Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 7

14 novembre 2012

1. Sia $L := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.

   (a) Si determinino $[L : \mathbb{Q}]$, una $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}$ di L e il polinomio minimo di $\sqrt[3]{5}$ su $\mathbb{Q}$.

   (b) Sia $f : L \longrightarrow L$ data da $f(x) = \sqrt[3]{5}x$. Si dimostri che f è un'applicazione $\mathbb{Q}$-lineare e si trovi la matrice A associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

   (6 punti)

2. Sia $u = \sqrt{3} + i\sqrt{7}$.

   (a) si verifichi che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e se ne determini il polinomio minimo g.
   (b) si trovi $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$
   (c) si provi che $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(u)$ e lo si scriva come combinazione lineare di potenze di u a coefficienti razionali
   (d) si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ è il campo di riducubilità completa di g su $\mathbb{Q}$.

   (8 punti)

3. Sia p un numero primo, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ il campo con p elementi e $f = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$

   (a) si verifichi che f non ha radici in $\mathbb{F}_p$
   (b) Sia $\alpha \in E$ una radice di f, con E opportuna estensione di $\mathbb{F}_p$. Si provi che per ogni $a \in \mathbb{F}_p$, $\alpha + a$ è radice di f.
   (c) Si provi che $\mathbb{F}_p(\alpha)$ è campo di riducibilità completa per f su $\mathbb{F}_p$ e si scriva f come prodotto di fattori lineari in $\mathbb{F}_p(\alpha)$
   (d) Si dimostri che f è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$ (Sugg: si supponga g un divisore di f con grado $r < p$; si studi il coefficiente di x^{r-1} in g e si deduca che $r\alpha \in \mathbb{F}_p$)

   (*10 punti*)

4. Sia $u = \sqrt{2 + \sqrt{6}} \in \mathbb{R}$.

   (a) si calcoli il polinomio minimo g di u su $\mathbb{Q}$ e si trovi una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.
   (b) si scriva $(u + 1)^{-1}$ come combinazione lineare degli elementi di tale base
   (c) si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ è contenuto in $\mathbb{R}$
   (d) si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ non è il campo di riducibilità completa per g su $\mathbb{Q}$ (Sugg: si trovino le radici di g e si usi il punto 3)

   (8 punti)

Consegna: giovedì 22 novembre durante la lezione.