Elementi di logica

1. L'ESIGENZA DI STUDIARE UN LINGUAGGIO FORMALE.

Da sempre l'uomo si è posto domande fondamentali circa la sua esperienza nella propria vita. Uno di queste è: perché la realtà si comporta nel modo che viene constatato? Tale domanda continua a ripetersi perché le risposte proposte non si sono dimostrate definitive. E' nella comune esperienza dell'uomo l'illudersi, l'avere l'impressione che le cose stiano in un certo modo, per poi accorgersi di essersi sbaglilato. Come essere certi che un'eventuale risposta alla domanda posta inizialmente non sia sbagliata? Peggio, l'uomo sperimenta anche la falsità. Sa dire bugie, magari convincenti, come riconoscerle? Questo aspetto è rilevante anche per la conoscenza, dal momento che molte informazioni arrivano all'uomo non per esperienza diretta, che è molto limitata, ma perché riferite da altri, attraverso le possibilità comunicative di cui l'uomo dispone. Quando credere a ciò che viene comunicato? Dall'antichità l'uomo ha studiato questo problema in entrambe le direzioni: convincere e lasciarsi convincere. Così sono nate la retorica e l'ermeneutica. Ma l'ambizione era quella di arrivare a risultati certi, a volte possibili, come si può constatare nell'esperienza. Così l'uomo ha cominciato a notare e catalogare le modalità di espressione che portano a risultati incontrovertibili. Ecco la logica con i suoi sillogismi e le sue varie forme argomentative. Visti i successi ottenuti in questa direzione, l'uomo si è fatto ancora più aridito cercando di appogiare su basi certe e inconfutabili le risposte ai suoi problemi fondamentali. Così ha cercato di presentare tali basi come conseguenze di fatti che non possono che essere come sono, perchè concepiti in modo da autogiustificarsi per la stessa struttura (logica nel senso prima detto) della loro presentazione. In tal modo la mente umana sarebbe forzata ad accettare la basi così strutturate. Direi che in questa ottica si inseriscono varie opere di filosofi, che si sentono in dovere di precisare la logica (ancora nel senso sopra detto) su cui appoggiarsi, visto anche che altri sistemi logici, precedentemente elaborati, sarebbero stati insufficienti ai loro scopi.

Per secoli non si notò, in questa problematica, il ruolo centrale del linguaggio. Ipotizzando che il linguaggio fosse totalmente trasparente (cioè non frapponesse alcun ostacolo tra il significato rappresentato e il modo di rappresentarlo), non si sentì la necessita di separare i due momenti costituiti da ciò che si vuole rappresentare e dal modo con cui lo si rappresenta, ma anzi si analizzò la correttezza di quanto affermato attraverso lo studio dell'espressione linguistica che lo rappresentava. Questo atteggiamento, del tutto ragionevole nell'ambito dell'ipotesi formulata, portò ad identificare lo studio del ragionamento (dell'attività mentale) con lo studio delle espressioni del linguaggio al punto che l'ineluttabilità dell'accettazione di certe affermazioni si identificava con la correttezza del ragionamento. Pur non esplicitando cosa debba intendersi per ragionamento corretto, esso veniva ritenuto tale se seguiva le norme della logica, ovvero le norme del costituirsi di espressioni linguistiche della cui validità nessuno avrebbe potuto dubitare. Di conseguenza, la logica che si sviluppò si appoggiò pesantemente sugli aspetti linguistici, fino a sentire la necessità di giustificare la loro affidabilità. Ma proprio nel tentativo di dimostrare tale affidabilità, il linguaggio con le sue espressioni divenne oggetto dello studio. Affinché tale studio non fosse basato sulle sabbie mobili di una lingua viva, mutabile e sfuggente, anzitutto si dovette precisare il linguaggio che si voleva studiare, costruendolo e definendolo esplicitamente, e giungendo al cosiddetto linguaggio oggetto o linguaggio formale. Così facendo, si mise in risalto anche il ruolo dell'organizzazione interna del linguaggio nella determinazione delle affermazioni che si è forzati ad accettare come corrette. Fu proprio nell'ambito di questi studi che ci si accorse dei limiti dei linguaggi formali, ad esempio individuando concetti non rappresentabili con precisione (cioè non definibili né esplicitamente né implicitamente) mediante un linguaggio formale. A questi risultati si giungerà nello sviluppo dello studio che si sta intrapprendendo; qui, invece, interessa mettere in risalto come sia maturata l'esigenza di introdurre un linguaggio formale, e come, di conseguenza, si sia precisato il campo della logica come studio delle potenzialità e dei limiti dei linguaggi formali.

Ma le motivazioni indicate non sono le sole che portano alla considerazione di linguaggi formali. Un'altra fonte per questa esigenza è l'informatica.

Come indica l'origine etimologica della parola informatica (informazione automatica), questa si occupa di come trasmettere ed elaborare informazioni in modo automatico, attraverso opportune macchine.

A volte si pensa che solo l'uomo sia in grado di elaborare informazioni, detto altrimenti di ragionare, e puo' sorprendere il ricorso a delle macchine per effettuare una tale operazione, a meno che non si tratti di macchine intelligenti. Spesso i computers vengono chiamati proprio macchine intelligenti, ma, in effetti, sono autentiche macchine che eseguono solo le operazioni per cui sono state costruite. Come possono allora elaborare informazioni?

Mentre nella comunicazione interpersonale si puo' assumere una conoscenza dei significati delle parole da parte degli interlocutori, conoscenza a cui si puo' ricorrere per cogliere il messaggio, quando questo passa attraverso una macchina, ed e' eventualmente elaborato, non si puo' utilizzare ne' significato, ne' ingegno per realizzare la comunicazione e l'elaborazione. L'unica cosa su cui puo' operare una macchina e' la forma linguistica del messaggio, la sua rappresentazione che deve essere ben precisa per poter essere accettata dalla macchina ed utile ad essa.

Come si vedra' dallo studio che faremo, introducendo opportunamente un linguaggio, si possono trovare delle operazioni di trasformazione delle espressioni linguistiche che portano da espressioni con un certo significato ad espressioni il cui significato e' ottenuto dal significato precedente mediante operazioni mentali sui significati (ragionando). Sicche' al posto di operare sui significati, (attivita' riservata a chi comprende i significati), si puo' equivalentemente operare sulle espressioni di questi, attivita' eseguibile anche da chi non comprende il significato di quanto si sta facendo.

L'esistenza di questa attivita' parallela, che sara' illustrata nello studio successivo, suggerisce la possibilita' di architettare e costruire macchine (prototipi di stupidita') che possano elaborare i significati semplicemente elaborando inconsapevolmente, ma comandate da chi sa cosa si vuol ottenere, le espressioni di un opportuno linguaggio.

Ecco l'esigenza di un linguaggio ben precisato, eventualmente artificialmente costruito, per poter esser utilizzato nelle comunicazioni attraverso una macchina: l'esigenza di un linguaggio formale.

Cosi', volendo automatizzare e controllare come si ragiona, cioe' come si opera nei modelli mentali, dobbiamo studiare come questo operare si manifesti attraverso il linguaggio. Ecco allora l'importanza dello studio delle potenzialita' e dei limiti dei linguaggio, e, di conseguenza della logica se questa significa studiare proprio cio'.

Quando il linguaggio diventa oggetto di studio, esso diventa un linguaggio oggetto, di cui parliamo ovviamente usando un linguaggio che dobbiamo gia' conoscere, questo sara' chiamato metalinguaggio.

Come deve essere il linguaggio oggetto? Puo' essere un linguaggio naturale?

Non proprio, per l'imprecisione di un qualsiasi linguaggio naturale. Direi che per forza i linguaggi naturali devono essere imprecisi a causa dei modi e degli scopi per cui sono sorti: devono rispondere alle esigenze umane di comunicazione qualunque sia l'argomento che si vuol trattare, e, senza perdere le precedenti doti di comunicabilita', devono svilupparsi nel tempo per rispondere alle nuove esigenze espressive anche riguardo a nozioni vaghe e forse non esprimibili con precisione in alcun linguaggio.

Di piu', in un linguaggio naturale la stessa costruzione sintattica (cioe' la determinazione delle successioni di simboli dell'alfabeto che vogliamo accettare per costruire dei discorsi) e' regolata, a volte, da criteri che coinvolgono la semantica, cioe' il significato dei termini usati. Cio' impedisce un controllo puramente sintattico sulla correttezza dei ragionamenti, che, invece, si puo' ottenere attraverso linguaggi opportunamente ben costruiti. Per chiarire questo concetto val la pena presentare un esempio a tutti noto.

Noi usiamo la notazione araba per indicare i numeri naturali. Questa notazione usa le cifre, simboli per indicare i numeri dallo zero al nove, e sfrutta la posizione delle cifre nella scrittura dei numeri. Sappiamo anche che i romani adottavano una notazione completamente diversa che partiva dai simboli I, V, X, L, C, D, M e ancora sfruttava la posizione, ma in modo diverso. Anche i romani, come noi, sapevano fare le operazioni fondamentali: i risultati della addizione e della moltiplicazione non dipendono dalla notazione ma dai numeri a cui si applicano queste operazioni. Pero' e' molto piu' facile e sicuro eseguire, ad esempio, l' addizione di due numeri naturali a e b usando la notazione araba. Infatti, invece che effettuare l'operazione di passaggio al successore b volte a partire dal numero a (con la probabile possibilita' di perdere il conto se il numero b e' grande) e poi indicare il numero ottenuto con la notazione voluta, e' piu' semplice usare il ben noto algoritmo della somma che opera sulle scritture in notazione araba dei numeri a e b per dare una scrittura che indica il numero somma, sempre nella notazione araba. Cioe', con un buon linguaggio, ad una operazione tra gli enti che sono significato di certi nomi, si puo' sostituire un'operazione tra i nomi che porta, correttamente e in modo facilmente controllabile, al nome dell'ente risultato dell'operazione.

La notazione romana dei numeri, ed anche quella mediante il linguaggio naturale, non consentono questo interessante modo di procedere operando sul linguaggio invece che sugli enti indicati dal linguaggio, ma richiedono di conoscere il significato dei vocaboli per poter pervenire al risultato. Sicuramente il linguaggio naturale non e' atto a poter essere elaborato da una macchina, che certo non e' intelligente e non opera sui significati, ma neppure puo' essere usato come linguaggio oggetto di studio, perche' sarebbe un oggetto mal definito e sfuggevole.

Nonostante il linguaggio naturale sia cosi' comodo, ben conosciuto, ed utilizzato anche in questo momento per comunicare quanto stiamo indagando, le motivazioni appena viste ci fanno desiderare di costruire un linguaggio che funzioni almeno altrettanto bene quanto la notazione araba per i numeri naturali, ma esteso ad un campo ben piu' largo. Certo non possiamo pensare ad un linguaggio omnicomprensivo per i motivi gia' detti riguardo ai linguaggi naturali, e ci accontenteremo di un linguaggio in grado di descrivere situazioni matematiche.

Ovviamente, non vogliamo che il linguaggio formale arrivi ad esprimere e dedurre (cioe' controllare come accettabile) una qualsiasi stupidaggine, eventualmente una contraddizione. Attenzione, pero', che, proprio a causa di questo desiderio, nello studio di un linguaggio formale non e' sufficiente determinare cosa appartiene al linguaggio, cosa si deduce, cosa e' vero, ma anche cosa non appartiene al linguaggio, cosa non si deduce, cosa non e' vero; ed il problema (come tutti i problemi di impossibilita') cambia ordine di difficolta'.

I problemi di impossibilita' non hanno una risposta assoluta, ma dipendono dagli strumenti concessi per la soluzione, che vanno precisati, perche' e' rispetto ad essi che la soluzione puo' esserci o meno. Si pensi ad esempio al classico problema della quadratura del cerchio che non ha soluzioni con riga e compasso, ma che si risolve facilmente disponendo del passaggio al limite; o al problema di trovare le soluzioni dell'equazione x^2-c=0 che, al variare di c tra 4, 2,-1, ha o non ha soluzioni in funzione del campo numerico in cui si cercano tali soluzioni.

Cosi', nel nostro caso, bisognera' precisare quali sono gli strumenti concessi, e il linguaggio comune, vivo ed in continua evoluzione, non e' adatto per questo studio. Abbiamo bisogno di un linguaggio ben precisato, al limite un oggetto artificialmente costruito, ma che si comporti come un linguaggio, cioe' sia almeno in grado di descrivere situazioni. Siamo tornati cosi' a sentir bisogno dello studio dei limiti e delle potenzialita' di un linguaggio oggetto opportunamente costruito per le nostre esigenze, e qui l'enfasi e' sul linguaggio costruito per le nostre esigenze, o, come si usa dire, un linguaggio formale.

2. LE STRUTTURE.

Vistane l'esigenza, passiamo ora all'introduzione di un linguaggio artificialmente costruito. Almeno inizialmente, ci si limita a linguaggi atti a descrivere situazioni. Ma prima ancora di vedere cosa cio' significhi e comporti, rimarchiamo una caratteristica che il linguaggio deve avere: deve essere sempre possibile riconoscere in modo effettivo le sue espressioni, che dovranno essere di lunghezza finita.

Cerchiamo ora di analizzare ora cosa vuol dire descrivere una situazione.

Astraendo il piu' possibile dalle particolarita' di ogni singola situazione per offrire un concetto utilizzabile al massimo, si puo' dire che in ogni situazione ci sono degli elementi, degli oggetti tra i quali ci sono delle relazioni che ci interessano.

Ecco dunque il concetto di **struttura** (che vuole cogliere quanto c'e' in comune tra le varie situazioni): una struttura $\mathfrak{A}$ e' una coppia ordinata il cui primo elemento e' un insieme non vuoto (per non banalizzare il tutto) A, detto **universo** (in cui sono raccolti gli oggetti della situazione), e il cui secondo elemento e' un insieme non vuoto $\mathcal{R}$ di **relazioni** R su A, ciascuna con la sua arieta' maggiore di zero, cioe' sottinsiemi del prodotto cartesiano di A con se' stesso tante volte quante viene specificato dall'arieta' della relazione (queste sono le relazioni che ci interessano nella situazione). Cosi' la relazione R di arieta' n e' un insieme di n-uple ordinate di elementi che appartengono ad A.

Si noti subito che abbiamo appena introdotto i nomi $\mathfrak{A}$ per la struttura, A per l'universo, $\mathcal{R}$ per l'insieme delle relazioni che ci interessano, R per una generica relazione di questo insieme, ma tutti questi nomi non sono simboli del linguaggio che vogliamo costruire, ma sono nomi nel linguaggio, diciamolo esterno, che usiamo per descrivere sia una struttura, che un linguaggio artificiale e i rapporti tra questi, linguaggio esterno che nel nostro caso e' l'italiano arricchito di alcuni simboli e che, come gia' detto, viene chiamato metalinguaggio.

Si noti anche che la conoscenza del metalinguaggio deve essere presupposta alla conoscenza del linguaggio artificiale che costruiremo, e che questo, dunque, non potra' essere utilizzato a fondamento del comportamento del metalinguaggio (avremo modo di tornare su questa osservazione in vari momenti).

Spesso tra le relazioni si suole mettere in evidenza quelle particolari relazioni che sono le **funzioni** n-arie totali, cioe' le relazioni (n+1)-arie tali che comunque scelti ordinatamente n elementi dell'universo c'e' un unico elemento che ultimo dopo gli altri n costituisce una (n+1)-upla ordinata della relazione; tali relazioni vengono dette totali e univoche. Per tali relazioni, si usa considerare l'operazione di applicazione ad un'n-upla ordinata, che e' l'operazione che ad una qualsiasi n-upla ordinata di elementi dell'universo associa l'elemento dell'universo, che, considerato come (n+1)-esimo dopo gli altri n, da' un'(n+1)-upla ordinata che e' un elemento della relazione: tale elemento e' anche detto l'immagine dell'n-upla ordinata data attraverso la funzione. L'arieta' delle funzioni puo' essere anche 0 (allora la funzione e' una relazione totale univoca 1-aria), e in tal caso la funzione e' un insieme ordinato con un solo elemento che appartiene all'universo, e viene chiamata **costante individuale** perche' mette in evidenza un particolare elemento dell'universo. In questo caso la funzione si applica solo alle 0-uple (che non esistono), e l'immagine attraverso la funzione e' l'unico elemento associato.

Separando le funzioni totali dalle relazioni e le costanti dalle funzioni, una struttura $\mathfrak{A}$ diventa una quaterna ordinata $(A,\mathcal{R},\mathcal{F},\mathcal{C})$ il cui primo elemento e' l'insieme non vuoto A, detto universo, il secondo elemento e' l'insieme non vuoto $\mathcal{R}$ delle relazioni su A che si vogliono considerare nella struttura privato di quelle che considereremo tra le funzioni totali (questo insieme non include necessariamente tutte le relazioni su A, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura), il terzo elemento (eventualmente vuoto) e' l'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni totali su A che si vogliono considerare nella struttura che non sono costanti individuali (come prima, questo insieme non include necessariamente tutte le funzioni totali su A non 0-arie, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura), e il quarto e' l'insieme $\mathcal{C}$ (eventualmente vuoto) delle costanti individuali che si vogliono considerare nella struttura, che sono particolari elementi di A (ancora, questo insieme non include necessariamente tutte le funzioni totali 0-arie, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura).

3. IL LINGUAGGIO.

Per descrivere il comportamento della struttura introduciamo un linguaggio adatto. Poiche' vogliamo considerare le strutture nella loro generalita', non abbiamo alcuna informazione specifica sul eventuali caratterizzazioni o rapporti tra le relazioni e sulle funzioni della struttura, dobbiamo prenderle come elementi non definiti (qui per definire si intende precisare mediante una frase che usa altre parole il cui significato e' gia' noto), primitivi come si suol dire, per indicare i quali sara' necessario un apposito simbolo del linguaggio. Pertanto iniziamo con l'introdurre nel linguaggio almeno un simbolo, che chiameremo **predicato**, in corrispondenza di ciascuna relazione della struttura, almeno un simbolo, che chiameremo **simbolo per funzione**, in corrispondenza di ciascuna funzione della struttura e almeno un simbolo, che chiameremo **simbolo per costante**, in corrispondenza di ciascuna costante della struttura, i simboli di quest'ultimo tipo possono anche essere detti i nomi dei corrispondenti elementi dell'universo che sono le costanti. A ciascun simbolo cosi' introdotto sara' associata' un'arieta' uguale a quella del predicato o della funzione a cui corrisponde (si ricordi che le costanti sono funzioni di arieta' zero). (Vedremo in seguito l'uso dell'arieta' dei simboli). Un tal linguaggio verra' detto **adatto** o **adeguato** alla struttura.

Iniziamo anche ad indicare come si interpretano gli elementi del linguaggio, cioe' qual'e' il loro significato, cominciando da quelli finora introdotti: i predicati si interpretano nelle relazioni a cui corrispondono, i simboli per funzione si interpretano nelle funzioni a cui corrispondono e i simboli per costante si interpretano nelle costanti a cui corrispondono.

Interrompiamo subito le indicazioni di come assegnare un significato agli elementi del linguaggio per sottolineare un fatto molto importante. Siamo partiti da una struttura e cerchiamo di costruire un linguaggio adatto a descrivere cio' che avviene nella struttura. Ma lo stesso linguaggio e' adatto anche a descrivere cio' che avviene in altre strutture che hanno una certa analogia con quella data. Anzi questa possibilita' deve essere una caratteristica del linguaggio che stiamo costruendo. Cerchiamo di giustificare queste ultime affermazioni presentando delle situazioni concrete che ne facciano emergere l'esigenza.

Sono molte, e tra loro diverse, le relazioni che si dicono uguaglianza nel linguaggio comune. Ad esempio, spesso si dice che due oggetti sono uguali per dire che hanno certe caratteristiche in comune pur essendo oggetti diversi. Anche se ciascuna relazione che chiamiamo uguaglianza sussiste tra due individui esattamente se tra questi ci sono delle ben precisate caratteristiche in comune, eventualmente quella di essere lo stesso elemento dell'universo, esse differiscono tra loro per l'insieme degli elementi a cui si applicano, o anche per quali caratteristiche devono essere condivise tra due elementi. Cosi' si suole usare sempre lo stesso simbolo nel linguaggio artificiale in costruzione per indicare le varie relazioni che chiamiamo uguaglianza, ma quel simbolo, che e' un predicato binario, sara' fatto corrispondere a (diremo interpretato in) relazioni diverse nelle varie strutture.

Pensiamo all'operazione addizione: e' una funzione binaria che e' diversa al variare dell'ambito numerico in cui viene considerata. Anche se l'operazione di addizione tra naturali e' diversa da quella tra razionali, ad esempio, tuttavia le analogie presenti ci consigliano di usare lo stesso nome per entrambe le operazioni. Cosi' quel simbolo sara' fatto corrispondere a funzioni binarie diverse nelle diverse strutture.

Ancora, a volte si vuol cogliere l'analogia di comportamento tra varie relazioni. Ad esempio si puo' voler considerare la relazione di immediato successore tra numeri naturali quasi come una generazione ed usare, in modo figurato, la relazione di figliolanza tra numeri dicendo ad esempio che tre e' figlio di due. Questo uso in modo figurato di nomi si realizza dando allo stesso elemento del linguaggio interpretazioni diverse in strutture diverse.

Anche se negli esempi considerati ci sono dei particolari legami tra relazioni o funzioni in diverse strutture a cui si fa corrispondere lo stesso simbolo, non e' opportuno richiedere la presenza di questi legami perche' cio' limiterebbe, artificiosamente e dall'esterno, il modo di interpretare (assegnare un significato ai simboli, cioe' far corrispondere ai predicati una relazione, ai simboli di funzione una funzione, ai simboli di costanti una costante mantenendo l'arieta') un linguaggio.

C'e' un altro ordine di motivazioni che giustificano il fatto che un simbolo possa essere interpretato in vari modi. Qualsiasi linguaggio e' uno strumento comunicativo, e, anche se si vuole considerare un linguaggio atto a descrivere una situazione, oltre a chi descrive c'e' anche chi riceve la comunicazione, e questi dovrebbe farsi un'idea della situazione dalla descrizione. Ma perche' l'immagine che l'ascoltatore si costruisce della situazione dalla descrizione delle stessa dovrebbe coincidere con la situazione descritta? A priori bisogna supporre che l'immagine che l'ascoltatore si fa possa corrispondere ad una diversa interpretazione dei simboli del linguaggio. L'usuale esperienza di fraintendimenti conferma la possibilita' di diverse interpretazioni, anche se si potrebbe auspicare che un linguaggio opportunamente costruito debba permettere di individuare univocamente l'interpretazione voluta. Alla fine vedremo che cio' e' chiedere troppo poiche' dimostreremo che un linguaggio non puo' individuare univocamente una interpretazione che abbia un universo infinito.
Cosi' il linguaggio artificiale che stiamo costruendo non avra' solo l'interpretazione, in qualche modo privilegiata, che rende quel linguaggio atto a descrivere cio' che avviene nella struttura oggetto della nostra attenzione, ma potra' essere interpretato anche in altre strutture. Per queste ulteriori interpretazioni bisognera' specificare, oltre l'universo, quali relazioni, quali funzioni e quali costanti sono associate a ciascun predicato, a ciascun simbolo di funzione e a ciascun simbolo di costante rispettivamente, e gli enti corrispondentisi nel linguaggio e nella struttura dovranno avere la stessa arieta'. Sicche' ci sara' un legame tra le varie strutture in cui puo' essere interpretato un certo linguaggio, che e' il seguente: il linguaggio e' adatto per ciascuna di quelle strutture (come detto, un linguaggio e' adatto ad una struttura se c'e' una corrispondenza che associa ad ogni predicato una relazione, ad ogni simbolo di funzione una funzione, ad ogni simbolo per costante una costante mentenendo l'arieta'). In un certo senso possiamo dire che non solo un linguaggio e' adatto a tutte le strutture che si prestano ad essere descritte con quel linguaggio, ma anche che quelle strutture sono adatte a quel linguaggio. Sicche' la relazione tra strutture e linguaggi di essere adatti uno per l'altra puo' essere considerata simmetrica. Cosi' possiamo parlare di strutture adatte allo stesso linguaggio, invece che di unico linguaggio adatto a piu' strutture. Due strutture adatte per lo stesso linguaggio si dicono **strutture dello stesso tipo**.

4. I TERMINI.

Abbiamo detto che ciascun simbolo per costante puo' essere considerato il nome della corrispondente costante. Attraverso le funzioni e i loro simboli, si puo' cercare di dar un nome anche ad altri elementi dell'universo che non sono costanti (l'immagine di funzioni 0-arie) della struttura: questo metodo ci e' noto e lo usiamo ad esempio quando indichiamo il numero 1 come il successore di 0, oppure una certa persona come il padre di un'altra. In effetti, se si applica una funzione n-aria ad un'n-upla di elementi dell'universo si ottiene un elemento dell'universo. Possiamo allora pensare di dare un nome a quell'elemento dell'universo sfruttando il simbolo per la funzione e i nomi per ciascuno degli elemento dell'n-upla. Di fatto dobbiamo anzitutto precisare un uso sintattico del simbolo di funzione, cioe' come debba entrare in scritture (successioni finite di simboli) assieme ad altri simboli. Ricordiamo subito che le funzioni hanno una certa arieta': essa dovra' essere anche un elemento caratterizzante l'uso del simbolo per quella funzione per cogliere la dimensione della successione a cui e' applicata la funzione. Cosi' decidiamo che un simbolo di funzione debba essere seguito da tanti nomi di individui quanti sono previsti dall'arieta' del simbolo di funzione, che e' la stessa dell'arieta' della funzione a cui il simbolo e' associato.
Si sara' notato che e' nostra intenzione ottenere nuovi nomi per elementi facendo seguire al simbolo per funzione nomi per elementi, ma non sappiamo cosa siano in generale i nomi per elementi. Sembra che ci sia una certa circolarita' in quanto stiamo per definire. Ma non e' cosi' perche' possiamo partire da quei nomi per elementi che sono i simboli per costante, ed ottenerne degli altri usando il metodo che stiamo delineando, ottenuti i

quali si puo' riapplicare il metodo a quanto si ha a disposizione ora per ottenerne degli altri ancora, e cosi' via iterando la procedura. Cio' ci porta a dare una definizione ricorsiva di questi primi nomi per elementi, che chiameremo **termini** (piu' avanti introdurremo altri termini). Ciascun simbolo per costante e' un termine; e, se f e' un simbolo di funzione n-ario e $t_1,..,t_n$ sono successioni finite di simboli gia' riconosciute come termini, allora anche f seguito prima dai simboli che costituiscono t_1, poi dai simboli che costituiscono $t_2,...$, ed infine dai simboli che costituiscono t_n (che indicheremo come $ft_1... t_n$) e' un termine. Si noti che $t_1,..,t_n$ non sono simboli del linguaggio che si sta costruendo, ma indicano successioni finite di simboli di detto linguaggio.

Vediamo ora di interpretare nella struttura data, dare significato a, queste prime scritture che abbiamo chiamato termini. L' interpretazione in una certa struttura $\mathfrak{A}$ di un termine che sia un simbolo per costante e' la costante a cui quel simbolo e' associato nella struttura $\mathfrak{A}$, e dunque un elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. L'interpretazione del termine $ft_1...t_n$ e' quell'elemento a dell'universo di $\mathfrak{A}$ che e' immagine attraverso la funzione F, interpretazione in $\mathfrak{A}$ del simbolo f (cioe' la funzione di $\mathfrak{A}$ cui e' associato il simbolo f), dell'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ che sono le interpretazioni in $\mathfrak{A}$ dei termini $t_1,..., t_n$, cioe', se indichiamo con $(\ )^{\mathfrak{A}}$ l'operazione di interpretazione nella struttura $\mathfrak{A}$, $(ft_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=(f)^{\mathfrak{A}}((t_1)^{\mathfrak{A}},.., (t_n)^{\mathfrak{A}})=F(a_1,...,a_n)=a$.

Chiaramente, anche questa e' una definizione ricorsiva che ha la sua base nell'interpretazione in $\mathfrak{A}$ dei termini che sono simboli per costanti: se $\underline{c}$ e' un simbolo per costante che nella struttura A e' associato alla costante c, allora $(\underline{c})^{\mathfrak{A}}=c$.

5. LE FORMULE ATOMICHE.

Vediamo ora di esprimere, attraverso il linguaggio, il fatto che una n-upla appartenga ad una certa relazione n-aria, o, come si usa dire, che soddisfi quella relazione.

Abbiamo gia' introdotto i predicati, simboli per le relazioni. Per un motivo del tutto analogo a quello visto per i simboli per funzioni, anche ai predicati abbiamo assegnato un'arieta', quella della relazione a cui corrispondono.

Per ora ci accontentiamo di esprimere, nel linguaggio che stiamo costruendo, quando un'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi, non qualsiasi ma che abbiano nome, soddisfi o meno una relazione n-aria R, vogliamo cioe' esprimere un legame tra una tale n-upla ed una relazione. Per fare cio' cominciamo col convenire di usare la scrittura $Pt_1...t_n$ (cioe' la scrittura che inizia con il simbolo P, seguito dai simboli che costituiscono t_1, ..., seguiti dai simboli che costituiscono t_n) dove P e' il predicato che si interpreta nella struttura $\mathfrak{A}$, nella relazione R, $t_1,..,t_n$ sono termini che si interpretano in $\mathfrak{A}$ negli elementi $a_1,...,a_n$ dell'universo di $\mathfrak{A}$, ed n e' l'arieta' della relazione e del predicato corrispondente.

Chiameremo **formula atomica** una scrittura del tipo $Pt_1...t_n$: un predicato seguito da tanti termini quanti sono indicati dall'arieta' del predicato.

Si noti che anche una formula atomica e' una successione finita di simboli del linguaggio $\mathfrak{L}$.

Ci si pone ora il problema di interpretare la scrittura $Pt_1...t_n$, di darle significato.

Siamo abituati a dire che una affermazione e' vera quando le cose stanno esattamente come l'affermazione le descrive, e potremmo adottare questa terminologia anche nel caso del linguaggio artificiale che stiamo cercando di costruire. Avevamo detto che il nostro vuol essere un linguaggio per descrivere situazioni, ed ora siamo proprio al punto di affermare se quanto dice l'espressione del nostro linguaggio descrive o meno un aspetto della situazione.

Proponiamo di dire che la scrittura $Pt_1..t_n$ e' **vera** in una struttura $\mathfrak{A}$ se l'n-upla dei significati in $\mathfrak{A}$ dei termini $t_1,..,t_n$ appartiene alla relazione che e' l'interpretazione in $\mathfrak{A}$ del predicato P, altrimenti diremo che e' **falsa**; cioe' $(Pt_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=V$ se $((t_1)^{\mathfrak{A}},...,(t_n)^{\mathfrak{A}}) \in (P)^{\mathfrak{A}}$, mentre $(Pt_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=F$ se $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}}) \notin (P)^{\mathfrak{A}}$. V ed F sono i segni metalinguistici che useremo per indicare il vero e il falso rispettivamente.

Si noti che V ed F non appartengono al linguaggio artificiale che stiamo introducendo, chiamiamolo $\mathfrak{L}$, ma sono abbreviazioni dell'italiano, linguaggio che stiamo usando per parlare della sintassi e della semantica (il modo di interpretare gli elementi della sintassi) delle espressioni linguistiche di $\mathfrak{L}$.

Ancora un'osservazione su qual'e' l'accezione della parola vero che stiamo usando. In italiano questa parola ha vari significati, tra i quali due emergono in particolar modo.

In una prima accezione si parla di vero, del vero perche', quando si vuole individuare il motivo principale, forse determinante, che ha generato una certa situazione.

In una seconda accezione si parla di vero, di cercare il vero, quando non si sa come stanno le cose e lo si vorrebbe scoprire: e' la verita' del giudice che cerca di scoprire come si sono svolti i fatti avendo a disposizione delle informazioni a volta anche contraddittorie. In questa circostanza il giudice si chiede qual'e' la verita', volendo domandarsi cosa e' avvenuto di fatto. In questo caso il linguaggio non e' coinvolto nel concetto di verita'. Questa riguarda solo dei fatti: si tratta di individuare, tra i fatti riportati dai testimoni, quelli che sono effettivamente accaduti.

Ben diverso e' il significato nella terza accezione che considereremo. Sappiamo che si puo' cercare di nascondere ad altri il motivo di una scelta personale e giustificarla con delle scuse, cioe' delle motivazioni corrette e plausibili ma che non sono la vera motivazione, quella che ha provocato la scelta fatta. Ecco un altro significato della parola vero: qui sta ad indicare la motivazione che ha determinato una scelta.

Cosi' l'alternativa nello scegliere che significato dare alla parola verita' e' almeno tra i seguenti significati: motivo determinante, ricerca di come stanno le cose, e descrizione fedele di aspetti di una situazione nota.

L'uso che si fara' qui della parola vero sara' il seguente: diremo vera una espressione del linguaggio se racconta i fatti esattamente come sono: questa e' la verita' del notaio che attesta e dichiara cio' che conosce. Nel caso che stiamo ora considerando, i fatti devono essere completamente conosciuti, e anche quando non lo saranno supporremo che lo siano. Inoltre la verita' si attribuisce ad un'espressione del linguaggio (e non ai fatti) di cui si deve conoscere l'interpretazione in una ben precisata struttura, e si dira' che quell'espressione e' vera in quell'interpretazione in quella struttura esattamente nel caso in cui cio' che afferma e' proprio come stanno effettivamente i fatti collegati all'espressione dall'interpretazione nella struttura, fatti che, ripeto, devono essere supposti perfettamente noti.

Nel proporre di accettare qui l'accezione appena precisata della nozione di vero, chiaramente compiamo una ben precisa scelta che coinvolgera' gli sviluppi successivi. La logica studiata oggi non si limita al caso scelto, cioe' all'ipotesi che la situazione sia completamente nota, ma quello scelto e' l'ambito della logica classica, e ritengo che sia opportuno farsi un'idea piu' precisa di cosa sia la logica classica prima di passare alle logiche non classiche.

Abbiamo cosi' precisato un po' meglio cosa intendiamo per vero (e di conseguenza anche per falso), che e' il significato di una formula atomica.

6. LE FORMULE.

Ma una formula atomica si limita a descrivere un aspetto della struttura in considerazione, mentre, in genere, sono molti gli aspetti di una struttura che vogliamo descrivere. Per far fronte a tale molteplicita' di aspetti, dovremo usare varie affermazioni, magari combinandole in un'unica espressione. E' chiaro che anche il significato di quell'unica espressione, ottenuta componendone altre, dovra' essere il vero o il falso a seconda che l'espressione descriva la situazione come in effetti e' o meno. Chiamiamo **formule** queste espressioni del linguaggio $\mathfrak{L}$. Le formule atomiche saranno particolari formule e il significato di una qualsiasi formula, atomica o non atomica, dovra' essere o il vero o il falso.

Poiche' una formula dovrebbe essere la combinazione in un'unica espressione di formule che colgono solo particolari aspetti, e quanto essa descrive dipende da cosa descrivono le componenti e da come sono combinate, si vuole che il valore di verita' (l'essere vera o falsa) di una formula, cioe' il suo significato, dipenda da quali sono i valori di verita' delle formule che la compongono e da come sono combinate tra loro, e soltanto da cio'.

Evidentemente ci sono vari modi di combinare tra loro n-uple di valori di verita' per ottenere corrispondenti valori di verita'. Cosi', nello scrivere una formula che vuole combinare in un'unica espressione varie espressioni parziali, bisognera' avere una notazione per indicare quale modo di combinare i valori di verita' delle varie espressioni parziali si adotta per ottenere il valore di verita' dell'espressione complessiva.

Il modo di mettere assieme dei valori di verita' per ottenere un valore di verita' deve andar bene qualunque siano le componenti, e, percio', deve essere precisato qualunque siano i valori di verita' delle componenti.

Poiche' i valori di verita' sono solo due (V e F) e vogliamo combinare in una formula un prefissato numero finito n di componenti, i possibili modi di mettere assieme dei valori di verita' per ottenere dei valori di verita' sono in numero finito, e precisamente tanti quanti sono i modi di associare dei valori di verita' ad n-uple di valori di verita', cioe' tanti quante sono le funzioni da n-uple di valori di verita' nei valori di verita', ovverosia $2^{(2^n)}$, perche' 2^n sono le n-uple di valori di verita'. Poiche' i modi di mettere assieme n valori di verita' per ottenere dei valori di verita' sono, per ciascun numero naturale n nel numero finito calcolato, ci vorrebbe una quantita' numerabile di nomi per indicare queste funzioni sui valori di verita', ma non riserveremo un nome per quelle funzioni che possano essere generate da altre e che non siano di uso frequente.

Chiameremo **connettivi** i simboli, che aggiungiamo al linguaggio artificiale in costruzione $\mathfrak{L}$, che saranno nomi di funzioni da n-uple di valori di verita' nei valori di verita', e l'interpretazione di un connettivo sara' la funzione di cui e' nome.

Cominciamo a considerare le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ quando n e' 1. Esse sono quattro e possono essere descritte mediante la seguente tavola che dice, per ciascuna delle quattro funzioni, quale valore di verita' la funzione associa al valore di verita' della componente.

	f_1'	f_2'	f_3'	f_4'
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Notiamo che la funzione f_2' e' la funzione identica ed e' inutile avere un nome per essa: al posto della formula composta basta tenere la componente. Inoltre si potra' vedere, dopo l'introduzione delle funzioni binarie, che le funzioni f_1' e f_4' possono essere generate da altre funzioni, percio' non vale la pena di introdurre un nome neppure per queste. Infine, la funzione f_3' e' quella che scambia i valori di verita' ed ha un comportamento come l'usuale accezione del "non" in italiano: per essa sceglieremo il simbolo $\neg$, simbolo che verra' letto "non" ed interpretato, appunto, nella funzione f_3.

Consideriamo ora le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ quando n e' 2. Sono 16 e, come prima, possono essere rappresentate mediante una tavola

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

La funzione f_2 ha un comportamento che ci ricorda quello del significato piu' usuale della disgiunzione "o" in italiano. Le assegniamo il simbolo $\vee$, simbolo che chiamiamo "o" e che interpretiamo nella funzione f_2.

La funzione f_8 ha un comportamento che ci ricorda quello del significato piu' usuale della congiunzione "e" in italiano. Le assegniamo il simbolo $\wedge$, simbolo che chiamiamo "e" e che interpretiamo nella funzione f_8.
Anche la funzione f_5 ha un comportamento particolare. Esso ci ricorda quello del significato abbastanza usuale, in italiano, della locuzione "se ... allora ...", o della locuzione "ogniqualvolta ... allora succede anche che ...", oppure anche di una certa accezione della parola "implica". Attenzione che spesso, in italiano, implica indica una conseguenza, una causalita': qui non c'e' niente di questo, il linguaggio artificiale che stiamo costruendo vuole solo descrivere situazioni, dire come stanno le cose, cosa succede quando altre cose succedono, senza darne i perche' ne' una qualsiasi motivazione. Assegniamo alla funzione f_5 il simbolo $\rightarrow$, simbolo che chiamiamo "implica" e che interpretiamo nella funzione f_5.
Una ulteriore funzione a cui spesso si da un nome e' la f_7. Il suo comportamento ricorda quello della locuzione in italiano "se e solo se", ma ancora nell'accezione puramente descrittiva, senza alcuna intenzione di causa reciproca tra due affermazioni. Assegniamo alla funzione f_7 il simbolo $\leftrightarrow$, simbolo che chiamiamo "equivalente a" e che interpretiamo nella funzione f_7.
Non ci interessa andare oltre nell'attribuzione di nomi alle funzioni indicate nelle due tabelle perche' si dimostra che esse sono tutte generabili o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\vee$, o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\wedge$, o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. Si puo' fare anche di meglio: ciascuna delle funzioni f_9 e f_{15} , a cui assegnamo i simboli $|$ e $|'$ rispettivamente, da sola genera tutte le funzioni delle due tabelle. Ma, usando una di queste due ultime funzioni, la lettura diverrebbe tanto difficoltosa da sconsigliare la loro adozione.
Per dimostrare il risultato appena menzionato si fa vedere che le funzioni di simboli $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$ sono ottenibili dalle coppie di funzioni o dalle singole funzioni sopra esposte, e poi si dimostra che ogni altra funzione dalle coppie di valori di verita' nei valori di verita' si ottiene dalle tre di simboli $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$. Per la prima parte sono sufficienti le seguenti uguaglianze:

$$\wedge(x_1,x_2)=\neg(\vee(\neg(x_1),\neg(x_2))),\ \vee(x_1,x_2)=\neg(\wedge(\neg(x_1),\neg(x_2))),\ \wedge(x_1,x_2)=\neg(\rightarrow(x_1,\neg(x_2))),$$
$$\vee(x_1,x_2)=\rightarrow(\neg(x_1),x_2),$$
$$\neg(x_1)=|(x_1,x_1),\ \neg(x_1)=|'(x_1,x_1),$$
$$\wedge(x_1,x_2)=|(|(x_1,x_2),|(x_1,x_2)),\ \vee(x_1,x_2)=|'(|'(x_1,x_2),|'(x_1,x_2)),$$

dove x_1 e x_2 sono variabili sui valori di verita' e si e' usata la solita notazione per le funzioni e la composizione di funzioni nel metalinguaggio. La prima uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ e' ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\vee$ (ovviamente $\neg$ ed $\vee$ sono ottenibili da loro stesse e non ripeteremo osservazione di questo tipo nel seguito). La seconda uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ e' ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\wedge$. La terza uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ e' ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. La quarta uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ e' ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. La quinta e la sesta uguaglianza mostrano che la funzione di simbolo $\neg$ e' ottenibile sia dalla funzione di simbolo $|$ che dalla funzione di simbolo $|'$. La settima uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ e' ottenibile dalla funzione di simbolo $|$. L'ottava uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ e' ottenibile dalla funzione di simbolo $|'$. Cio' completa la prima parte, mentre la seconda sara' affrontata dopo la prossima osservazione.
Le funzioni di simboli $\wedge$ ed $\vee$ sono sia associative che commutative, sicche' avra' senso usare non ambiguamente le notazioni $\wedge(x_1,\ldots,x_n)$ e $\vee(x_1,\ldots,x_n)$, pur essendo $\wedge$ ed $\vee$ simboli di funzioni binarie, intendendo con queste notazioni ad esempio $\wedge(x_1,\wedge(x_2,\wedge(\ldots,\wedge(x_{n-1}, x_n)\ldots)))$ e $\vee(x_1,\vee(x_2,\vee(\ldots,\vee(x_{n-1}, x_n)\ldots)))$ rispettivamente. Cosi' $\wedge$ ed $\vee$ sono divenuti anche simboli per particolari funzioni n-arie dai valori di verita' nei valori di verita', che pero' sono ottenibili dalle funzioni binarie di simboli $\wedge$ ed $\vee$. Si osservi che la funzione n-aria $\wedge$ associa V solo all'n-pla costituita da soli V, mentre la funzione n-aria $\vee$ associa F solo all'n-pla costituita da soli F.

Per quanto riguarda poi le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ con $n>2$, ma anche per $n>0$, si dimostra che esse sono tutte generabili dalle funzioni $\neg$, $\wedge$, $\vee$, e percio' anche dalle funzioni che generano queste, per cui non introdurremo nel linguaggio $\mathfrak{L}$ alcun altro nuovo

simbolo in corrispondenza a tali funzioni che possono essere generate.
Per dimostrare questa affermazione si consideri, per un numero naturale n scelto ad arbitrio, una funzione n-aria f dai valori di verita' nei valori di verita'. Si indichi con $(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n)$ una n-upla di valori di verita' tale che $f(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n)=V$. Si considerino poi le funzioni unarie g_i, i=1,...,n, tali che g_i e' la funzione identica se a_i e' V mentre g_i e' la funzione di simbolo $\neg$ se a_i e' F. Si noti che la funzione n-aria

$$f_{a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n}(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)=\wedge(g_1(x_1),g_2(x_2),...,g_{n-1}(x_{n-1}),g_n(x_n))$$

da' V se e solo se alle variabili $x_1,x_2,...,x_i,...,x_{n-1},x_n$ vengono attribuiti i valori di verita' $a_1,a_2,...,a_i,..., a_{n-1},a_n$ rispettivamente. Si consideri la funzione n-aria ottenuta applicando la funzione di simbolo $\vee$ di arieta' opportuna alle funzioni n-arie $f_{a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n}$ di indici tali che $f(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n)=V$. La funzione cosi' ottenuta e' uguale alla funzione f poiche' a ciascuna n-upla di valori di verita' le due funzioni associano lo stesso valore di verita'.

A causa si questi risultati decidiamo di inserire nel linguaggio artificiale $\mathfrak{L}$, che si sta costruendo, solo i simboli $\neg$ ed $\wedge$, che, come detto, chiameremo connettivi.
Si noti che, al contrario dei predicati e dei simboli per funzioni e per costanti il cui numero e arieta' cambia a secondo del tipo di struttura per cui il linguaggio e' adatto, e la cui interpretazione cambia da struttura a struttura, i connettivi sono sempre gli stessi in ogni linguaggio e hanno sempre la stessa interpretazione in ogni struttura: pertanto saranno detti **costanti logiche**, mentre i primi simboli, che variano da linguaggio a linguaggio, saranno detti **simboli propri**.
Abbiamo introdotto i connettivi per poter combinare assieme delle formule in nuove formule, vediamo finalmente come fare cio', dal punto di vista sintattico (prima avevamo solo espresso il desiderio di ottenere qualcosa, le formule, che avesse un certo comportamento).
Cosi' definiamo cosa intendiamo per **formula**.
Anzitutto le formule atomiche saranno formule, e poi, se φ e ψ sono scritture (successioni finite di simboli) gia' riconosciute come formule, allora anche $\neg\varphi$ e $\wedge\varphi\psi$ sono formule. Questa e' chiaramente una definizione ricorsiva (che lasciamo aperta perche' in seguito vorremo aggiungere altre formule) e per la quale valgono osservazioni analoghe a quelle gia' presentate per la definizione di termine.
In altre trattazioni, queste formule vengono scritte, con notazione infissa, come $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, ma allora ci vorrebbero le parentesi tra i simboli del linguaggio, cosa che non e' necessaria, senza perdere in univocita' di lettura, con la notazione prefissa precedente che abbiamo adottato. Con questa seconda scrittura e' piu' facile la lettura delle formule, anche se permangono opportune delle convenzioni sulla eliminazione delle parentesi, che altrimenti diventano troppo ingombranti. Inoltre spesso si usano anche le scritture

$$\vee\varphi\psi,\ \rightarrow\varphi\psi,\ \leftrightarrow\varphi\psi,$$

al posto delle scritture

$$\neg\wedge\neg\varphi\neg\psi,\ \neg\wedge\varphi\neg\psi,\ \wedge\neg\wedge\varphi\neg\psi\neg\wedge\psi\neg\varphi$$

rispettivamente, e le scritture $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ per indicare le prime Sicche' adotteremo questo criterio: useremo le scritture introdotte (con le usuali convenzioni sulle parentesi) come scritture nel metalinguaggio per indicare le corrispondenti scritture nel linguaggio $\mathfrak{L}$ (che cosi' non avra' parentesi).
L'interpretazione di una formula puo' essere definita ancora ricorsivamente. L'interpretazione delle formule atomiche e' gia' stata data. L'interpretazione delle formule del tipo $\neg\varphi$ e' il vero se l'interpretazione della formula φ e' il falso, il falso altrimenti. L'interpretazione delle formule del tipo $\varphi\wedge\psi$ e' il vero se le interpretazioni di φ e ψ sono entrambe il vero, il falso altrimenti.
Usando la simbologia $(\ )^{\mathfrak{A}}$ per indicare l'operazione di interpretazione nella struttura $\mathfrak{A}$ le clausole precedenti possono essere riscritte cosi':

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}}=(\neg)^{\mathfrak{A}}((\varphi)^{\mathfrak{A}})=f_3'((\varphi)^{\mathfrak{A}});$$
$$(\varphi\wedge\psi)^{\mathfrak{A}}=(\wedge)^{\mathfrak{A}}((\varphi)^{\mathfrak{A}},(\psi)^{\mathfrak{A}})=f_8((\varphi)^{\mathfrak{A}},(\psi)^{\mathfrak{A}});$$

L'interpretazione delle altre scritture che abbiamo deciso essere abbreviazioni si ottiene interpretando la formula non abbreviata indicata da ciascuna di tali scritture, cioe' interpretando la corrispondente formula di $\mathfrak{L}$.

Osserviamo ancora che le definizioni dei connettivi del linguaggio artificiale in costruzione $\mathfrak{L}$ sono state possibili grazie alla conoscenza dei connettivi in italiano, che e' il metalinguaggio che stiamo usando per descrivere il linguaggio. Ad esempio per individuare la funzione f_8, che e' l'interpretazione di $\wedge$, si deve dire che e' la funzione che se applicata alla coppia (V,V) allora da' V e se applicata alle coppie ordinate di valori di verita' che non sono (V,V) allora da' il falso: si sono sottolineate le due occorrenze del connettivo se...allora l'occorrenza del connettivo non e l'occorrenza del connettivo e nel metalinguaggio per definire la funzione f_8, se il significato di tali connettivi non fosse gia' noto nel metalinguaggio, non si potrebbe sapere chi e' la funzione f_8. Pertanto e' assurda ogni pretesa di fondazione del significato dei connettivi a partire dalle tavole viste precedentemente (che vengono chiamate tavole di verita').

Cio' non vuol dire che le tavole di verita' non possano essere utili, magari per aiutare la comprensione del linguaggio naturale. Infatti esse colgono il comportamento dei connettivi anche in certe accezioni usate nel linguaggio naturale, e cosi' possono permettere un facile controllo anche di espressioni complesse del linguaggio naturale, magari per poterle riformulare in forma equivalente.

Le tavole di verita' non sono che un facile modo per descrivere delle funzioni totali sui valori di verita'. Ci si potrebbe domandare perche' ci si limita a funzioni totali. Se non lo si facesse saremmo in difficolta' gia' nel definire la costruzione sintattica delle formule perche' non dovrebbe essere corretto permettere il formarsi di formule nei casi in cui il connettivo non trova interpretazione, ma cio' implica che la costruzione sintattica di una formula composta deve dipendere dal significato delle componenti, impedendo di separare il ruolo della sintassi da quello della semantica.

7. LE VARIABILI.

Di proposito finora non si e' parlato di variabili perche' si e' voluto separare le difficolta' e presentare la prima parte in modo che gia' avesse una sua significativita' e una comprensibilita' autonoma.

Tante volte, anche nel linguaggio ordinario, ci si riferisce ad un individuo non ben precisato, vuoi perche' e' ben noto e non e' il caso di ricitarlo continuamente, vuoi perche' non interessa individuarlo piu' che tanto, vuoi perche' non si e' in grado di precisarlo, magari pur conoscendone l'esistenza. Il nome di un oggetto non precisato viene detto **variabile**. E' opportuno introdurre le variabili anche nel linguaggio artificiale che stiamo costruendo. Poiche' puo' succedere di voler indicare in modo non preciso piu' di un individuo, ci vorranno piu' variabili, addirittura un numero illimitato, non volendo porre alcun limite aprioristico al numero di variabili che si possono voler usare, anche se in una formula se ne useranno sempre solo un numero finito.

Che il numero delle variabili da usare in una espressione (espressione e' una qualsiasi scrittura del linguaggio che riconosciamo o che riconosceremo sintatticamente corretta, ad esempio, un termine, una formula, eccetera) sia un numero finito dipende da una caratteristica del linguaggio che e' molto importante e che si vuol mantenere: si vuol sempre sapere cosa sono le espressioni, si vuol poter riconoscere quando una certa scrittura e' una espressione del linguaggio formale, quindi bisogna poterla leggere per intero e non restare nel mezzo della lettura senza sapere quando la lettura sara' completata. Cosi' una espressione deve essere una scrittura finita, non solo finita, ma anche riconoscibile come tale, cioe' ci deve essere un criterio effettivo per dire che una certa scrittura e' o meno una espressione del linguaggio formale. Questo e' un requisito irrinunciabile. Ci potranno essere formule con molti simboli, con piu' simboli di un prefissato numero naturale, il numero dei simboli di una qualsiasi formula non e' limitato a priori (come potrebbe essere nel linguaggio di un computer che ha una memoria con un limite ben fissato, anche se molto grande). Cosi' il dotarsi di un numero numerabile di variabili risponde alle esigenze del linguaggio che si vuol costruire.

Quindi decidiamo di inserire nel linguaggio $\mathfrak{L}$ in costruzione una infinita' numerabile di simboli, v_0, v_1, ... , v_n, ... , con n numero naturale, come **variabili**.

Volendo essere nomi di individui, le variabili vanno annoverate tra i termini. Piu' precisamente modifichiamo la definizione ricorsiva di termine aggiungendo alla base della definizione la clausola che le variabili sono termini. Non modificheremo ulteriormente la definizione ricorsiva di termine, per cui possiamo aggiungere anche la clausola che nient'altro e' un termine.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di termine**.

Una successione finita di simboli di un linguaggio formale $\mathfrak{L}$ e' un termine se:
- o e' una variabile,
- o e' un simbolo di costante,
- o e' della forma $ft_1...t_n$ dove f e' un simbolo di funzione n-ario e $t_1,...,t_n$ sono successioni finite di simboli del linguaggio gia' riconosciute come termini;
- nient'altro e' un termine.

Si noti che nelle scritture usate la giustapposizione di scritture che stanno per successioni di simboli indica la giustapposizione delle successioni indicate.

Se dopo l'introduzione delle variabili abbiamo sistemato facilmente la definizione sintattica di termine, piu' delicato e' il problema di interpretare i termini nella nuova accezione: la struttura non precisa, e non deve precisare, come interpretare le variabili. Dobbiamo introdurre nella descrizione dei rapporti tra struttura e linguaggio, cioe' nel metalinguaggio, una funzione che dica come interpretare ciascuna variabile, cioe' quale elemento di un certo universo associare a ciascuna variabile. Questa funzione e' ovviamente legata in parte alla struttura in quanto il suo codominio e' contenuto nell'universo della struttura, ma il legame tra varianili e struttura non dovra' estendersi piu' di tanto perche' vogliamo mantenere la possibilita' di cambiare l'interpretazione delle variabili anche se gli altri simboli sono interpretati in una certa struttura.

Supponiamo quindi di disporre di una funzione che ad ogni variabile assegni un elemento dell'universo di una certa struttura. Chiameremo **attribuzione di valori alle variabili** una tale funzione. Data cosi' una struttura, indichiamola con $\mathfrak{A}$, e una attribuzione di valori alle variabili, indichiamola con $\underline{a}$, si ottiene la coppia ordinata $(\mathfrak{A},\underline{a})$ che chiameremo **realizzazione** e indicheremo con σ, $\sigma= (\mathfrak{A},\underline{a})$, e questa sata' il'ambiente corretto per interpretare termini con variabili. L'interpretazione in una realizzazione σ di un termine e' definita per induzione integrando la precedente definizione con la clausola che se il termine e' una variabile allora la sua interpretazione e' il valore che la funzione attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ assegna a quella variabile.

In analogia con la precedente notazione $(\ )^{\mathfrak{A}}$, si puo' ora introdurre la notazione $(\ )^{\sigma}$, cioe' $(\ )^{(\mathfrak{A},\underline{a})}$, per indicare le interpretazioni nella realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$. Cosi' si puo' ridare esplicitamente l'intera **definizione di interpretazione di un termine in una realizzazione**.

Date una struttura $\mathfrak{A}$ e una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$, cioe' data una realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$, l'interpretazione di un termine t e' data per induzione sulla costruzione del termine come segue:
- se il termine t e' la variabile v_i allora la sua interpretazione $(t)^{\sigma}= (v_i)^{\sigma}$ nella realizzazione σ e' $\underline{a}(v_i)$ che e' un elemento dell'universo della struttura;
- se il termine t e' un simbolo per costante, diciamo c, la sua interpretazione $(t)^{\sigma}=(c)^{\sigma}$, e' la costante $\underline{c}$ a cui quel simbolo e' associato nella struttura $\mathfrak{A}$, cioe' $(c)^{\sigma}$ e' $\underline{c}$, che e' ancora un elemento dell'universo;
- se il termine t e' del tipo $ft_1...t_n$, con f simbolo di funzione n-aria e $t_1,...,t_n$ termini, la sua interpretazione $(t)^{\sigma}= (ft_1...t_n)^{\sigma}$ nella realizzazione σ e' quell'elemento a dell'universo che e' immagine attraverso la funzione F, che e' l'interpretazione in $\mathfrak{A}$ del simbolo f, dell'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi dell'universo che sono le interpretazioni in σ dei termini $t_1,..., t_n$, cioe' e' $(f)^{\sigma}((t_1)^{\sigma}, ..,(t_n)^{\sigma}) = (f)^{\mathfrak{A}}((t_1)^{\sigma}, ..,(t_n)^{\sigma}) = F(a_1,..., a_n)$, che e' un elemento dell'universo.

E' evidente la forte analogia tra variabili e simboli per costanti, entrambi sono termini ed entrambi si interpretano in elementi dell'universo. Ma vale la pena sottolineare anche la differenza tra di loro. Mentre l'interpretazione di un simbolo per constante viene data nel precisare una struttura associata al linguaggio, cio' non avviene per una variabile, la cui interpretazione e' precisata in un secondo momento, riservandosi cosi' la possibilita' di cambiare l'interpretazione della variabile senza cambiare l'interpretazione dei simboli che non sono variabili passando da una realizzazione ad un'altra ma mantenendo in entrambe le realizzazioni la stessa struttura associata al linguaggio e cambiando solo l'attribuzione di valori alle variabili. In qualche modo, le variabili sono simboli per elementi dell'universo di cui ci si riverva l'interpretazione in un secondo momento, potendola variare senza variare l'interpretazione del resto.

E' evidente che, fissata una struttura $\mathfrak{A}$, l'elemento dell'universo interpretazione di un termine dipende solo dai valori che la funzione $\underline{a}$ assegna alle variabili che occorrono nel termine (queste saranno sicuramente in numero finito perche' un termine e' una successione finita di simboli); detto altrimenti, data una struttura $\mathfrak{A}$ e due attribuzioni di valori alle variabili $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ che coincidano sulle variabili che occorrono in un termine t, entrambe le realizzazioni σ, dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}$, e σ', dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}'$, interpretano t nello stesso elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. La dimostrazione di quanto appena affermato si puo' agevolmente scolgere per induzione sulla costruzione dei termini ed e' lasciata al lettore.

L'ultima osservazione porta a considerare l'interpretazione di un termine in una struttura non solo come elemento dell'universo precisato dall'attribuzione di valori alle variabili, ma anche come una funzione dall'interpretazione delle variabili che occorrono in esso nell'universo, prescindendo cosi' dalle funzioni di attribuzione di valori alle variabili. Detto altrimenti, si puo' ancora pensare all'interpretazione in una struttura $\mathfrak{A}$ di un termine inn cui occorrano variabili, ma questa non e' piu' un elemento dell'universo della struttura, bensi' una funzione, determinata dal termine, che fa corrispondere un elemento dell'universo agli elementi dell'universo assegnati alle variabili che occorrono nel termine.

Supponendo che le variabili che occorrono in un termine t siano tra le prime k, si puo' dare un nuovo significato alla notazione $(t)^{\mathfrak{A}}$ e precisamente $(t)^{\mathfrak{A}}$ indica la funzione che ad una k-upla ordinata $(a_0,...,a_{k-1})$ di elementi dell'universo assegna l'elemento dell'universo a tale che $a=(t)^{(\mathfrak{A},\underline{a})}$, dove $\underline{a}$ e' una attribuzione di valori alle variabili che assegna alle prime k variabili rispettivamente proprio i valori $a_0,...,a_{k-1}$. Per indicare detto elemento a dell'universo si usera' anche la notazione $(t)^{\mathfrak{A}}[a_0,...,a_{k-1}]$.

L'ampliamento introdotto a proposito di termini con l'introduzione delle variabili coinvolge anche le formule. Pur rimanendo formalmente inalterate le definizioni sintattiche ricorsive di formula atomica e di formula, variano le successioni finite di simboli accettate dalle due definizioni per la possibilita' di includere termini secondo la definizione ampliata di questi.

Per l'interpretazione delle formule si ripropone la stessa problematica vista con i termini. Da una parte si puo' continuare a pretendere che le formule debbano essere o vere o false, ma per dire questo bisogna precisare non solo l'interpretazione in una struttura, ma anche, indipendentemente, l'interpretazione delle variabili: solo se si saranno precisati entrambi questi elementi si potra' dire se una formula e' vera o falsa. In questo contesto, continueremo ad usare la notazione $(\ )^{\sigma}$ per indicare un'interpretazione in una realizzazione σ.

Ancora il valore di verita' dell'interpretazione di una formula in una certa struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili dipende solo dai valori assegnati alle variabili che occorrono nella formula, cioe' se si considerano una struttura $\mathfrak{A}$ e due attribuzioni di valori alle variabili $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ che coincidano sulle variabili occorrenti in una certa formula, entrambe le realizzazioni σ, dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}$, e σ', dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}'$, interpretano la formula nello stesso valore di verita'.

Si noti che la struttura $\mathfrak{A}$ con l'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ da luogo ad una interpretazione $(\ )^{\sigma}$ in una realizzazione σ diversa dall'interpretazione, chiamiamola $(\ )^{\sigma'}$, nella realizzazione σ' che si ottiene dalla stessa struttura $\mathfrak{A}$ ma abbinata alla attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}'$. Comunque, come appena detto, le due valutazioni sono abbastanza simili da interpretare in ugual modo le formule le cui variabili sono interpretate ugualmente da $(\ )^{\sigma}$ e da $(\ )^{\sigma'}$, o, equivalentemente, da $\underline{a}$ e da $\underline{a}'$.

Altro atteggiamento e' quello di non considerare piu' una formula φ come vera o falsa in una interpretazione in una certa realizzazione, ma vera, relativamente ad una certa struttura $\mathfrak{A}$, in funzione dell'attribuzione di valori alle prime k variabili se queste includono quelle occorrenti nella formula. Quindi il significato che si attribuisce ad una formula φ, relativamente ad una certa struttura $\mathfrak{A}$, e' una funzione h_φ dall'interpretazione delle prime k variabili (che contengono quelle occorrenti nella formula φ) (cioe' dalle k-uple ordinate di elementi di A, dove A e' l'universo di $\mathfrak{A}$) nei valori di verita', h_φ: $A^k \rightarrow \{V,F\}$. Piu' precisamente $h_\varphi(a_0, \ldots , a_{k-1})=V$ se φ e' vera quando e'interpretata nella realizzazione σ dipendente dalla struttura $\mathfrak{A}$ e da una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ che assegni alle prime k variabili proprio i valori $a_0, \ldots , a_{k-1}$; mentre $h_\varphi(a_0, \ldots , a_{k-1})=F$ altrimenti. Anche ora, per indicare la funzione h_φ, si potra' usare la notazione $(\varphi)^{\mathfrak{A}}$, e per indicare il valore di verita' che questa funzione fa corrispondere alla k-upla ordinata $(a_0, \ldots , a_{k-1})$ si potra' scrivere $(\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots , a_{k-1}]$.

8. LA QUANTIFICAZIONE.

A volte si e' interessati a sapere se l'interpretazione di una formula in una realizzazione e' sempre la stessa al variare dell'interpretazione di una variabile, o se, invece di essere sempre la stessa, ha un qualche altro ben precisato comportamento, ancora al variare dell'interpretazione di una variabile. Nel linguaggio comune tale esigenza viene manifestata da affermazioni del tipo: per ogni individuo e' vera una certa affermazione che coinvolge quell'individuo, ad esempio ogni numero naturale e' maggiore od uguale a zero.

Vogliamo dare anche al linguaggio che stiamo costruendo la possibilita' di esprimere affermazioni del tipo visto.

Cosi' sia φ una formula in cui compaiano al piu' le variabili $v_0, v_1, \ldots , v_{k-1}$, indichiamola con $\varphi(v_0, v_1, \ldots , v_{k-1})$: la formula stessa puo' essere vera o falsa quando interpretata in una realizzazionezione basata su di una struttura $\mathfrak{A}$ a seconda dell'attribuzione di valori data alle variabili $v_0, v_1, \ldots , v_{k-1}$. Con la notazione prima introdotta si puo' dire che il significato della formula $\varphi(v_0, v_1, \ldots , v_{k-1})$ relativamente ad una struttura $\mathfrak{A}$, e' la funzione n-aria $h_\varphi=(\varphi)^{\mathfrak{A}}$.

Si puo' essere interessati a vedere il comportamento di questa funzione h_φ al variare dell'attribuzione di valore alla variabile v_i, tenendo fissa l'attribuzione di valori delle altre variabili. Cosi' si puo' definire una funzione unaria $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{k-1}}$ mediante la seguente uguaglianza $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{k-1}}(x) = h_\varphi(a_0,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots, a_{k-1}) = (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_{k-1}]$.

Si sta intravvedendo una operazione che al significato di una formula φ, come funzione h_φ dalle attribuzioni di valore alle prime k variabili (che contengono quelle occorrenti nella formula) nei valori di verita', fa corrispondere una nuova formula il cui significato e' ancora una funzione dall'interpretazione delle sue variabili nei valori di verita', ma questa volta dipende non dall'interpretazione di tutte le variabili, ma dall'interpretazione delle variabili eccetto una. Piu' precisamente, tale operazione fa ottenere una nuova formula il cui valore di verita' non dipende piu' dall'interpretazione di una delle variabili, diciamo della variabile v_i, ma, fissata ad arbitio l'interpretazione delle altre variabili, e' il vero se la dipendenza del valore della formula iniziale dall'interpretazione della variabile scelta e' di un certo tipo, il falso altrimenti.

Detto altrimenti, data una formula φ il cui valore di verita' dipenda dalla interpretazione di certe variabili $v_o,\ldots,v_{n-1}$, si consideri una di queste variabili, v_i, e la funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$ che fa dipendere il valore di verita' della formula φ dall'interpretazione della variabile v_i, fissata l'interpretazione delle altre $v_o,\ldots,v_{i-1},v_{i+1}, \ldots,v_{n-1}$ in $a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}$, si vuole ottenere una nuova formula il cui valore di verita', sempre fissata l'interpretazione delle variabili $v_0,\ldots, v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n-1}$ in $a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}$, colga il comportamento globale della funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$, cioe' sia il vero se la funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$ presenta il comportamento voluto, il falso altrimenti.

Questa operazione che fa cogliere il tipo di dipendenza del valore di verita' di una formula dall'intepretazione di una certa sua variabile, ossia dal comportamento della funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$ nel suo insieme, viene chiamata **quantificazione**. Cosi' la quantificazione "lega", in un certo modo, una variabile che non dovra' piu' essere considerata nel computo delle variabili da cui dipende l'interpretazione della nuova formula, interpretazione ancora intesa come funzione dalle interpretazione delle variabili nei valori di verita', sempre relativamente ad una certa fissata struttura.

Le varie operazioni di quantificazione corrispondono ai vari tipi di comportamento della funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$, e sono infinite se l'universo della struttura e' infinito.

Ancora ci si potrebbe domandare, come si e' fatto per le funzioni da n-uple di valori di verita' nei valori di verita', se ci sono alcuni tipi di comportamento che, se opportunamente applicati piu' volte e in combinazione, eventualmente anche con i connettivi, hanno lo stesso effetto di un particolare tipo di comportamento comunque prefissato. Questa volta, pero', non c'e' un tale risultato, e, d'altra parte, non si possono considerare tutti questi infiniti tipi di comportamento. Si sceglie allora di privilegiare uno di questi tipi di comportamento particolarmente semplice, e precisamente il caso in cui la funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$ sopra ricordata e' la funzione costante vero. Si sceglie cosi' una operazione di quantificazione, chiamata quantificazione universale, da indicarsi con $\forall v_i$, che, fissata l'interpretazione di tutte le variabili diverse da v_i, da' alla formula $\forall v_i\varphi(v_0, v_1, \ldots , v_{n-1})$ il valore vero se la formula $\varphi(v_0, v_1, \ldots ,v_{n-1})$ e' vera comunque si interpreti la variabile v_i e mantenendo fissa l'interpretazione degli altri simboli.

Da un punto di vista sintattico, vogliamo ampliare il concetto di formula consentendo cittadinanza anche a nuove formule che rispondano all'esigenza di poter quantificare. Allo scopo introdurremo tra i simboli del linguaggio in costruzione il seguente: $\forall$, da chiamarsi **quantificatore universale**. A questo punto e' abbastanza naturale ampliare la definizione ricorsiva di formula con la seguente clausola: se φ e' una formula e v_i una variabile allora anche la successione finita di simboli $\forall v_i\varphi$ e' una formula. Poiche' non estenderemo ulteriormente la nozione di formula, almeno in questa presentazione, possiamo aggiungere alla definizione ricorsiva di formula, che abbiamo appena ampliata, un'ultima clausola affermante che qualsiasi cosa che sia diversa dalle successioni finite di simboli che possono essere riconosciute come formule in base alle condizioni gia' precisate non e' una formula.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di formula**,

Una successione finita di simboli di un linguaggio formale $\mathfrak{L}$ e' una formula se;
- o e' una formula atomica, cioe' un predicato di arieta' n seguito da n termini,
- o e' del tipo $\neg\varphi$ o $\wedge\varphi\psi$ dove φ e ψ sono successioni finite di simboli del linguaggio gia' riconosciute come formule,
- oppure e' del tipo $\forall v_i\varphi$ dove v_i e' una variabile e φ e' una successione finita di simboli del linguaggio gia' riconosciuta come formula;
- nient'altro e' una formula.

Ora in una formula possono comparire occorrenze di variabili da cui non dovra' piu' dipendere l'interpretazione della formula stessa, come, ad esempio, le occorrenze della variabile v_i nella formula $\forall v_i\varphi$. Chiameremo **vincolate** queste occorrenze di variabili e **libere** le altre occorrenze.

Ricorrendo alla definizione sintattica ricorsiva ampliata di formula possiamo dire in modo puramente sintattico quali occorrenze di variabili sono libere e quali vincolate in una formula. Ogni occorrenza di una variabile in una formula atomica e' libera. Le occorrenze libere e vincolate nelle formule φ_1 e φ_2 restano tali anche nelle formule $\neg\varphi_1$ e $\wedge\varphi_1\varphi_2$. Le occorrenze della variabile v_i in una formula del tipo $\forall v_i\varphi$ sono tutte vincolate, mentre le occorrenze delle variabili diverse da v_i in una tale formula sono libere o vincolate a seconda che lo siano in φ. Si noti che questa distinzione tra occorrenze libere e vincolate di variabili e' puramente sintattica in quanto dipende esclusivamente dalla scrittura della formula.

Si ripropone, anche in presenza di quantificatori, il problema di determinare l'interpretazione di una formula in una realizzazione, cioe' in una struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili.

Si dispone gia' di $(\ )^{\sigma}$, un'interpretazione nella realizzazione σ, ma questa non dipende soltanto dalla struttura $\mathfrak{A}$, ma anche dall'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$. Avremo bisogno di attribuzioni di valori alle variabili che differiscano da $\underline{a}$ solo per il fatto che attribuiscono ad una certa variabile v_i un fissato valore b indipendentemente dal valore che $\underline{a}$ attribuisce a v_i. Usiamo la notazione $\underline{a}(v_i/b)$ per indicare una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a'}$ coincidente con l'attribuzione $\underline{a}$ su tutte le variabili diverse da v_i e che attribuisce alla variabile v_i il valore b, cioe' $\underline{a'}(v_j) = \underline{a}(v_i/b)(v_j)=\underline{a}(v_j)$ se $j \neq i$, mentre $\underline{a'}(v_i) = \underline{a}(v_i/b)(v_i) = b$. Introduciamo la possibilita' di variare di poco la realizzazione σ, e indichiamo con $\sigma(v_i/b)$, dove v_i e' una variabile, la nuova realizzazione costruita a partire dalla struttura $\mathfrak{A}$ e dall'attribuzione $\underline{a}(v_i/b)$. Essa differisce dalla precedente per il solo fatto che ci si riserva di interpretare la variabile v_i nell'elemento b dell'universo (indipendentemente da come σ interpreta la variabile v_i) e per quanto consegue da cio'.

Ora si dice che la formula $\forall v_i\varphi$ e' vera nell'interpretazione $(\ )^{\sigma}$, o anche che la formula $\forall v_i\varphi$ e' vera interpretata nella realizzazione σ, se per ogni elemento b nell'universo della realizzazione σ e' vera la formula φ nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$. Detto altrimenti, $(\forall v_i\varphi)^{\sigma}=V$ se per ogni b nell' universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$. Quindi per valutare una formula quantificata in una certa realizzazione bisogna far ricorso a molte altre realizzazioni che differiscono da quella che interessa solo per la diversa valutazione della variabile che segue il segno di quantificazione.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di interpretazione di una formula in una realizzazione**.

L'interpretazione di una formula puo' essere solo V o F. Date una struttura $\mathfrak{A}$ e una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$, l'interpretazione di una formula φ nella realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$ e' data per induzione sulla costruzione della formula come segue:

- se φ e' una formula atomica, cioe' del tipo $Pt_1...t_n$, allora $(Pt_1...t_n)^{\sigma}$ e' V se e solo se l'n-upla delle interpretazioni dei termini appartiene alla relazione che interpreta il predicato, $((t_1)^{\sigma},...,(t_n)^{\sigma}) \in (P)^{\sigma}$;
- se φ e' una formula del tipo $\neg\psi$ allora $(\neg\psi)^{\sigma}=(\neg)^{\sigma}((\psi)^{\sigma})$, cioe' $(\neg\psi)^{\sigma}=V$ se $(\psi)^{\sigma}=F$, altrimenti $(\neg\psi)^{\sigma}=F$;
- se φ e' una formula del tipo $\wedge\varphi_1\varphi_2$ allora $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^{\sigma}=(\wedge)^{\sigma}((\varphi_1)^{\sigma},(\varphi_2)^{\sigma})$, cioe' $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^{\sigma}=V$ se $(\varphi_1)^{\sigma}=V$ e $(\varphi_2)^{\sigma}=V$, altrimenti $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^{\sigma}=F$;
- se φ e' una formula del tipo $\forall v_i\psi$ allora $(\forall v_i\psi)^{\sigma}=V$ se e solo se per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\psi)^{\sigma(v_i/b)}=V$.

Cosi' e' ben precisata la nozione di formula e quando una formula e' vera in una struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili, brevemente, in una certa realizzazione.

Ha un certo interesse considerare anche le formule del tipo $\neg\forall v_i\neg\varphi$, che piu' sinteticamente indicheremo con la scrittura $\exists v_i\varphi$. Si osservi che $\exists v_i\varphi$ e' vera nella realizzazione σ se esiste un elemento b dell'universo della realizzazione σ per cui la formula φ e' vera nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$. Detto altrimenti $(\exists v_i\varphi)^{\sigma}=V$ se esiste un elemento b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$. Infatti $\neg\forall v_i\neg\varphi$ e' vera se interpretata nella realizzazione σ se $\forall v_i\neg\varphi$ e' falsa nella realizzazione σ, cioe' se non e' vero che per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\neg\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$, ovvero se esiste un b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\neg\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=F$, cioe', infine, se esiste un b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$.

Prima di introdurre la quantificazione avevamo notato che il valore di verita' di una formula in una struttura dipende dall'attribuzione di valori alle sole variabili che occorrono nella formula, cioe' due diverse attribuzioni di valori alle variabili che pero' coincidano sulle variabili della formula fanno assumere a questa lo stesso valore di verita'. Ora che abbiamo introdotto la quantificazione e distinto le variabili in libere e vincolate, possiamo affinare quel risultato dicendo che il valore di verita' di una formula in una struttura dipende solo dall'attribuzione di valori alle variabili che occorrono libere nella formula. Di fatto dimostriamo il seguente

Teorema. Se $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ sono due attribuzioni di valori alle variabili che coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in una formula α, allora $(\alpha)^{\sigma}=(\alpha)^{\sigma'}$ dove $()^{\sigma}$ e $()^{\sigma'}$ sono rispettivamente le realizzazioni $(\mathfrak{A},\underline{a})$ e $(\mathfrak{A},\underline{a}')$.

DIMOSTRAZIONE. Argomentiamo per induzione sulla costruzione della formula α.

- Se α e' atomica, del tipo $Pt_1...t_n$, tutte le occorrenze di variabili nella formula (e nei termini) sono libere. Per quanto gia' visto, per ogni i compreso tra 1 e n, $(t_i)^{\sigma}=(t_i)^{\sigma'}$, dal momento che le variabili occorrenti in t_i occorrono libere in α e quindi sono interpretate in ugual modo dalle due realizzazioni σ e σ'. Poiche' $(P)^{\sigma}$ e' $(P)^{\sigma'}$, segue che $(Pt_1...t_n)^{\sigma} = (P)^{\sigma}(t_1^{\sigma},...,t_n^{\sigma}) = (P)^{\sigma'}(t_1^{\sigma'},...,t_n^{\sigma'}) = (Pt_1...t_n)^{\sigma'}$.
- Se α e' del tipo $\neg\beta$, allora, sfruttando l'ipotesi induttiva e il fatto che le occorrenze libere di variabili in α sono esattamente le occorrenze libere di variabili in β, si ha che $(\alpha)^{\sigma} = (\neg\beta)^{\sigma} = (\neg)^{\sigma}((\beta)^{\sigma}) = (\neg)^{\sigma'}((\beta)^{\sigma'}) = (\neg\beta)^{\sigma'}= (\alpha)^{\sigma'}$.
- Se α e' del tipo $\wedge\beta\gamma$, allora, sfruttando l'ipotesi induttiva e il fatto che le occorrenze libere di variabili in α sono esattamente le occorrenze libere di variabili in β o in γ, $(\alpha)^{\sigma} = (\wedge\beta\gamma)^{\sigma} = (\wedge)^{\sigma}((\beta)^{\sigma},(\gamma)^{\sigma}) = (\wedge)^{\sigma'}((\beta)^{\sigma'},(\gamma)^{\sigma'}) = (\wedge\beta\gamma)^{\sigma'}= (\alpha)^{\sigma'}$.
- Se α e' del tipo $\forall x\beta$, allora $(\alpha)^{\sigma} = V$ se e solo se per ogni elemento $a\in A$ si ha $(\beta)^{\sigma(x/a)} = V$. Ma, per ipotesi induttiva, per ogni $a\in A$, $(\beta)^{\sigma(x/a)}=(\beta)^{\sigma'(x/a)}$, dal momento che le due realizzazioni $\sigma(x/a)$ e $\sigma'(x/a)$ coincidono su x e anche su tutte le variabili diverse da x che occorrono libere in β (poiche' queste occorrono libere anche in α). Cio' significa che $(\alpha)^{\sigma'} = V$ se e solo se $(\alpha)^{\sigma} = V$.

Il risultato appena dimostrato ci permette di introdurre la nuova notazione $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,...,a_{n-1}]$ per indicare che una formula φ, le cui variabili libere sono tutte tra $v_o,...,v_{n-1}$, e' vera in una realizzazione dipendente da una struttura $\mathfrak{A}$ e da una attribuzione alle variabili che assegni alle variabili $v_o,...,v_{n-1}$ gli elementi $a_o,..., a_{n-1}$ dell'universo di $\mathfrak{A}$. Se poi nella formula non occorrono variabili libere, in tal caso la formula viene detta **enunciato**, allora essa e' o vera o falsa in una struttura indipendentemente dall'attribuzione di valori alle variabili, e nella nuova notazione si scrivera' $\mathfrak{A}\models\varphi$. Possiamo dire che un enunciato descrive cio' che avviene in una struttura in cui e' vero.

9. STENOGRAFIA E LINGUAGGIO FORMALE.

Attenzione, si e' definita l'interpretazione del simbolo $\forall$ e della formula $\forall v_i\varphi$ del linguaggio formale, ma per fare cio' bisogna gia' conoscere il significato di "per ogni" in italiano: in quanto fatto non si e' detto finalmente cosa vuol dire "per ogni", ma si e' detto cosa vuol dire $\forall$ nel linguaggio formale se si sa gia' cosa vuol dire "per ogni" in italiano, e se non si sa questo non si e' detto niente. Se avessi preteso di spiegare mediante la logica cosa vuol dire "per ogni" avrei detto delle fesserie, letteralmente delle fesserie, perche' il significato della locuzione "per ogni" non si spiega con la logica, ma si impara con l'uso della lingua materna fin dall'infanzia. Ma ora non interessa il processo di apprendimento della lingua materna.

Quella data e' una definizione nel metalinguaggio del significato del simbolo $\forall$ del linguaggio formale. Si deve supporre di sapere cosa vuol dire "per ogni" nel metalinguaggio. Non e' detto che lo si sappia effettivamente in modo completo, ma si suppone di saperlo. Solo allora, mediante la definizione precedente nel metalinguaggio, si e' detto cosa si intende per significato del simbolo $\forall$ del linguaggio.

Cio' che puo' provocare confusione e' l'uso dello stesso nome sia per la frase "per ogni" che per il simbolo $\forall$; forse le cose sarebbero piu' facili se chiamassi "sgorbio" il simbolo $\forall$. In tal caso direi che la formula da leggersi "sgorbio $v_i\varphi$" e' vera nei casi precisati dalla precedente definizione. $\forall$ (sgorbio) e' una cosa totalmente differente da "per ogni"; $\forall$ e' un simbolo del linguaggio oggetto che ha un suo comportamento sintattico, permette di costruire delle formule nel modo detto prima, ed ha anche un suo comportamento semantico, un suo significato, che e' esattamente quello detto prima.

In matematica si fa spesso un uso stenografico di certi simboli. Usiamo il simbolo $\forall$ semplicemente per abbreviare la scrittura di "per ogni", e "sse" per abbreviare se e solo se: sono stenografie. Spesso, il simbolismo preso dalla logica e' usato solo come una stenografia. Non e' che cio' sia proibito, basta aver coscienza che si usa quel simbolismo come stenografia, e che non sono simboli di un linguaggio formale. Il linguaggio formale non e' la stenografia, non e' una scrittura abbreviata, il linguaggio formale e' una nuova costruzione, e' un nuovo oggetto di cui ci interessa il comportamento per verificare i suoi limiti e le sue potenzialita' descrittive. Analogamente, quando ad esempio si introducono i numeri complessi, si costruisce un nuovo oggetto per fare certe operazioni. Qui, invece, l'oggetto che si costruisce e si studia e' un linguaggio formale.

Una certa stenografia puo' essere utile fin dalle prime fasi dello studio della matematica. Non cosi' per il linguaggio formale. Questo va introdotto solo quando se ne sente l'esigenza. Ma quando se ne e' sentita l'esigenza? Da un punto di vista storico, in modo particolare in questo secolo, dopo la crisi dei fondamenti, dopo l'introduzione dell'informatica, perche' entrambe richiedono un linguaggio formale che puo' essere usato anche da una macchina in modo che serva all'uomo e che, come vedremo, fa corrispondere delle operazioni sintattiche ad operazioni sui significati delle formule, sicche', separando sintassi da semantica, puo' essere utile per attenti controlli su quanto afferma.

10. LA TRASMISSIONE E L'ASCOLTO DI MESSAGGI.

Al punto 2., si e' gia' osservato che un linguaggio, anche formale, puo' essere visto come uno strumento comunicativo, e, come tale, puo' essere soggetto a varie interpretazioni. Allora questa affermazione si riferiva all'interpretazione dei simboli del linguaggio; ora che il concetto di interpretazione e' stato introdotto anche per insiemi di formule e' opportuno ritornare con piu' attenzione su quell'osservazione.

Chi vuol descrivere una situazione, piu' precisamente una struttura o almeno certi suoi aspetti, puo' usare un messaggio, cioe' un insieme di formule, che siano vere in quella struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili. Ovviamente, chi vuol trasmettere un messaggio parte da una realizzazione, che deve conoscere, e individua un insieme di formule vere in quella realizzazione: per lui la realizzazione e' unica e prefissata.

Dall'altra parte, chi riceve un insieme di formule puo' non conoscere la realizzazione intesa dal mittente. Il suo problema non e' tanto quello di vedere se le formule ricevute sono vere o meno in una prefissata realizzazione (possibilmente quella intesa dal mittente), ma piuttosto determinare l'insieme (che puo' anche essere vuoto) delle realizzazioni in cui quelle formule sono vere. Detto altrimenti, egli vuole verificare se e' accettabile l'assunzione che quelle formule siano vere in una realizzazione e riconoscere in quali realizzazioni cio' avviene: per lui la realizzazione in cui interpretare delle formule non e' unica e prefissata.

Tutto cio' ribadisce l'importanza di considerare tutte le possibili realizzazioni in cui interpretare un linguaggio e un insieme di formule in quel linguaggio, sicche' non si puo' parlare semplicemente di verita' di una formula, ma solo di verita' di una formula in una realizzazione.

11. UGUAGLIANZA COME SIMBOLO LOGICO.

Il simbolo uguale e' il simbolo di un predicato binario. Cio' e' pero' insufficiente per dire in quale relazione binaria deve essere interpretato. In genere si vorrebbe che fosse interpretato nella relazione binaria costituita dalle coppie ordinate di elementi dell'universo in cui il primo e il secondo elemento coincidono. Si puo' dimostrare (sfruttando strumenti che verranno eleborati piu' avanti) che non e' possibile precisare attraverso il linguaggio che l'interpretazione del predicato = debba essere necessariamente la relazione identica sull'universo della struttura in cui si interpretano le formule. Per realizzazione precisata attraverso il linguaggio si intende una realizzazione in cui siano vere certe specifiche formule del linguaggio.
Un tentativo di precisare l'interpretazione di = mediante il linguaggio si puo' fare scegliendo opportune formule che devono essere vere nella realizzazione in cui = e' interpretato nella relazione intesa. Tra queste formule, ad esempio, si possono inserire $\forall x{=}xx$, $\forall x\forall y\forall z({=}xy\rightarrow({=}yz\rightarrow{=}xz))$, $\forall x\forall y({=}xy\rightarrow{=}yx)$. Ma si vede subito che interpretando = in una qualsiasi relazione di equivalenza sull'universo le formule date sarebbero vere. Si potrebbero aggiungere le formule del tipo $\forall x\forall y\ ({=}xy\rightarrow(\alpha(x)\leftrightarrow\alpha(x/y))$, per ogni formula α. Le formule di tale tipo sono infinite ed ancora, come si e' detto non sono sufficienti perche' si sia forzati ad interpretare = nella relazione identica.
Si puo' decidere, al di la' di quanto permette di precisare in linguaggio, di voler considerare solo le realizzazioni in cui il predicato uguale e' interpretato nella relazione identica sull'universo.
Se adottiamo tale scelta diciamo di considerare il predicato = come una costante logica, o di considerare = **come simbolo logico**: in effetti al predicato = diamo una interpretazione pressoche' costante come alle altre costanti logiche.

12. RICCHEZZA DI UN LINGUAGGIO E STRUTTURE A CUI E' ADATTO.

Inizialmente si e' introdotto il concetto di struttura e si e' osservato come l'insieme non vuoto delle relazioni della struttura contiene solo le relazioni (quelle che non si vogliono considerare come funzioni totali) che si intendono considerare, non necessariamente tutte le relazioni. Analoghe ossevazioni valgono per l'insieme delle funzioni totali e per l'insieme delle constanti.
Il problema che si vuole ora analizzare e' cosa succede se si amplia o si riduce l'insieme delle relazioni o delle funzioni o delle costanti che si vogliono considerare.
Ovviamente si passa ad un'altra struttura, ma con naturali legami con la struttura di partenza.
Si dira' che una struttura $\mathfrak{A}_1=(A_1,\mathcal{R}_1,\mathcal{F}_1,\mathcal{C}_1)$ e' una **espansione** di una struttura $\mathfrak{A}_0=(A_0,\mathcal{R}_0,\mathcal{F}_0,\mathcal{C}_0)$ se le due strutture hanno lo stesso universo ($A_1=A_0$) e $\mathcal{R}_1\supseteq\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{F}_1\supseteq\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{C}_1\supseteq\mathcal{C}_0$, cioe' le relazioni di $\mathcal{R}_1$ includono le relazioni di $\mathcal{R}_0$, le funzioni di $\mathcal{F}_1$ includono le funzioni di $\mathcal{F}_0$, e le costanti di $\mathcal{C}_1$ includono le costanti di $\mathcal{C}_0$. Si puo' dire che tutte le relazioni, le funzioni e le costanti della struttura $\mathfrak{A}_0$ si ritrovano nella struttura $\mathfrak{A}_1$ dove ci sono eventutalmente anche delle altre o relazioni o funzioni o costanti. In tale situazione si dira' anche che $\mathfrak{A}_0$ e' una **riduzione** di $\mathfrak{A}_1$.
Se una struttura $\mathfrak{A}_1$ e' un'espansione di un'altra struttura $\mathfrak{A}_0$ allora le due strutture non sono dello stesso tipo. Infatti lo stesso linguaggio non e' adatto ad entrambe le strutture. Se $\mathfrak{L}_0$ e un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{A}_0$, in esso tutti i simboli sono impegnati per interpretare le relazioni o le funzioni o le costanti di $\mathfrak{A}_0$ e non ci saranno i simboli per interpretare le relazioni o le funzioni o le costanti di $\mathfrak{A}_1$ che non sono nella struttura $\mathfrak{A}_0$. A partire dal linguaggio $\mathfrak{L}_0$, per ottenere un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{A}_1$ bisogna aggiungere dei nuovi simboli della dovuta arieta' in corrispondenza alle relazioni, alle funzioni e alle costanti in $\mathfrak{A}_1$ e non in $\mathfrak{A}_0$; si otterra' cosi' un nuovo linguaggio $\mathfrak{L}_1$ che si puo' indicare come $\mathfrak{L}_0+\Lambda$ dove Λ e' l'insieme dei nuovi simboli. Spesso ci capitera' di considerare espansioni in cui si aggiungono solo costanti, e in tal caso il linguaggio

$\mathfrak{L}_1$ adatto alla struttura espansa sara' indicato mediante la scrittura $\mathfrak{L}_0$+C, con C insieme di simboli di costante non in $\mathfrak{L}_0$, di cardinalita' almeno uguale al numero delle costanti in $\mathfrak{A}_1$ non in $\mathfrak{A}_0$.

Abbiamo gia' introdotto il concetto di realizzazione; le realizzazioni sono caratterizzate da una coppia di elementi: una struttura e una attribuzione di valori alle variabili. Anche per le realizzazioni possiamo parlare di espansioni e riduzioni; piu' precisamente si dira' che una realizzazione $\sigma_1=(\mathfrak{A}_1,\underline{a}_1)$ e' una espansione di una realizzazione $\sigma_0=(\mathfrak{A}_0,\underline{a}_0)$ quando $\mathfrak{A}_1$ e' un'espansione di $\mathfrak{A}_0$ e $\underline{a}_1$ e' uguale ad $\underline{a}_0$. In tal caso si dira' anche che σ_0 e' una riduzione di σ_1.

Quando si considera una formula, si pensa che essa sia scritta in un linguaggio che in genere e' costituito da piu' simboli di quelli che occorrono nella formula. Cosi' e' naturale pensare che la formula puo' appartenere a piu' linguaggi che contengono i simboli occorrenti nella formula. Quando si interpreta la formula si deve utilizzare una realizzazione adatta a un certo linguaggio, sicche' e' necessario precisare in quale linguaggio la formula e' considerata, anche se spesso tale precisazione non viene esplicitata essendo sottinteso il linguaggio a cui ci si riferisce.

Anche quando si considera un insieme di formule si incorre in una situazione analoga: bisognerebbe sempre specificare il linguaggio in cui si intendono scritte quelle formule anche ai fini di trovare una realizzazione che sia adatta a quel linguaggio. Ribadiamo che spesso e' sottinteso a quale linguaggio si fa riferimento: quando non e' diversamente specificato, si intende che il linguaggio di riferimento e' il minimo linguaggio in cui si possono esprimere le formule che si vogliono analizzare.

A volte pero' (e in seguito sara' fatto cosi'), per riuscire a specificare meglio certe caratteristiche di una realizzazione in cui si vuole che certe formule siano vere, si utilizza un linguaggio piu' ricco adatto ad una espansione della realizzazione cercata e, con maggiore facilita', si trova una tale espansione. Questa e' gia' una realizzazione che rende vere le formule che interessano, anche se e' adatta ad un linguaggio piu' ricco e non al linguaggio considerato inizialmente.

Potremmo essere gia' contenti del risultato, ma possiamo anche essere piu' pignoli nel richiedere che la realizzazione cercata (con le caratteristiche in piu' che si volevano per determinare le quali si era passati all'espanione) debba essere proprio adatta al linguaggio inizialmente precisato. Fortunatamente questa ulteriore richiesta non presenta difficolta' ad essere soddisfatta. Infatti raggiunta una realizzazione adatta ad un linguaggio piu' ricco che rende vere certe formule, per averne una che conserva gran parte delle caratteristiche di quella trovata, ma che e' adatta al linguaggio minimo di quelle formule, e in cui queste continuano ad essere vere, basta considerare la riduzione della precedente realizzazione al linguaggio voluto: sostanzialmente si sta considerando la stessa realizzazione, solo tralasciando di interpretare i simboli in piu' che non occorrono nelle formule considerate. Che le formule date, interpretate nella realizzazione ridotta, continuino ad essere vere dipende dal risultato gia' visto che la loro verita' dipende solo da come vengono interpretati i simboli propri che in esse occorrono e non dipende da come vengono interpretati gli altri simboli propri.

Si e' gia visto che la matematica ha un atteggiamento estensionale, cioe', nel caso di collezioni, non si interessa al perche' certi elementi sono nella collezione, se e' bene che ci stiano o quant'altro, bensi' registra il fatto che ci sono e si interessa di vedere a chi si estende la collezione. Con atteggiamento del tutto analogo, la matematica si interessa del comportamento degli elementi (cioe' quali rapporti intercorrono tra loro) dell'universo di una struttura, e non tanto di chi siano effettivamente. Pertanto, se il comportamento degli elementi dell'universo di una struttura e' del tutto uguale al comportamento di corrispondenti elementi dell'universo di un'altra struttura, le due strutture saranno da considerarsi praticamente la stessa. Per precisare questa importante nozione di avere lo stesso comportamento si introduce la nozione di isomorfismo.

Due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, dello stesso tipo si dicono **isomorfe**, e si scrivera' $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, se esiste una biiettivita' (detta **isomorfismo**) dall'universo della prima sull'universo della seconda che preserva la struttura. Una funzione f dall'universo di una struttura nell'uni-

verso di un'altra preserva la struttura se sono soddisfatte le seguenti condizioni:
1) per ogni relazione n-aria R della prima struttura una qualsiasi n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo appartiene alla relazione R se e solo se l'n-upla $f(a_1),...,f(a_n)$ che le corrisponde attraverso la funzione appartiene alla corrispondente relazione (cioe' la relazione, nella seconda struttura, associata al predicato associato alla relazione R); e inoltre
2) per ogni funzione n-aria F della prima struttura che fa corrispondere ad una qualsiasi data n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo l'elemento a, la corrispondente funzione (cioe' la funzione, nella seconda struttura, associata al simbolo di funzione associato alla funzione F) fa corrispondere all'n-upla $f(a_1),..., f(a_n)$ l'elemento $f(a)$; ed infine
3) ad ogni costante c della prima struttura la funzione f fa corrispondere la corrispondente costante (cioe' la costante, nella seconda struttura, associata al simbolo di costante associato alla costante c).

La nozione di isomorfismo tra strutture collega strutture che non si distinguono per il comportamento degli elementi (elementi corrispondenti si comportano nello stesso modo), ma si distinguono solo per l'identita' degli elementi, fatto questo difficilmente accertabile specie per elementi astratti (cioe' costruiti nella mente), e, spesso, di scarsa rilevanza. Si puo' dire che due strutture isomorfe non sono distinguibili dal loro manifestarsi, e sono sostanzialmente la stessa struttura.

Un esempio non banale di isomorfismo e' il seguente. Si considerino le struttura ordinata addittiva dei reali e la struttura ordinata moltiplicativa dei reali positivi, cioe' le strutture $(|R,\{=,<\},\{+\},\{0\})$ e $(|R^+,\{=,<\}.\{\times\}.\{1\})$, dove |R indica l'insieme dei numeri reali, |R+ l'insieme dei reali positivi e gli altri simboli si spiegano da se' stessi. Le funzioni esponenziali a^x, con a numero reale maggiore di 1 e x variabile sui numeri reali, sono isomorfismi (lo si dimostri per esercizio). Si noti che, riducendo le due strutture ignorando le relazioni d'ordine in entrambe, allora le funzioni a^x sono isomorfismi per qualunque reale a maggiore di 0.

Un altro modo (piu' debole) per due struttture di avere un analogo comportamento e' quello di non essere distinguibili mediante enunciati di un certo linguaggio.

Due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, che non possono essere distinte mediante gli enunciati di un linguaggio $\mathfrak{L}$ (cioe' ogni enunciato del linguaggio e' vero in una struttura se e solo se e' vero nell'altra) si dicono **elementarmente equivalenti**. Cio' si indica con la notazione $\mathfrak{A}\equiv_{\mathfrak{L}}\mathfrak{B}$. Detto altrimenti, $\mathfrak{A}\equiv_{\mathfrak{L}}\mathfrak{B}$ se per ogni enunciato φ in un linguaggio $\mathfrak{L}$ si ha che $\mathfrak{A}|=\varphi$ se e solo se $\mathfrak{B}|=\varphi$. Se e' noto a che linguaggio ci si riferisce, si usa la notazione $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. $Th(\mathfrak{A})$ indica la **teoria della struttura** $\mathfrak{A}$, cioe' l'insieme di tutti gli enunciati nel linguaggio $\mathfrak{L}$ veri nella struttura $\mathfrak{A}$: $Th(\mathfrak{A})=\{\varphi$: φ e' un $\mathfrak{L}$-enunciato tale che $\mathfrak{A}|=\varphi\}$. Usando tale nozione la condizione $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ puo' essere espressa dicendo che $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Si noti che per un qualsiasi enunciato φ del linguaggio $\mathfrak{L}$ adatto alla struttura $\mathfrak{A}$ o lui o la sua negazione appartiene alla $Th(\mathfrak{A})$.

E' facile dimostrare che se $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. Per dimostrare cio' bisogna rafforzare le ipotesi considerando due realizzazione $\sigma_1=(\mathfrak{A},\underline{a})$ e $\sigma_2=(\mathfrak{B},\underline{b})$ dove $\underline{b}(v_i)=f(\underline{a}(v_i))$ con f l'isomorfismo supposto tra le due strutture: cio' perche', per dimostrare quanto dichiarato, si vuole fare induzione sulla costruzione delle formule e non ha senso parlare della verita' o meno di queste in una struttura, ma solo in una realizzazione. Cosi', per induzione sulla costruzione delle formule, si dimostra che, per ogni formula φ, $\varphi^{\sigma_1}=V$ se e solo se $\varphi^{\sigma_2}=V$. Ovviamente cio' vale anche quando le formule sono enunciati, ma in tal caso e' irrilevante l'attribuzione di valore alle variabili, e si ha il risultato voluto. In generale non vale il viceversa di quanto asserito, cioe' esistono strutture elementarmente equivalenti ma non isomorfe, ma cio' sara' visto nel corso di Logica Matematica. I due ultimi risultati giustificano l'affermazione che la nozione di elementare equivalenza e' piu' debole di quella di isomorfismo.

13. VALIDITA', CONSEGUENZA LOGICA E SODDISFACIBILITA'.

Anche se inizialmente l'interesse era rivolto a stabilire la verita' o meno di una formula in una certa realizzazione, tuttavia spesso non e' meno interessante determinare se una formula e' vera in ogni realizzazione, cio' anche a causa del legame di questa nozione con altre molto importanti che ora considereremo.

Intanto introduciamo una terminologia. Si dice che una formula φ e' **valida** se e' vera in ogni realizzazione. Per dire cio' useremo la notazione $\models\varphi$.

Si dice che una formula φ e' **conseguenza logica** di un'altra formula ψ se φ e' vera in ogni realizzazione che rende vera la formula ψ. In tal caso useremo la notazione $\psi\models\varphi$. Similmente si dice che una formula φ e' **conseguenza logica** di un insieme di formule Φ se φ e' vera in ogni realizzazione che rende vere tutte le formule di Φ. Ora la notazione sara' $\Phi\models\varphi$. Se Φ e' costituito da una sola formula si ricade nel caso precedente (salvo il tralasciare le parentesi graffe per indicare l'insieme di un solo elemento nella notazione), mentre, se Φ e' l'insieme vuoto, dire che φ e' conseguenza logica di $\emptyset$ equivale a dire che φ e' valida poiche' riteniamo che in ogni realizzazione siano vere le formula (che non ci sono) dell'insieme vuoto.

Ancora si dice che un insieme Φ di formule e' **soddisfacibile** se esiste una realizzazione nella quale siano vere tutte le formule dell'insieme Φ. L'insieme Φ puo' essere costituito anche da una sola formula, e in tal caso si parlera' di soddisfacibilita' di quella formula.

Le nozioni introdotte sono tra loro legate, nel senso che valgono i seguenti risultati:

- $\Phi\cup\{\psi\}\models\varphi$ se e solo se $\Phi\models\psi\rightarrow\varphi$;
- $\Phi\models\varphi$ se e solo se $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ e' non soddisfacibile.

Per dimostrare il primo risultato da sinistra a destra, si consideri una qualsiasi realizzazione σ che renda vere le formule di Φ. Puo' succedere che $(\psi)^{\sigma}$=F, allora $(\psi\rightarrow\varphi)^{\sigma}$=V, e per queste realizzazioni si e' mostrato cio' che si voleva, oppure $(\psi)^{\sigma}$=V, ma allora, per ipotesi, anche $(\varphi)^{\sigma}$=V, sicche' $(\psi\rightarrow\varphi)^{\sigma}$=V, e anche per queste realizzazioni si e' mostrato cio' che si voleva. Per l'altra direzione dello stesso risultato, sia σ una realizzazione tale che $(\Phi\cup\psi)^{\sigma}$=V; poiche', per ipotesi, per ogni realizzazione che rende vere le formule di Φ, ed in particolare per σ, anche $(\psi\rightarrow\varphi)^{\sigma}$=V, dovra' essere $(\varphi)^{\sigma}$=V, che e' cio' che si voleva dimostrare.

Per dimostrare il secondo risultato da sinistra a destra, si consideri una qualsiasi realizzazione σ, se questa non rende vere tutte le formule di Φ, allora non rendera' vere neppure le formule di $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$, mentre se rende vere tutte le formule di Φ, per ipotesi, dovra' rendere vera anche φ, sicche' $\{\neg\varphi\}^{\sigma}$=F, e anche in questo caso σ non rende vere tutte le formule dell'insieme $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ che risultera' non soddisfacibile vista l'arbitrarieta' di σ. Per l'altra direzione di questo risultato, sia σ una realizzazione che rende vere le formule di Φ, essa non puo' rendere vera $\neg\varphi$ altrimenti $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ sarebbe soddisfacibile, contro l'ipotesi, e pertanto dovra' essere $(\varphi)^{\sigma}$= V, il che prova quanto si voleva dimostrare.

Dai risultati precedenti, nel caso che Φ sia l'insieme vuoto, segue che:

- φ e' conseguenza logica di ψ se e solo se $\psi\rightarrow\varphi$ e' valida ($\psi\models\varphi$ se e solo se $\models\psi\rightarrow\varphi$);
- φ e' valida se e solo se $\neg\varphi$ e' non soddisfacibile.

14. DIFFICOLTA' NEL RICONOSCIMENTO DI VERITA' E VALIDITA'.

Abbiamo visto la definizione di interpretazione di una formula. In un certo senso dovremmo essere contenti di tale definizione perche' dice in modo esplicito e preciso cosa vuol dire che una formula e' vera in una certa realizzazione. Tuttavia, se la struttura ha un universo infinto, non e' agevole, secondo la definizione, rendersi conto se una formula con quantificatori e' vera o meno. Infatti in molte occasioni bisognerebbe effettuare infinite verifiche prima di poter decidere.

Ad esempio, per vedere se una formula che inizia con un quantificatore universale e' vera, secondo la definizione data, si deve controllare la verita' della formula, che si ottiene togliendo la quantificazione a quella data, in tutte le realizzazioni ottenute al variare della valutazione della variabile che segue il quantificatore. Cosi' queste prove sono tante quante gli elementi dell'universo. Come si potra' mai decidere che quella formula e' vera se l'universo e' infinito? Si dovranno fare infinite prove prima di poter concludere che quella formula e' vera. Se l'universo fosse finito la situazione sarebbe sostanzialmente diversa in quanto ad un certo momento potremmo dire di aver fatto tutte le verifiche, anche se, quando la cardinalita' dell'universo fosse molto grande, potrebbe occorrere qualche secolo, nonostante l'aiuto di tutte le possibilita' di calcolo esistenti al mondo.

Per quanto fosse attraente la definizione di verita' di una formula in una realizzazione, la sua verifica e' poco pratica, se non impossibile. Anche se si sa quali sono le operazioni da eseguire per arrivare a conoscere l'interpretazione di una formula, in genere quelle operazioni non possono essere completate a causa della loro quantita' infinita.

Pero' ci sono delle formule un po' particolari per le quali e' facile stabilire il loro valore di verita'. Si pensi ad una formula del tipo $\varphi\rightarrow\varphi$, dove $\rightarrow$ ha il significato che abbiamo gia' introdotto. Qualunque sia l'interpretazione di φ, che sara' la stessa nelle due occorrenze, dall'interpretazione di $\rightarrow$ segue che la formula $\varphi\rightarrow\varphi$ e' sempre vera, cioe' vera in ogni realizzazione, o, come si dice, e' **valida**. Si sa decidere che $\varphi\rightarrow\varphi$ e' valida anche se in φ ci sono tutte le quantificazioni che si vuole, anche se non si sa decidere se φ e' valida o meno.

Si noti che il riconoscimento della validita' di una formula, dal punto di vista della definizione data, e' ancora meno effettuabile del riconoscimento della verita' in una realizzazione, che gia' poteva richiedere infinite verifiche. Infatti ora bisognera' fare tutte quelle verifiche per ciascuna realizzazione, e queste costituiscono una quantita' largamente infinita. In base alla definizione data, non si puo' decidere la validita' di una formula.

Ma per certe formule si e' gia' riusciti a stabilire la loro validita'.

Notiamo meglio cosa si e' fatto nel caso esaminato: abbiamo osservato la scrittura della formula data ed abbiamo concluso che e' vera in ogni realizzazione conoscendo il significato di alcuni elementi della sua scrittura.

Per le altre formule ci sono altri criteri, basati solamente sulla scrittura della formula, che permettano di concludere con la validita' o meno della formula?

Se siamo interessati alla validita' di una formula, alla sua verita' in ogni realizzazione, il risultato non dovra' piu' dipendere da come vengono interpretati i predicati, i simboli di funzione o le variabili, cioe' non dipende dalle relazioni o dalle funzioni della struttura o dagli individui associati alle variabili libere, ma dovra' dipendere da come si sono aggregati i vari elementi della formula, il che puo' essere visto dal linguaggio: da qui la speranza che ci possa essere un controllo della validita' di una formula che sia puramente sintattico, basato sulla scrittura.

Le formule vere in ogni realizzazione, in un certo senso, non dicono assolutamente niente, sono nulle di potere informativo sulla struttura in cui sono vere, su cosa descrivono.

L'essere sempre vera di una formula dovrebbe dipendere esclusivamente da come abbiamo organizzato il linguaggio. Se dipende solamente dal linguaggio si potranno cercare dei controlli sulla scrittura di una formula che permetteranno di riconoscere se e' valida o meno.

Il problema diviene: c'e' un modo puramente sintattico per riconoscere se una formula e' valida?

Ecco un capitolo centrale della logica: cercare un metodo formale, che opera solo sulle scritture, per vedere se una formula e' valida. Cosi' si realizza una potenzialita' molto importante del linguaggio formale.

16. CALCOLO PROPOSIZIONALE.

A volte la validita' di una formula si vede facilmente da come vengono usati in essa certi connettivi. Ad esempio la formula $\varphi\rightarrow\varphi$ e' valida indipendentemente da chi e' e come viene valutata la formula φ. Detto altrimenti, a volte si puo' giungere a vedere se una formula φ e' valida senza analizzare il significato delle sottoformule atomiche o delle sottoformule che iniziano con un quantificatore: a priori queste sono o vere o false (anche se di fatto in certi casi sono solo vere o solo false), ma, nonostante questa imprecisione, si riesce ugualmente a vedere se φ e' valida.

Conveniamo di chiamare formule elementari sia le formule atomiche che le formule che iniziano con un quantificatore. Una qualsiasi formula puo' essere ottenuta da formule elementari mediante il solo uso di connettivi, cioe' una qualsiasi formula o e' una formula elementare, o e' la negazione di una formula precedentemente ottenuta, o e' la congiunzione di due formule precedentemente ottenute.

Chiaramente questo modo di guardare ad una formula fa perdere molta conoscenza sulla formula, precisamente tutto cio' che si puo' sapere da una formula elementare che puo' essere anche estremamente complessa e diversamente strutturata rispetto ad altre formule elementari. Tuttavia questa posizione permettera' di arrivare alla decidibilita' di certi metodi di analisi della validita' di opportune formule, come si vedra' in seguito.

Le formule costruite, a partire dalle formule elementari, mediante i connettivi vengono dette **formule proposizionali**.

Ogni formula puo' essere considerata come una formula proposizionale; il fatto di assegnarle questo nome sta ad indicare il particolare modo di considerare la formula come costruita dalle for-mule elementari mediante il solo uso dei connettivi. La mancata considerazione del significato dei costituenti delle formule elementari, alle quali viene attribuito aprioristicamente o il valore vero o il valore falso, porta alla formulazione di nuove nozioni.

Si potrebbe anche introdurre un nuovo linguaggio per indicare le formule proposizionali. In esso ci devono essere un simbolo per ciascuna formula elementare e i simboli $\neg$ ed $\wedge$. I simboli per le formule elementari hanno il ruolo di variabili che assumono valore nell'insieme dei valori di varita'.

Per **valutazione proposizionale** intenderemo una attribuzione o del valore vero o del valore falso a ciascuna formula proposizionale in un certo modo, arbitrario, per le formule elementari, e, una volta fissato questo, nel seguente modo per le altre formule proposizionali φ: se φ e' del tipo $\neg\alpha$, con α formula proposizionale, allora la valutazione di φ sara' il vero se e solo se la valutazione di α e' il falso; mentre se φ e' del tipo $\wedge\alpha\beta$, con α e β formule proposizionali, allora la valutazione di φ sara' il vero se e solo se sia la valutazione di α che la valutazione di β sono il vero. In genere indicheremo con $\mathcal{V}$ una valutazione proposizionale, e con $\mathcal{V}(\varphi)$ il valore che tale valutazione assegna alla formula φ.

Si dira' che una formula e' **proposizionalmente valida** se e' vera in ogni valutazione proposizionale, che e' **conseguenza logica proposizionale** di altre formula se e' vera in ogni valutazione proposizionale che rende vere le altre formule, e che un insieme di formule e' **proposizionalmente soddisfacibile** se c'e' almeno una valutazione proposizionale in cui tutte le formule dell'insieme sono vere. Chiaramente tra queste nozioni sussistono le usuali relazioni, e cioe':

- una formula (la negazione di una formula) e' proposizionalmente valida se e solo se la sua negazione (la formula) e' proposizionalmente non soddisfacibile;
- una formula e' proposizionalmente valida se solo se e' conseguenza logica proposizionale dell'insieme vuoto;
- una formula e' conseguenza logica proposizionale di un insieme di formule se e solo se l'insieme di formule ottenuto aggiungendo a quello dato la negazione della formula considerata non e' proposizionalmente soddisfacibile.

17. FORME NORMALI

In questa sezione assumiamo che i simboli logici del linguaggio siano $\neg\ \wedge\ \vee\ \forall\ \exists$.

Teorema. Ogni formula e' logicamente equivalente (vera nelle stesse realizzazioni) a una formula i cui eventuali simboli di negazione hanno per raggio d'azione solo formule atomiche (una tale formula viene detta formula con negazioni spinte all'interno).

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sulla costruzione di una formula φ.

Se φ e' atomica non ci sono simboli di negazione e non c'e nulla da dimostrare.

Se φ e' del tipo $\neg\alpha$ allora se α e' atomica siamo a posto. Altrimenti, se α e' del tipo $\neg\beta$ allora $\neg\alpha$ e' $\neg\neg\beta$ e questa formula e' logicamente equivalente a β che, a sua volta, per ipotesi induttiva e' logicamente equivalente ad una formula del tipo voluto. Se invece α e' del tipo $\wedge\beta\gamma$ allora $\neg\alpha$ e' $\neg\wedge\beta\gamma$ e questa formula e' logicamente equivalente alla formula $\vee\neg\beta\neg\gamma$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alle formule $\neg\beta$ e $\neg\gamma$, e' equivalente ad una formula del tipo voluto. Se poi α e' del tipo $\vee\beta\gamma$ allora $\neg\alpha$ e' $\neg\vee\beta\gamma$ e questa formula e' logicamente equivalente alla formula $\wedge\neg\beta\neg\gamma$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alle formule $\neg\beta$ e $\neg\gamma$, e' equivalente ad una formula del tipo voluto. Ancora, se α e' del tipo $\forall x\beta$ allora $\neg\alpha$ e' $\neg\forall x\beta$ e questa formula e' logicamente equivalente alla formula $\exists x\neg\beta$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alla formula $\neg\beta$, e' equivalente ad una formula del tipo voluto. Infinfe se α e' del tipo $\exists x\beta$ allora $\neg\alpha$ e' $\neg\exists x\beta$ e questa formula e' logicamente equivalente alla formula $\forall x\neg\beta$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alla formula $\neg\beta$, e' equivalente ad una formula del tipo voluto. Cio' completa la dimostrazione nel caso che φ sia del tipo $\neg\alpha$.

Se φ e' di un altro tipo allora l'applicazione dell'ipotesi induttiva da' immediatamente il risultato voluto.

Teorema. Ogni formula φ, con negazioni spinte all'interno e con la variabile che segue immediatamente un quantificatore diversa dalla variabile che segue immediatamente un altro quantificatore e diversa dalle variabili che occorrono libere, e' logicamente equivalente ad una formula del tipo $Q_1x_1....Q_nx_n\varphi'$, dove ogni Q_i, i=1,...,n (n puo' anche essere 0), e' un quantificatore o esistenziale o universale (i quantificatori esitenziali precedono i quantidicatori universali per i quali far cio' e' possibile senza perdere l'equivalenza logica), e φ' e' una formula in cui non occorrono quantificatori (una tale formula.$Q_1x_1....Q_nx_n\alpha$ e' detta formula in **forma prenessa**)

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione e' per induzione sulla costruzione di φ.

Se φ e' atomica e' gia' in forma prenessa.

Se φ e' del tipo $\neg\alpha$ allora e' negazione di atomica, per l'ipotesi che le negazioni siano spinte all'interno, ed e' gia' in forma prenessa.

Se φ e' del tipo $\wedge\alpha\beta$ allora e' equivalente ad una formula del tipo $\wedge Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$ $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$, per ipotesi induttiva applicata alle formule α e β. Ci sono da considerare i seguenti 4 casi.

- Se Q_1 e' $\exists$ allora si puo' sfruttare l'equivalenza logica $(\exists x_1\gamma)\wedge\delta\leftrightarrow \exists x_1(\gamma\wedge\delta)$, dove x_1 non deve occorrere libera in δ, prendendo $Q_2x_2..\ ..Q_nx_n\alpha'$ come γ e $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$ come δ e osservando che, in effetti, x_1 non occorre (libera) in $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$ grazie alle ipotesi formulate sulle variabili che seguono i quantificatori.
- Se invece Q_1 e' $\forall$ e Q'_1 e' $\exists$, si sfrutta la stessa equivalenza logica, ma questa volta con $Q'_2y_2...Q'_my_m\beta'$ come γ e $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$ come δ osservando che ora y_1 non occorre in $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$.
- Se Q_1 e Q'_1 sono $\forall$ allora, se nella successione $Q_1x_1...Q_nx_n$ il primo quantificatore esistenziale occorre con indice minore od uguale all'indice del primo quantificatore esistenziale nella successione $Q'_1y_1...Q'_my_m$, si sfrutti l'equivalenza logica $(\forall x_1\gamma)\wedge\delta\leftrightarrow\forall x_1(\gamma\wedge\delta)$, dove x_1 non deve occorrere libera in δ, prendendo $Q_2x_2..\ ..Q_nx_n\alpha'$ come γ e $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$ come δ e osservando che x_1 non occorre (libera) in $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$.
- Se non si e' in nessuno dei 3 casi precedenti, si sfrutti ancora l'equivalenza logica $(\forall x_1\gamma)\wedge\delta\leftrightarrow\forall x_1(\gamma\wedge\delta)$, ma con $Q'_2y_2...Q'_my_m\beta'$ come γ e $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$ come δ osservando che ora y_1 non occorre in $Q_1x_1..\ ..Q_nx_n\alpha'$.

Dopo l'applicazione della trasformazione della formula φ di partenza secondo quanto previsto in uno dei 4 casi appena visti, ci si tro–va in un caso del tutto analogo al precedente, ma con un quan–ti–ficatore di meno in una delle due successioni finite di quantificatori. Sicche' si puo' riapplicare il metodo visto fino a trasportare tutti i quantificatori di entrambe le successioni davanti al simbolo $\wedge$, mantenendo l'equivelenza logica tra la formula φ e quanto si e' ottenuto alla fine del processo.

Proseguendo la dimostrazione per induzione sulla costruzione della formula φ, si supponga ora che sia del tipo $\vee\alpha\beta$. In questo caso si ottiene il risultato con una argomentazione del tutto analoga a quella appena svolta nel caso che φ sia del tipo $\wedge\alpha\beta$ con l'avvertenza di sotituire ovunque il connettivo $\vee$ al posto di $\wedge$.

Rimane da considerare il caso in cui la formula φ inizi con un quantificatore, cioe' sia del tipo $Qx\alpha$. Per ipotesi induttiva α puo' essere considerata gia' in forma prenessa, sicche' anche $Qx\alpha$, che e' φ, lo e'.

Cio' conclude la dimostrazione.

Dimostriamo ora che

Teorema. Una formula φ senza quantificatori e con negazioni spinte all'interno e' logicamente equivalente a una congiunzione di disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche; una tale formula e' detta in forma normale congiuntiva (Si noti che qui si considerano congiunzioni di un numero finito arbitrario di formule, da una in su, come pure disgiunzioni di un numero finito arbitrario di formula, ancora da una in su).

DIMOSTRAZIONE. Ancora dimostriamo per induzione sulla costruzione della formula φ.

Se φ e' del tipo $\neg\alpha$ per le ipotesi fatte α e' atomica e φ e' una congiunzione, con una sola formula, di una disgiunzione, con una sola formula, di una negazione di formula atomica, come si voleva.

Se φ e' del tipo $\wedge\alpha\beta$, con α e β del tipo voluto per ipotesi induttiva, allora ache φ e' una congiunzione di disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche, sicche' il risultato e' raggiunto.

Se φ e' del tipo $\vee\alpha\beta$, con α e β del tipo voluto per ipotesi induttiva, puo' succedere che sia α e che β siano congiunzioni di una sola formula ciascuna, allora queste due formule sono disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche, cosicche' $\vee\alpha\beta$ e' una disgiunzione di formule o atomiche o negazioni di atomiche, ed e' anche una congiunzione, di una sola formula, di disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche, come si voleva. Altrimenti almeno una delle due formule α o β, diciamo α senza perdita di generalita', e' esprimibile come $\wedge\gamma\delta$, sicche' φ e' del tipo $\vee\wedge\gamma\delta\beta$. Questa, in base alla nota formula valida $(\alpha\wedge\beta)\vee\psi\leftrightarrow((\alpha\vee\psi)\wedge(\beta\vee\psi))$, e' logicamente equivalente a $\wedge\vee\gamma\beta\vee\delta\beta$. Quest'ultima formula forse non e' ancora in forma normale congiuntiva, ma le formule $\vee\gamma\beta$ e $\vee\delta\beta$ sono ancora del tipo di φ, e entrambe hanno, in γ e in δ rispettivamente, meno congiunti di quanti erano in α. Ripetendo il passaggio precedente ci si ridurra' alla fine a disgiunzioni seguite da congiunzioni di un solo elemento ed allora, in base all'osservazione fatta in tale evenienza, si sara' raggiunta ancora una formula congiuntiva.

Poiche' abbiamo assunto che in φ non occorrono quantificatori, i possibili tipi per φ sono stati tutti considerati e la dimostrazione e' conclusa.

Analogamente si dimostra anche il seguente

Teorema. Una formula φ senza quantificatori e con negazioni spinte all'interno e' logicamente equivalente a una disgiunzione di congiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche; una tale formula e' detta in forma normale disgiuntiva (Si noti, ancora, che qui si considerano congiunzioni di un numero finito arbitrario di formule, da una in su, come pure disgiunzioni di un numero finito arbitrario di formula, ancora da una in su).

DIMOSTRAZIONE. Del tutto analoga alla precedente, scambiando i ruoli di $\wedge$ e $\vee$, e rifacendosi alla formula valida $(\alpha\vee\beta)\wedge\psi\leftrightarrow((\alpha\wedge\psi)\vee(\beta\wedge\psi))$.

Quanto dimostrato ci permette di concludere affermando che

Teorema. Ogni formula e' logicamente equivalente sia ad una formula in forma prenessa normale congiuntiva, che ad una formula in forma prenessa normale disgiuntiva.

L'interesse per questi risultati sta nelle seguenti

OSSERVAZIONE 1. Una formula in forma normale congiuntiva e' valida se e solo se in ogni congiunto, che e' una disgiunzione, occorre sia una formula che la sua negazione. Infatti allora ogni congiunto e' valido e anche la congiunzione sara' valida.

OSSERVAZIONE 2. Una formula in forma normale disgiuntiva e' non soddisfacibile se e solo se in ogni disgiunto, che e' una congiunzione, occorre sia una formula che la sua negazione. Infatti allora ogni disgiunto e' non soddisfacibile e anche la disgiunzione sara' non soddisfacibile.

E' facile conseguenza di quanto precede che da una forma normale congiuntiva si possa passare ad una forma normale disgiuntiva e viceversa, dal momento che anche una particolare forma normale e' una formula che puo' essere espressa in modo logicamente equivalente nella forma voluta. Per passare da una forma normale all'altra si utilizzeranno o la distributivita' della congiunzione rispetto alla disgiunzione o la distributivita' della disgiunzione rispetto alla congiunzione, come e' stato fatto nelle dimostrazioni dei risultati visti.

Tuttavia e' da osservare che la quantita' di calcoli formali per eseguire un tale passaggio e' esponenziale nel numero delle formule atomiche o negazioni di atomiche. Cosi', per controllare la non soddisfacibilita' di una formula in forma normale congiuntiva, invece di trasformarla in forma normale disgiuntiva e poi controllare per ispezione sintattica la sua non soddisfacibilita' nel modo banale detto nell'ultima osservazione, si preferisce elaborare una diversa tecnica (metodo di risoluzione) che permetta un controllo sintattico diretto della sua non soddisfacibilita' (in modo non altrettanto banale come il controllo della non soddisfacibilita' di una formula in forma normale disgiuntiva) ma con meno calcoli della trasformazione di una forma normale nell'altra.

In quanto appena osservato, si e' parlato di non soddisfacibilita' di una formula in forma normale congiuntiva poiche' questa e' la situazione che capita di incontrare piu' frequentemente. Infatti, volendo mostrare che da un certo numero finito di formule $\varphi_1,...,\varphi_n$ segue logicamente la formula φ ($\varphi_1,...,\varphi_n \models \varphi$) normalmente si ricorre a mostrare la non soddisfacibilita' della formula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$, che, essendo una congiunzione, e' facile trasformare in forma prenessa normale congiuntiva: ecco l'interesse alla non soddisfacibilita' di una formula in forma normale congiuntiva.