: la somma di una serie di potenze è una funzione continua.

*LEMMA 2:* Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ . Allora la funzione  $f$  è continua in  $(-r, r)$ .

*Dim.:* Sia  $x_0 \in (-r, r)$ : mostriamo che  $f$  è continua in  $x_0$ . A questo scopo, scegliamo  $\rho > 0$  con  $|x_0| < \rho < r$ . Se  $|x| \leq \rho$  e  $N$  è un qualunque numero naturale possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \right| \leq \\ & \left| \sum_{n=0}^N a_n (x^n - x_0^n) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n \right| \leq \\ & \left| \sum_{n=0}^N a_n (x^n - x_0^n) \right| + |R_N(x)| + |R_N(x_0)| \leq \\ & \left| \sum_{n=0}^N a_n (x^n - x_0^n) \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso del Lemma 1. Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e osserviamo l'ultima riga della nostra stima: il secondo addendo può essere reso minore di  $\varepsilon/2$  a patto di prendere  $N$  abbastanza grande (si tratta del resto  $N$ -esimo di una serie numerica convergente). A questo punto, prendendo  $x$  abbastanza vicino a  $x_0$  il primo addendo può essere reso minore di  $\varepsilon/2$  (perché il polinomio  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$  è una funzione continua): in conclusione, se  $x$  è abbastanza vicino a  $x_0$  si ha  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , Q.E.D.

Il terzo lemma dice che possiamo integrare termine a termine una serie di potenze sugli intervalli chiusi contenuti in  $(-r, r)$ .

*LEMMA 3:* Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ ,  $[x_1, x_2] \subset (-r, r)$ . Denotiamo con  $S_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  le somme parziali della serie. Allora

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^{x_2} S_N(x) dx.$$

In maniera più espressiva, questo è equivalente a scrivere

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx,$$

cioè si può scambiare il segno di serie con quello di integrale<sup>18</sup>).

*Dim:* La funzione  $f(x)$  è integrabile perché abbiamo dimostrato nel Lemma 2 che è continua.

Sia  $\rho = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ : grazie al Lemma 1 abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - S_N(x)) dx \right| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} R_N(x) dx \right| \leq \\ \int_{x_1}^{x_2} |R_N(x)| dx &\leq \int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n = (x_2 - x_1) \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n, \end{aligned}$$

e l'ultima espressione tende a zero per  $N \rightarrow +\infty$ . Q.E.D.

Abbiamo così concluso il “lavoro sporco”: vediamo come la regolarità della somma di una serie di potenze segua facilmente dagli ultimi due lemmi!

Abbiamo visto infatti che la funzione somma  $f(x)$  è continua, rimangono da dimostrare solo le affermazioni sulla derivabilità.

Innanzitutto, abbiamo già visto che la serie derivata  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  ha ancora raggio di convergenza  $r$ .

Grazie al Lemma 2, sappiamo dunque che le somme parziali  $S'_N(x)$  della serie derivata convergono ad una certa funzione continua  $g(x)$  (la somma della serie derivata).

Ora, siano  $S_N(x)$  le somme parziali della serie di potenze non derivata: grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, se fissiamo si ha  $S_N(x) = S_N(0) + \int_0^x S'_N(t) dt$ . Passiamo al limite per  $N \rightarrow +\infty$ : il primo membro tende a  $f(x)$ , mentre il secondo membro tende a  $f(0) + \int_0^x g(t) dt$  grazie al Lemma 3.

In conclusione, abbiamo mostrato che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt,$$

per cui  $f$  è derivabile e la sua derivata è proprio  $g$  (teorema fondamentale del calcolo integrale). Q.E.D.

---

<sup>18</sup>Infatti questo è chiaramente possibile per le somme parziali (additività dell'integrale): il lemma dice che è lecito passare al limite per  $N \rightarrow +\infty$  ed estendere l'affermazione alla serie di potenze.

*ESEMPIO:* Come applicazione del teorema sulla somma delle serie di potenze, verifichiamo che

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & -1 < x < 1; \\ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & -1 < x < 1.\end{aligned}$$

Infatti, non è difficile vedere che entrambe le serie hanno raggio di convergenza 1. Se chiamiamo  $f(x)$  la somma della prima e  $g(x)$  la somma della seconda, derivando termine a termine si ottiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}, \\ g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula per la somma della serie geometrica. Integrando e tenendo conto del fatto che  $f(0) = g(0) = 0$ , si ottiene  $f(x) = \log(1+x)$  e  $g(x) = \arctan x$ .

*ESEMPIO:* Consideriamo la *serie binomiale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

in cui  $\alpha \in \mathbf{R}$  e i coefficienti binomiali sono definiti da

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \quad (n \geq 1).$$

Usando il criterio del rapporto, si verifica subito che il questa serie ha raggio di convergenza 1<sup>19</sup>.

Mostriamo ora che la somma  $f(x)$  della serie è uguale a  $(1+x)^\alpha$  per ogni  $x \in (-1, 1)$ .

Derivando termine a termine la serie si ottiene infatti

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (\alpha - n) x^n$$

---

<sup>19</sup>A meno che non si abbia  $\alpha \in \mathbf{N}$ : in tal caso solo i primi  $\alpha$  coefficienti binomiali sono diversi da 0, e la serie si riduce a un polinomio.

(la seconda espressione si ottiene osservando che  $\binom{\alpha}{n} n = \binom{\alpha}{n-1} (\alpha - n + 1)$  e cambiando l'indice,  $(n-1) \leftrightarrow n$ ). Utilizzando queste due scritture equivalenti di  $f'(x)$  si ottiene subito

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \text{ ovvero } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Integrando, si ha allora  $\log f(x) = \log(1+x)^\alpha + C$ , da cui (osservando che  $f(0) = 1$ )  $f(x) = (1+x)^\alpha$ .

## 21 Lezione del 19/11/2014 (2 ore)

C'è un unico punto della dimostrazione del teorema di regolarità delle serie di potenze che è rimasto un po' in sospeso: per far vedere che la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie originale, abbiamo usato una formuletta per calcolare il raggio di convergenza tramite il *massimo limite* della radice...

È giunto il momento di vedere cosa sono il massimo ed il minimo limite di una successione!

Sia data dunque una successione reale  $\{a_n\}$ : in generale, non è affatto detto che essa ammetta limite per  $n \rightarrow +\infty$ . In compenso, è sempre possibile calcolare due “mezzi limiti” noti come massimo e minimo limite di  $a_n$ :

*DEFINIZIONE (Massimo e minimo limite):* Data una successione reale  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , definiamo il suo massimo e minimo limite come segue

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq n} a_m, \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{m \geq n} a_m. \end{aligned}$$

Si noti che i due limiti nella definizione esistono sempre: le successioni  $b_n = \inf_{m \geq n} a_m$  e  $c_n = \sup_{m \geq n} a_m$  sono infatti rispettivamente crescente e decrescente (stiamo facendo l'inf ed il sup di insieme sempre più piccoli...). Possiamo allora scrivere la seguente definizione, del tutto equivalente a quella data sopra:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{m \geq n} a_m, \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{m \geq n} a_m. \end{aligned}$$

Il massimo limite si indica anche con le scritture  $\max \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , oppure  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Analogamente, il minimo limite si indica anche con le scritture  $\min \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , oppure  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

Vediamo ora una caratterizzazione del massimo e minimo limite, che aiuta a capire meglio questi strani oggetti.

Per rendere ancora più espressiva la nostra caratterizzazione, è utile spiegare cosa vuol dire che una certa proposizione  $\mathcal{P}(n)$  (indicizzata da un numero naturale  $n \in \mathbf{N}$ ) è vera *definitivamente* oppure *frequentemente*. Si dice che  $\mathcal{P}(n)$  è vera *definitivamente* quando è vera *per tutti gli  $n$  abbastanza grandi*, cioè se esiste  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che  $\mathcal{P}(n)$  è vera per ogni  $n \geq \nu$ .

Si dice invece che  $\mathcal{P}(n)$  è vera *frequentemente* se è vera *per infiniti  $n$* . In modo equivalente, per ogni  $n \in \mathbf{N}$  esiste  $m \geq n$  tale che  $\mathcal{P}(m)$  è vera.

Tanto per fare degli esempi semplici, l'affermazione  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  è equivalente a dire che per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha *definitivamente*  $|a_n - \ell| < \varepsilon$ . La successione  $(-1)^n$  assume *frequentemente* il valore 1.

Enunciamo la caratterizzazione di massimo e minimo limite:

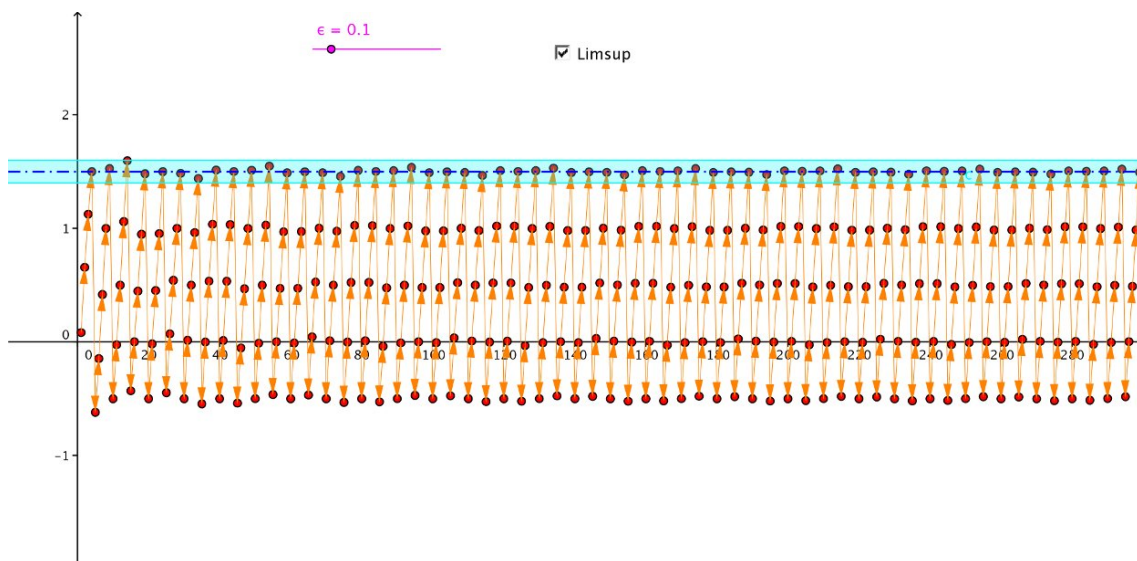
*PROPOSIZIONE (Caratterizzazione di  $\liminf$  e  $\limsup$ ):* Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  si ha  $\ell_1 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$  se e soltanto se per ogni  $\varepsilon > 0$  vale che  $a_n > \ell_1 - \varepsilon$  *definitivamente* e che  $a_n < \ell_1 + \varepsilon$  *frequentemente*.

In maniera del tutto analoga,  $l_2 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  vale che  $a_n < l_2 + \varepsilon$  *definitivamente* e che  $a_n > l_2 - \varepsilon$  *frequentemente*.

Il seguente foglio dinamico GeoGebra<sup>20</sup> illustra la caratterizzazione:

---

<sup>20</sup><http://www.geogebra.org/material/show/id/210739>



Dimostriamo la caratterizzazione del  $\liminf$  con gli  $\varepsilon$ : per il  $\limsup$  la musica è la stessa... anche perché potete facilmente dimostrare (esercizio!) che  $\limsup a_n = -\liminf(-a_n)$ .

Sia dunque  $\ell = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Per definizione il  $\liminf$  è il limite della successione  $b_n = \inf_{m \geq n} a_m$ : grazie alla definizione di limite avremo allora che

$$(*) \quad \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Siccome si ha evidentemente  $a_n \geq b_n$  (perché  $a_n$  appartiene all'insieme di numeri di cui prendiamo l'inf), sarà anche vero che  $a_n > \ell - \varepsilon$  definitivamente.

Fissiamo poi  $n$  abbastanza grande, in modo che valga (\*). Allora  $\inf_{m \geq n} a_m < \ell + \varepsilon$ , dunque  $\ell + \varepsilon$  non è un minorante dell'insieme di cui facciamo l'inf. Esiste dunque  $m \geq n$  tale che  $a_m < \ell + \varepsilon$ . Siccome  $n$  può essere scelto arbitrariamente grande, possiamo concludere che  $a_m < \ell + \varepsilon$  frequentemente. Le due affermazioni che costituiscono la caratterizzazione sono dunque dimostrate.

Viceversa, supponiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  valgano entrambe le proprietà richieste dalla nostra caratterizzazione. Dalla prima di esse segue subito che  $b_n = \inf_{m \geq n} a_m \geq \ell - \varepsilon$  definitivamente. La seconda dice poi che  $b_n < \ell + 2\varepsilon$ : infatti  $\ell + 2\varepsilon$  non può essere un minorante dell'insieme  $\{a_m : m \geq n\}$  perché vale frequentemente la disuguaglianza opposta!

Concludiamo allora che  $\ell - 2\varepsilon \leq b_n \leq \ell + 2\varepsilon$  definitivamente, da cui  $\ell = \lim b_n = \liminf a_n$ , Q.E.D.

*ESEMPLI:* Grazie alla definizione o alla caratterizzazione, si può immediatamente verificare che  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$ ,  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n +$

$\sin(n)/n = -1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n + \sin(n)/n = 1$ . Con minor facilità, potremmo far vedere che  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = -1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = 1$ .

*OSSERVAZIONE:* È evidente dalla definizione che si ha sempre  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Usando la caratterizzazione, segue subito che il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  esiste se e solo se il massimo ed il minimo limite sono uguali (e, in questo caso, essi coincidono con il limite).

*OSSERVAZIONE/ESERCIZIO:* Usando la caratterizzazione, non è difficile dedurre che esistono sempre sottosuccessioni di  $a_n$  che tendono al massimo e al minimo limite. Queste sottosuccessioni forniscono una dimostrazione alternativa del teorema di Bolzano-Weierstrass.

*ESERCIZIO:* Si mostri che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \min\{\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\} : \ell \text{ è il limite di una sottosuccessione di } a_n\}$$

e che una caratterizzazione simile vale per il massimo limite.

A questo punto, abbiamo tutti gli elementi per dimostrare il criterio della radice nella sua “versione limsup”:

*PROPOSIZIONE (Criterio della radice con il massimo limite):* Data la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , sia  $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Allora se  $\ell < 1$  la serie converge assolutamente, se  $\ell > 1$  non converge.

*DIM.:* Nel caso  $\ell > 1$ , scegliamo  $\varepsilon > 1$  in modo che  $\ell - \varepsilon > 1$ . Grazie alla caratterizzazione del lim sup, sappiamo che  $\sqrt[n]{|a_n|} > \ell - \varepsilon$  frequentemente, da cui  $|a_n| > (\ell - \varepsilon)^n$  frequentemente. Poiché  $(\ell - \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$ , se ne deduce che  $|a_n| \not\rightarrow 0$ , e la serie non può convergere.

Se invece  $\ell < 1$ , scegliamo  $\varepsilon > 0$  in modo che  $\ell + \varepsilon < 1$ . Sempre grazie alla caratterizzazione, abbiamo  $\sqrt[n]{|a_n|} < (\ell + \varepsilon)$  definitivamente, da cui  $|a_n| < (\ell + \varepsilon)^n$ . Dunque  $|a_n|$  è definitivamente maggiorato dal termine generale di una serie geometrica convergente: la serie dei moduli converge allora grazie al criterio del confronto. Q.E.D.

*COROLLARIO:* Data la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , sia  $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Allora il raggio di convergenza della serie è  $1/\ell$  (rispettivamente  $+\infty$  se  $\ell = 0$ ,  $0$  se  $\ell = +\infty$ ).

Concludiamo questo modulo del corso con un ultimo argomento, che sarà un ulteriore, piccolo approfondimento sulle successioni.

L'argomento che stiamo per introdurre chiuderà anche questo primo modulo del corso di Analisi I in maniera "circolare": daremo infatti un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza dei numeri reali. Questa formulazione può forse essere vista come poco più che una curiosità in  $\mathbf{R}$ , ma è gravida di importanti generalizzazioni, in quanto consentirà di estendere il concetto di completezza ad un contesto molto più ampio.

Ci poniamo il seguente problema: data una generica successione  $\{a_n\}$ , come possiamo riconoscere se essa possiede o meno un limite finito?

Usare la definizione di limite di una successione non sempre è facile: essa richiede infatti di *conoscere il valore  $\ell$  del limite*. Che fare se non riusciamo a calcolarlo?

C'è però un semplice "test di convergenza" che ci permette di dire se una successione possiede un limite finito, senza necessità di calcolarlo: precisamente, il limite finito c'è se e soltanto se la successione è di Cauchy.

**DEFINIZIONE:** Una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  si dice *di Cauchy* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \forall m \geq \bar{n}.$$

**TEOREMA:** Una successione  $\{a_n\}$  ammette limite finito se e soltanto se essa è di Cauchy.

**DIM.:** Mostriamo la prima implicazione: supponiamo che esista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$ , e mostriamo che la nostra successione è di Cauchy.

Per definizione di limite, esiste  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ .

Se ora  $m, n \geq \bar{n}$ , grazie alla disuguaglianza triangolare avremo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e la nostra successione è di Cauchy.

Facciamo vedere che se  $\{a_n\}$  è una successione di Cauchy, allora essa ammette un limite finito  $\ell$ .

Cominciamo con l'osservare che una successione di Cauchy è *limitata*: usiamo la definizione di successione di Cauchy con  $\varepsilon = 1$ . Allora, per  $m$  e  $n$  maggiori o uguali a un certo indice  $\nu$  avremo  $|a_m - a_n| < 1$ . In particolare, se prendiamo  $m = \nu$  otteniamo

$$a_\nu - 1 < a_n < a_\nu + 1 \quad \forall n \geq \nu,$$

e la nostra successione è limitata (a rigore, dalla nostra disuguaglianza rimangono fuori i termini della successione di indice minore di  $\nu$ , ma essi sono in numero finito e non possono certo renderla illimitata!).



Dunque,  $\{a_n\}$  è limitata e possiamo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass: esiste una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbf{R}$ .

Dico che in realtà *tutta la successione*  $a_n$ , e non solo la sua sottosuccessione  $a_{n_k}$ , tende a  $\ell$ . Prendiamo  $\varepsilon > 0$ . Per definizione di successione di Cauchy, troviamo  $\bar{n}$  tale che per  $m, n \geq \bar{n}$  si abbia  $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ . D'altra parte, per definizione di limite troviamo  $\bar{k}$  tale che  $|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $k \geq \bar{k}$ .

Evidentemente, non è restrittivo supporre che  $\bar{k}$  sia tanto grande che  $n_{\bar{k}}$  sia maggiore o uguale a  $\bar{n}$  (se così non fosse, basterà sostituire  $\bar{k}$  con un valore opportunamente più grande). Allora, se  $n > n_{\bar{k}}$  avremo

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_{\bar{k}}}| + |a_{n_{\bar{k}}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Q.E.D.

*OSSERVAZIONE:* Il teorema appena dimostrato può essere preso come *formulazione equivalente dell'assioma di completezza*.

Ci si convince subito che in  $\mathbf{Q}$  esistono delle successioni di Cauchy che non convergono ad alcun numero razionale (perché esse, se le si guarda come successioni reali, convergono ad un numero irrazionale!). Si noti che l'altra metà del teorema è invece vera anche in  $\mathbf{Q}$ : ogni successione convergente è di Cauchy.

Nel dimostrare che ogni successione di Cauchy in  $\mathbf{R}$  converge ad un limite finito, abbiamo fatto uso dell'assioma di completezza di  $\mathbf{R}$  (dove?). Viceversa, se assumiamo *come assioma* che ogni successione di Cauchy converge, possiamo mostrare che vale l'assioma di completezza in qualche altra sua formulazione: per esempio, possiamo mostrare che ogni insieme non vuoto ed inferiormente limitato ammette estremo inferiore in  $\mathbf{R}$  (Questo è relativamente facile. Negli appunti di una delle prime lezioni, c'è una parte scritta in piccolo in cui viene presentato un algoritmo per identificare l'inf di un insieme come numero decimale infinito: non è difficile verificare che la successione di numeri decimali finiti fornita da quell'algoritmo è proprio una successione di Cauchy!).

La formulazione dell'assioma di completezza tramite le successioni di Cauchy, non è particolarmente "conveniente" per quanto riguarda i numeri reali (anche se ci tornerà utile sapere che le successioni di Cauchy convergono).

Essa si presta però particolarmente bene ad essere generalizzata a situazioni più complicate. Il vantaggio principale è che nella definizione di successione di Cauchy non c'è bisogno di sapere che  $\{a_n\}$  vive *in un insieme ordinato*. Per questo motivo, l'assioma di completezza può essere formulato con le successioni di Cauchy anche in  $\mathbf{R}^n$ , negli spazi funzionali, o negli spazi metrici in genere.