Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia A

17 Luglio 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$N = \{\text{una persona scelta a caso è nata a Barcellona}\}$$
$$B = \{\text{una persona scelta a caso è tifosa del Barcellona}\}$$

La probabilità da determinare è

$$P(N|B) = \frac{P(B|N) \cdot P(N)}{P(B)}, \quad \text{formula di Bayes} .$$

Dai dati si ricava che:

$$\begin{aligned} P(B|N) &= \frac{7}{10} \\ P(N) &= \frac{1}{20} \\ P(B|\overline{N}) &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(B \cap N) \cup (B \cap \overline{N})] = P(B|N) \cdot P(N) + P(B|\overline{N}) \cdot P(\overline{N}) \\ &= \frac{7}{10}\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{26}{200} , \end{aligned}$$

quindi

$$P(N|B) = \frac{\frac{7}{200}}{\frac{26}{200}} = 0.269 .$$

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned} I &= \{\text{Rappresentanti di Informatica}\},\ |I| = 3 \\ E &= \{\text{Rappresentanti di Economia}\},\ |E| = 4 \\ M &= \{\text{Rappresentanti di Medicina}\},\ |M| = 4 \\ G &= \{\text{Rappresentanti di Giurisprudenza}\},\ |G| = 3 \\ C &= \{\text{Rappresentanti in Commissione}\},\ |C| = 3 \end{aligned}$$

- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{14}{4}} = 0.1439$$
- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{14}{4}} = 0.036$$
- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{4+4}{2}}{\binom{14}{4}} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{4}} = 0.0699$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x - 1, & \text{se } 1 \le x \le a \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^a (x-1)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^a \\ &= \frac{a^2}{2} - a = 0 \ , \end{aligned}$$

da cui si ha $a = 0$ (sol. non accettabile) e $a = 2$. Quindi,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x(1-x)dx + \int_1^2 x(x-1)dx = \int_0^1 x - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1 \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia B

17 Luglio 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$U = \{\text{una persona scelta a caso è ucraina}\}$$
$$D = \{\text{una persona scelta a caso è tifosa del Dnipro}\}$$

La probabilità da determinare è

$$P(U|D) = \frac{P(D|U) \cdot P(U)}{P(D)}, \quad \text{per la formula di Bayes .}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(D|U) = \frac{3}{7}$$
$$P(U) = \frac{7}{10}$$
$$P(D|\overline{U}) = \frac{5}{7}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(D \cap U) \cup (D \cap \overline{U})] = P(D|U) \cdot P(U) + P(D|\overline{U}) \cdot P(\overline{U}) \\ &= \frac{3}{7}\frac{7}{10} + \frac{5}{7}\left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{36}{70} \ , \end{aligned}$$

quindi

$$P(U|D) = \frac{\frac{21}{70}}{\frac{36}{70}} = 0.583 \ .$$

Esercizio 2. Siano

$$
\begin{aligned}
I &= \{\text{Rappresentanti di Informatica}\},\ |I| = 3 \\
E &= \{\text{Rappresentanti di Economia}\},\ |E| = 4 \\
M &= \{\text{Rappresentanti di Medicina}\},\ |M| = 4 \\
G &= \{\text{Rappresentanti di Giurisprudenza}\},\ |G| = 3 \\
C &= \{\text{Rappresentanti in Commissione}\},\ |C| = 5
\end{aligned}
$$

- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{14}{5}} = 0.0719$$
- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{2}}{\binom{14}{5}} = 0.0060$$
- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{14}{5}} = 0.0539$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} Kx, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -Kx, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-1}^{0} Kx dx + \int_{0}^{3} -Kx dx = K \cdot \left[\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{3} \right] \\
&= K\left[-\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right] = -5 \cdot K \ ,
\end{aligned}
$$

da cui si ha $K = -\frac{1}{5}$. Quindi,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{5} t dt \\
&= \frac{1}{5}\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{x} = -\frac{x^2}{10} + \frac{1}{10}, \quad \text{per } -1 \leq x \leq 0 \ .
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia C

17 Luglio 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$
\begin{aligned}
T &= \{\text{una persona scelta a caso è nata a Torino}\} \\
J &= \{\text{una persona scelta a caso è tifosa della Juventus}\}
\end{aligned}
$$

La probabilità da determinare è

$$P(T|J) = \frac{P(J|T) \cdot P(T)}{P(J)}, \quad \text{per la formula di Bayes .}$$

Dai dati si ricava che:

$$
\begin{aligned}
P(J|T) &= \frac{9}{15} \\
P(T) &= \frac{1}{10} \\
P(J|\overline{T}) &= \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

Inoltre,

$$
\begin{aligned}
P(J) &= P[(J \cap T) \cup (J \cap \overline{T})] = P(J|T) \cdot P(T) + P(J|\overline{T}) \cdot P(\overline{T}) \\
&= \frac{9}{15}\frac{1}{10} + \frac{4}{15}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{45}{150}\ ,
\end{aligned}
$$

quindi

$$P(T|J) = \frac{\frac{9}{150}}{\frac{45}{150}} = 0.2\ .$$

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
I &= \{\text{Rappresentanti di Informatica}\},\ |I| = 5\\
E &= \{\text{Rappresentanti di Economia}\},\ |E| = 2\\
M &= \{\text{Rappresentanti di Medicina}\},\ |M| = 4\\
G &= \{\text{Rappresentanti di Giurisprudenza}\},\ |G| = 4\\
C &= \{\text{Rappresentanti in Commissione}\},\ |C| = 6
\end{aligned}$$

- La probabilità cercata è

$$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{15}{6}} = 0.0719$$

- La probabilità cercata è

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{3}}{\binom{15}{6}} = 0.0032$$

- La probabilità cercata è

$$P(C) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{4}}{\binom{54}{6}} = 0.006$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$p(x) = \begin{cases} \frac{K}{3}, & \text{se } x = 1, 2, 3 \\ K, & \text{se } x = 4 \\ \frac{K}{3}, & \text{se } x = 5, 6, 7 \end{cases}$$

Avremo:

$$1 = \sum_{i=1}^{7} p(x_i) = 3 \cdot \frac{K}{3} + K + 3 \cdot \frac{K}{3}$$

da cui si ha $K = \frac{1}{3}$. Quindi,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{7} x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3} \\
&+ 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{1}{9} + 7 \cdot \frac{1}{9} = 4 \\
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \cdot p(x_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} + 4^2 \cdot \frac{1}{3} \\
&+ 5^2 \cdot \frac{1}{9} + 6^2 \cdot \frac{1}{9} + 7^2 \cdot \frac{1}{9} = 19.1111
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia D

17 Luglio 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$A = \{\text{una persona scelta a caso è andalusa}\}$$
$$S = \{\text{una persona scelta a caso è tifosa del Siviglia}\}$$

La probabilità da determinare è

$$P(A|S) = \frac{P(S|A) \cdot P(A)}{P(S)}, \quad \text{per la formula di Bayes .}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(S|A) = \frac{7}{10}$$
$$P(A) = \frac{5}{8}$$
$$P(S|\overline{A}) = \frac{3}{10}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} P(S) &= P[(S \cap A) \cup (S \cap \overline{A})] = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \\ &= \frac{7}{10}\frac{5}{8} + \frac{3}{10}\left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{44}{80} \, , \end{aligned}$$

quindi

$$P(A|S) = \frac{\frac{35}{80}}{\frac{44}{80}} = 0.7955 \, .$$

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned} I &= \{\text{Rappresentanti di Informatica}\},\ |I| = 5 \\ E &= \{\text{Rappresentanti di Economia}\},\ |E| = 2 \\ M &= \{\text{Rappresentanti di Medicina}\},\ |M| = 3 \\ G &= \{\text{Rappresentanti di Giurisprudenza}\},\ |G| = 5 \\ C &= \{\text{Rappresentanti in Commissione}\},\ |C| = 5 \end{aligned}$$

- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{14}{5}} = 0.1499$$
- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{2}}{\binom{14}{5}} = 0.0150$$
- La probabilità cercata è
$$P(C) = \frac{\binom{5+5}{2}}{\binom{14}{6}} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{14}{6}} = 0.0225$$

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{K}, & \text{se } x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$1 = \sum_{i=1}^{3} p(x_i) = \cdot \frac{1}{K} + \frac{4}{K} + \frac{9}{K} = \frac{14}{K}$$

da cui si ha $K = 14$. Quindi,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(x_i) = \frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{2^2}{14} + 3 \cdot \frac{3^2}{14} = 2.5714 \\ E(X^2) &= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p(x_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{14} + 2^2 \cdot \frac{2^2}{14} + 3^2 \cdot \frac{3^2}{14} = 7 \text{ , così} \\ Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.3879 \text{ .} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia E

17 Luglio 2015

Esercizio 1. I dati possono essere schematizzati come segue:

$$\begin{cases} 3 \times (1G, 1F) \\ 3 \times (1G, 2F) \\ 5 \times (2G, 1F) \\ 7 \times (2G, 2F) \\ 6 \times (2G, 3F) \end{cases}$$

Il numero cercato è

$$\begin{aligned} N &= 3\binom{1}{1}\binom{1}{1} + 3\binom{1}{1}\binom{2}{1} \\ &+ 5\binom{2}{1}\binom{1}{1} + 7\binom{2}{1}\binom{2}{1} + 6\binom{2}{1}\binom{3}{1} \\ &= 3 + 6 + 10 + 28 + 36 = 83 \ , \end{aligned}$$

dove $\binom{G}{1}$ conta i modi di scegliere un genitore in una famiglia con G genitori e $\binom{F}{1}$ conta i modi di scegliere un figlio da una famiglia con F figli.

Esercizio 2. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Sempronio viaggia in autobus}\} \\ M &= \{\text{Sempronio viaggia con la propria auto}\} \\ T &= \{\text{Sempronio viaggia in treno}\} \\ E &= \{\text{Sempronio arriva punutuale in banca}\} \end{aligned}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(A) = 0.65;\ P(M) = 0.2;\ P(T) = 1 - P(A) - P(M) = 0.15$$
$$P(E|A) = 0.35;\ P(E|M) = 0.75;\ P(E|T) = 0.55$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio arrivi in orario al lavoro, osserviamo che $E = (E \cap A) \cup (E \cap M) \cup (E \cap T)$ (eventi incompatibili), allora

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap M) + P(E \cap T) \\ &= P(E|A) \cdot P(A) + P(E|M) \cdot P(M) + P(E|T) \cdot P(T) \\ &= 0.35 \cdot 0.65 + 0.75 \cdot 0.2 + 0.55 \cdot 0.15 = 0.46\ . \end{aligned}$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio non abbia usato la propria auto, sapendo che è arrivato in orario sul posto di lavoro, usiamo la *formula di Bayes:*

$$\begin{aligned} P(\overline{M}|E) = 1 - P(M|E) &= 1 - \frac{P(E|M) \cdot P(M)}{P(E)} \\ &= 1 - \frac{0.75 \cdot 0.2}{0.46} = 0.674\ . \end{aligned}$$

Esercizio 3. Uno stimatore T del parametro θ è *corretto* se $E[T] = \theta$. In questo caso:

$$E[T] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3}{5}\right] = \frac{1}{5}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)) = \frac{3p}{5} \neq p\ ,$$

dunque, lo stimatore T non è corretto.

Dalla teoria, si sa che $EQM(T) = Var(T) + b^2(T)$, dove

$$\begin{aligned} b(T) &= E(T) - p = \frac{3}{5}p - p = -\frac{2}{5}p \\ Var(T) &= Var\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{5}\right) = \frac{3}{25}p(1-p) \end{aligned}$$

quindi

$$EQM(T) = \frac{3}{25}p(1-p) + \frac{4}{25}p^2 = \frac{1}{25}p(p-3)\ .$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia F

17 Luglio 2015

Esercizio 1. I dati possono essere schematizzati come segue:

$$\begin{cases} 2 \times (1G, 1F) \\ 2 \times (1G, 2F) \\ 3 \times (2G, 1F) \\ 5 \times (2G, 2F) \\ 5 \times (2G, 3F) \end{cases}$$

Il numero cercato è

$$\begin{aligned} N &= 2\binom{1}{1}\binom{1}{1} + 2\binom{1}{1}\binom{2}{1} \\ &+ 3\binom{2}{1}\binom{1}{1} + 5\binom{2}{1}\binom{2}{1} + 5\binom{2}{1}\binom{3}{1} \\ &= 2 + 4 + 6 + 20 + 30 = 62 \,, \end{aligned}$$

dove $\binom{G}{1}$ conta i modi di scegliere un genitore in una famiglia con G genitori e $\binom{F}{1}$ conta i modi di scegliere un figlio da una famiglia con F figli.

Esercizio 2. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Sempronio viaggia in autobus}\} \\ M &= \{\text{Sempronio viaggia con la propria auto}\} \\ T &= \{\text{Sempronio viaggia in treno}\} \\ E &= \{\text{Sempronio arriva punutuale in banca}\} \end{aligned}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(A) = 0.15;\ P(M) = 0.2;\ P(T) = 1 - P(A) - P(M) = 0.65$$
$$P(E|A) = 0.35;\ P(E|M) = 0.55;\ P(E|T) = 0.80$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio arrivi in orario al lavoro, osserviamo che $E = (E \cap A) \cup (E \cap M) \cup (E \cap T)$ (eventi incompatibili), allora

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap M) + P(E \cap T) \\ &= P(E|A) \cdot P(A) + P(E|M) \cdot P(M) + P(E|T) \cdot P(T) \\ &= 0.35 \cdot 0.15 + 0.55 \cdot 0.2 + 0.80 \cdot 0.65 = 0.6825\ . \end{aligned}$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio non abbia usato la propria auto, sapendo che è arrivato in orario sul posto di lavoro, usiamo la *formula di Bayes:*

$$\begin{aligned} P(\overline{M}|E) = 1 - P(M|E) &= 1 - \frac{P(E|M) \cdot P(M)}{P(E)} \\ &= 1 - \frac{0.55 \cdot 0.2}{0.6825} = 0.8388\ . \end{aligned}$$

Esercizio 3. Uno stimatore T del parametro θ è *corretto* se $E[T] = \theta$. In questo caso:

$$E[T] = E\left[\frac{X_1 + 2X_2 - 3X_3}{5}\right] = \frac{1}{5}(E(X_1)+2E(X_2)-3E(X_3)) = 0 \neq p\ ,$$

dunque, lo stimatore T non è corretto.

Dalla teoria, si sa che $EQM(T) = Var(T) + b^2(T)$, dove

$$\begin{aligned} b(T) &= E(T) - p = 0 - p = -p \\ Var(T) &= Var\left(\frac{X_1 + 2X_2 - 3X_3}{5}\right) = \frac{14}{25}p(1-p) \end{aligned}$$

quindi

$$EQM(T) = \frac{14}{25}p(1-p) + p^2 = \frac{1}{25}p(11p + 14)\ .$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia G

17 Luglio 2015

Esercizio 1. I dati possono essere schematizzati come segue:

$$\begin{cases} 3 \times (1G, 1F) \\ 1 \times (1G, 2F) \\ 3 \times (2G, 1F) \\ 5 \times (2G, 2F) \\ 4 \times (2G, 3F) \end{cases}$$

Il numero cercato è

$$\begin{aligned} N &= 3\binom{1}{1}\binom{1}{1} + 1\binom{1}{1}\binom{2}{1} \\ &+ 3\binom{2}{1}\binom{1}{1} + 5\binom{2}{1}\binom{2}{1} + 4\binom{2}{1}\binom{3}{1} \\ &= 3 + 2 + 6 + 20 + 24 = 55 \; , \end{aligned}$$

dove $\binom{G}{1}$ conta i modi di scegliere un genitore in una famiglia con G genitori e $\binom{F}{1}$ conta i modi di scegliere un figlio da una famiglia con F figli.

Esercizio 2. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Sempronio viaggia in autobus}\} \\ M &= \{\text{Sempronio viaggia con la propria auto}\} \\ T &= \{\text{Sempronio viaggia in treno}\} \\ E &= \{\text{Sempronio arriva punutuale in banca}\} \end{aligned}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(A) = 0.25;\ P(M) = 0.3;\ P(T) = 1 - P(A) - P(M) = 0.45$$
$$P(E|A) = 0.15;\ P(E|M) = 0.35;\ P(E|T) = 0.65$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio arrivi in orario al lavoro, osserviamo che $E = (E \cap A) \cup (E \cap M) \cup (E \cap T)$ (eventi incompatibili), allora

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap M) + P(E \cap T) \\ &= P(E|A) \cdot P(A) + P(E|M) \cdot P(M) + P(E|T) \cdot P(T) \\ &= 0.15 \cdot 0.25 + 0.35 \cdot 0.3 + 0.65 \cdot 0.45 = 0.435\ . \end{aligned}$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio non abbia usato la propria auto, sapendo che è arrivato in orario sul posto di lavoro, usiamo la *formula di Bayes:*

$$\begin{aligned} P(\overline{M}|E) = 1 - P(M|E) &= 1 - \frac{P(E|M) \cdot P(M)}{P(E)} \\ &= 1 - \frac{0.35 \cdot 0.3}{0.435} = 0.759\ . \end{aligned}$$

Esercizio 3. Uno stimatore T del parametro θ è *corretto* se $E[T] = \theta$. In questo caso:

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{5}\right] = \frac{1}{5}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)) \\ &= \frac{4}{5}p \neq p\ , \end{aligned}$$

dunque, lo stimatore T non è corretto.

Dalla teoria, si sa che $EQM(T) = Var(T) + b^2(T)$, dove

$$\begin{aligned} b(T) &= E(T) - p = \frac{4}{5}p - p = -\frac{1}{5}p \\ Var(T) &= Var\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{5}\right) = \frac{4}{25}p(1-p) \end{aligned}$$

quindi

$$EQM(T) = \frac{4}{25}p(1-p) + \frac{1}{25}p^2 = \frac{1}{25}p(4-3p)\ .$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia H

17 Luglio 2015

Esercizio 1. I dati possono essere schematizzati come segue:

$$\begin{cases} 3 \times (1G, 1F) \\ 2 \times (1G, 2F) \\ 3 \times (2G, 1F) \\ 6 \times (2G, 2F) \\ 2 \times (2G, 3F) \end{cases}$$

Il numero cercato è

$$\begin{aligned} N &= 3\binom{1}{1}\binom{1}{1} + 2\binom{1}{1}\binom{2}{1} \\ &+ 3\binom{2}{1}\binom{1}{1} + 6\binom{2}{1}\binom{2}{1} + 2\binom{2}{1}\binom{3}{1} \\ &= 3 + 4 + 6 + 24 + 12 = 49 , \end{aligned}$$

dove $\binom{G}{1}$ conta i modi di scegliere un genitore in una famiglia con G genitori e $\binom{F}{1}$ conta i modi di scegliere un figlio da una famiglia con F figli.

Esercizio 2. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Sempronio viaggia in autobus}\} \\ M &= \{\text{Sempronio viaggia con la propria auto}\} \\ T &= \{\text{Sempronio viaggia in treno}\} \\ E &= \{\text{Sempronio arriva punutuale in banca}\} \end{aligned}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(A) = 0.3;\ P(M) = 0.15;\ P(T) = 1 - P(A) - P(M) = 0.55$$
$$P(E|A) = 0.45;\ P(E|M) = 0.65;\ P(E|T) = 0.70$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio arrivi in orario al lavoro, osserviamo che $E = (E \cap A) \cup (E \cap M) \cup (E \cap T)$ (eventi incompatibili), allora

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap M) + P(E \cap T) \\ &= P(E|A) \cdot P(A) + P(E|M) \cdot P(M) + P(E|T) \cdot P(T) \\ &= 0.45 \cdot 0.3 + 0.65 \cdot 0.15 + 0.7 \cdot 0.55 = 0.6175\ . \end{aligned}$$

- Per calcolare la probabilità che Sempronio non abbia usato la propria auto, sapendo che è arrivato in orario sul posto di lavoro, usiamo la *formula di Bayes:*

$$\begin{aligned} P(\overline{M}|E) = 1 - P(M|E) &= 1 - \frac{P(E|M) \cdot P(M)}{P(E)} \\ &= 1 - \frac{0.65 \cdot 0.15}{0.6175} = 0.842\ . \end{aligned}$$

Esercizio 3. Uno stimatore T del parametro θ è *corretto* se $E[T] = \theta$. In questo caso:

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\frac{2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4}{5}\right] = \frac{1}{5}(2E(X_1) + 2E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)) \\ &= \frac{6}{5}p \neq p\ , \end{aligned}$$

dunque, lo stimatore T non è corretto.

Dalla teoria, si sa che $EQM(T) = Var(T) + b^2(T)$, dove

$$\begin{aligned} b(T) &= E(T) - p = \frac{6}{5}p - p = \frac{1}{5}p \\ Var(T) &= Var\left(\frac{2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4}{5}\right) = \frac{10}{25}p(1-p) \end{aligned}$$

quindi

$$EQM(T) = \frac{10}{25}p(1-p) + \frac{1}{25}p^2 = \frac{1}{25}p(10 - 9p)\ .$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.