

Modelli Matematici per la Biologia – Esercitazione 1

a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

13 Aprile 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Simulazione al calcolatore di vari modelli discreti del tipo $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$

1.1 Esercizio

Sia $x_0 \in (0, \pi)$ e si consideri la successione definita da

$$x_{k+1} = x_k + \sin x_k.$$

1. provare che $x_k \in (0, \pi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
2. provare che (x_k) cresce;
3. calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow \infty$.

1.1.1 Risoluzione

1. Si noti che $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = x + \sin x$. $f(x)$ è strettamente crescente su $(0, \pi)$ in quanto $f'(x) = 1 + \cos x$ e $0 < 1 + \cos x < 2 \forall x \in (0, \pi)$, ovvero $f'(x) > 0 \forall x \in (0, \pi)$. Essendo $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi - 1 < \pi$ e la funzione strettamente crescente, allora certamente $x_{k+1} = f(x_k) \in (0, \pi)$.
2. Essendo $x_{k+1} - x_k = \sin x_k > 0 \forall x_k \in (0, \pi)$, la successione è crescente.
3. Per $k \rightarrow \infty$ si ha l'equazione $x = x + \sin x$, che è soddisfatta per $x = 0$, $x = \pi$ e $x = +\infty$. Di questi, l'unico limite possibile è $x = \pi$ in quanto la successione è crescente e si parte da $x_0 \in (0, \pi)$. Un altro modo è di osservare che $f'(0) = 2 > 0$ e pertanto l'origine è un punto unito instabile, mentre $f'(\pi) = 0$ e quindi è stabile.

Tutte le caratteristiche di (x_k) sopra menzionare sono verificabili graficamente utilizzando il file `esempio1.m` per **GNU Octave** di seguito riportato. Esso richiede come input N (numero di iterazioni – quindi nel caso $k \rightarrow +\infty$ si deve scegliere N opportunamente elevato) e il valore iniziale x_0 (chiamato `s(1)` in `esempio1.m`).

```
% Name:      esempio1.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   03 Apr 2007
% Purpose:   Compute  $x(k+1) = x(k) + \sin(x(k))$ 
% Input:     Number of total iterations and  $x(1)$ 
% Output:    Plot of  $x(k)$  versus  $k$  and  $x(k+1)$  versus  $x(k)$ 
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value. If negative, it will be a random number
s(1)=input('Input  $0 < s(1) < \pi$  (if  $< 0$  or  $> \pi$  then random): ');

% Set s(1) random if out of range
if((s(1)>pi) || (s(1)<0))
    s(1)=pi*rand(1);
endif

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
    s(n+1)    = s(n)+sin(s(n));
    disp(s(n+1));
    x(2*n)    = s(n);
    y(2*n)    = s(n+1);
    x(2*n+1)  = s(n+1);
    y(2*n+1)  = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
```

```

gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

% Plot f(x), x and path
t=linspace(0,pi,500);
plot(t,t+sin(t),'-g;x+sin(x);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');

```

1.2 Esercizio

Data la successione (x_k) definita da

$$x_0 = a, \quad x_{k+1} = \max \left\{ \frac{1}{4}, x_k^2 \right\}$$

dire se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite di (x_k) per $k \rightarrow \infty$.

1.2.1 Risoluzione

In questo caso $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = \max \left\{ \frac{1}{4}, x^2 \right\}$. Questa funzione è decrescente per $x < -1/2$, costante e pari a $1/4$ per $-1/2 \leq x \leq 1/2$ e crescente per $x > 1/2$. I punti uniti si trovano risolvendo l'equazione $x = \max \left\{ \frac{1}{4}, x^2 \right\}$ che ha come soluzioni $x = 1/4$ e $x = 1$. Anche $x = +\infty$ è un possibile limite della successione (x_k) per $k \rightarrow +\infty$ in quanto soddisfa l'equazione dei punti uniti. La funzione data ha derivata nulla in $x = 1/4$, che pertanto è stabile, e derivata pari a $2 > 0$ in $x = 1$, che è pertanto instabile. Si verifica facilmente che il limite della successione è $x = 1$ se $x_0 = \pm 1$; il limite è $x = 1/4$ per $|x_0| < 1$, mentre il limite è $+\infty$ per $|x_0| > 1$.

`esempio2.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni – quindi nel caso $k \rightarrow +\infty$ si deve scegliere N opportunamente elevato) e il valore iniziale x_0 (chiamato `s(1)` in `esempio2.m`).

```

% Name:      esempio2.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   03 Apr 2007
% Purpose:   Compute x(k+1) = max(1/4,x(k)^2)
% Input:     Number of total iterations and x(1)
% Output:    Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

```

```

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1): ');

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
    s(n+1)    = max(1/4,s(n)^2);
    disp(s(n+1));
    x(2*n)    = s(n);
    y(2*n)    = s(n+1);
    x(2*n+1)  = s(n+1);
    y(2*n+1)  = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

% Display value of s(m)
disp(s(m));

% Plot f(x), x and path
t=linspace(-1.5,1.5,500);
plot(t,max(1/4,t.^2),'-g;max(1/4,t^2);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');

```

1.3 Esercizio

Calcolare il limite della successione definita da

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} = \int_0^{x_k} e^{-t^2} dt.$$

1.3.1 Risoluzione

Si noti che $x_{k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x_k)$, ovvero $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$. Essendo $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente ed essendo $x_2 < x_1$ la successione è decrescente. L'unico punto fisso che soddisfa l'equazione $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$ è $x = 0$, che risulta il limite della successione in quanto essa è decrescente e $x_0 = 1$.

`esempio3.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input solo N (numero di iterazioni) essendo il valore iniziale $x_0 = 1$ fissato.

```
% Name:      esempio3.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   03 Apr 2007
% Purpose:   Compute x(k+1) = integrate(exp(-t^2),t,0,x(k))
% Input:     Number of total iterations and x(1)
% Output:    Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=1.0;

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
    s(n+1)    = sqrt(pi)*erf(s(n))/2.0;
    disp(s(n+1));
    x(2*n)    = s(n);
    y(2*n)    = s(n+1);
    x(2*n+1)  = s(n+1);
    y(2*n+1)  = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
```

```

gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(0,1.5,500);
plot(t,sqrt(pi)*erf(t)/2.0,'-g;sqrt(pi)*erf(x)/2;','t,t','-b;x;','x,y','+-');

```

1.4 Esercizio

Si consideri l'equazione

$$x^k = \cos \frac{x}{k}.$$

1. provare che esiste un'unica soluzione $x_k > 0$;
2. provare che (x_k) rimane limitata;
3. calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow \infty$.

1.4.1 Risoluzione

1. Disegnando un grafico approssimato di $y = x^k$ e $y = \cos \frac{x}{k}$, si osserva facilmente che si intersecano in un solo punto $x_k \in (0, 1)$ (si osservi che, per k pari, le intersezioni sono due, di cui una sola positiva).
2. A seguito del punto precedente, la successione stessa (x_k) rimane limitata tra 0 e 1.
3. Al tendere all'infinito di k la funzione $y = \cos \frac{x}{k}$ diventa sempre più "piatta" (costante) nell'intorno di $x = 1$ dove vale 1 in quanto l'argomento del coseno tende a zero. Siccome, per $k \rightarrow +\infty$, $x = 1$ soddisfa l'equazione $x^k = \cos \frac{x}{k}$, il limite della successione è 1.

`esempio4.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale di tentativo per la funzione che calcola la radice $x_k > 0$. Si consiglia di fornire un valore $0 < x_{\text{guess}} < 1$.

```

% Name:      esempio4.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   04 Apr 2007
% Purpose:   Compute the solution of x^k = cos (x/k)
% Input:     Number of total iterations and x0 for nonlinear solver
% Output:    Plot x^k and cos (x/k)

```

```

% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value for nonlinear solver.
x0=input('Input x0 (initial value for nonlinear solver): ');

% Create a vector needed for plots
t=linspace(-1.1,1.1,500);

% Loop on all functions
for n=1:1:m
    % set range for plot
    gset xrange[-1.1:1.1]

    % set attributes for plots
    attr1=['-g;t^' int2str(n) ',';'];
    attr2=['-b;cos(t/' int2str(n) ');'];

    % plot of x^n and cos(x/n)
    plot(t,t.^n,attr1,t,cos(t/n),attr2);

    % define the function
    fun= ["x^" int2str(n) "-cos(x/" int2str(n) ")"];

    % compute zero closest to x0 and display it
    s(n)=fsolve(fun,x0);
    disp(s(n))

    % Wait for keypressed
    disp('Please press a key to continue...');
    pause();
end

```

1.5 Esercizio

Si consideri la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k},$$

con $\lambda \geq 0$. Calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow \infty$.

1.5.1 Risoluzione

Essendo $f(x) = \frac{x}{1+x}$ strettamente crescente per $x \geq 0$, essendo $x = 0$ il suo unico punto unito, ed essendo $x_2 < x_1$, la successione è strettamente decrescente ed ha come limite $x = 0 \forall x_0 \geq 0$. Alternativamente, si osservi che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1/(x+1)^2 = 1^-$ e quindi l'origine è stabile. Si osservi che la successione data modella una legge di crescita di una popolazione con risorse limitate e tasso di natalità inversamente proporzionale alle dimensioni della popolazione, pertanto condannata all'estinzione.

`esempio5.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_0 = \lambda$.

```
% Name:      esempio5.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   04 Apr 2007
% Purpose:   Compute x(k+1) = x(k)/( 1 + x(k) )
% Input:     Number of total iterations and x(1)
% Output:    Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1) (initial value): ');

if(s(1)<0)
    disp('s(1)<0: stopping...')
    return
endif

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
    s(n+1)    = s(n)/(1.+s(n));
    disp(s(n+1));
    x(2*n)    = s(n);
```



```

    y(2*n)      = s(n+1);
    x(2*n+1)    = s(n+1);
    y(2*n+1)    = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(0,1,500);
plot(t,t./(1.+t),'-g;t/(1+t);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');

```

1.6 Esercizio

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \quad x_{k+1} = 4 \int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau} + 1)^2} d\tau.$$

1.6.1 Risoluzione

Si osservi che $x_{k+1} = 4 \int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau} + 1)^2} = 1 - \frac{2}{e^{2x_k} + 1}$, pertanto $f(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$. Essa è una funzione sempre crescente che ha come unico punto unito $x = 0$, dove la sua derivata prima vale $f'(0) = 1$. Pertanto l'origine è un punto unito stabile. Alternativamente, si osservi che $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione è sempre crescente. Pertanto anche la successione è monotona. Partendo da $x_0 > 0$ si ha $x_1 < x_0$ e quindi la successione è decrescente e converge a 0. Partendo da $x_0 < 0$ si ha $x_1 > x_0$ e quindi la successione è crescente e converge a 0. Partendo da $x_0 = 0$, il limite rimane tale.

`esempio6.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_0 = \lambda$.

```

% Name:      esempio6.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   04 Apr 2007
% Purpose:   Compute x(k+1) = 4*integrate(4*(exp(2*t))/(1+exp(2*t))^2,t,o,x(k))
% Input:     Number of total iterations and x(1)
% Output:    Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

```

```

% Clear all variables

```

```

clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1) (initial value): ');

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
    s(n+1) = 1. - 2./(exp(2.*s(n))+1.);
    disp(s(n+1));
    x(2*n) = s(n);
    y(2*n) = s(n+1);
    x(2*n+1) = s(n+1);
    y(2*n+1) = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(-2,2,500);
plot(t,1. - 2./(exp(2.*t)+1.),'-g;1-2/(exp(2*t)+1);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');

```

1.7 Esercizio

Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = x_k + x_{k-1}^2.$$

1.7.1 Risoluzione

Si noti che la successione è strettamente crescente essendo $x_{k+1} - x_k = x_{k-1}^2 > 0 \forall x_{k-1} \neq 0$ e quindi la successione diverge a $+\infty \forall x_1 > 0$.

`esempio7.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_1 = \lambda > 0$.

```
% Name:      esempio7.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   03 Apr 2007
% Purpose:   Compute  $x(k+1) = x(k) + [x(k-1)]^2$ 
% Input:     Number of total iterations and  $x(2)$ 
% Output:    Plot of  $x(k)$  versus  $k$  and  $x(k+1)$  versus  $x(k)$ 
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=0.;
s(2)=input('Input s(2) (second initial value): ');

% Display value of s(1) and s(2)
disp(s(1));
disp(s(2));

% Loop on all points
for n=2:1:m-1
    s(n+1)    = s(n) + s(n-1)^2;
    disp(s(n+1));
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

disp('');
disp(s(m))
```

1.8 Esercizio

Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \quad x_{k+1} = \log(1 + x_k).$$

1.8.1 Risoluzione

Si noti che $f(x) = \log(1 + x)$ è strettamente crescente pertanto anche la successione (x_k) è monotona. Essendo $x = 0$ l'unico punto unito, e $x_1 < x_0 \forall x_0 > 0$, la successione è decrescente e converge a zero. Alternativamente, si osservi che $f'(0) = 1/(1 + x)$, quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1/(x + 1) = 1^-$ e pertanto l'origine è stabile.

`esempio8.m` riporta la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_0 = \lambda > 0$.

```
% Name:      esempio8.m
% Author:    Simone Zuccher
% Created:   03 Apr 2007
% Purpose:   Compute x(k+1) = log( 1 + x(k) )
% Input:     Number of total iterations and x(1)
% Output:    Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1) (initial value): ');

% Set s(1) positive if negative
if(s(1)<0)
    s(1)=abs(s(1));
endif

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
```

```

s(n+1)      = log(1.+s(n));
disp(s(n+1));
x(2*n)      = s(n);
y(2*n)      = s(n+1);
x(2*n+1)    = s(n+1);
y(2*n+1)    = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(-.5,2,500);
plot(t,log(1.+t),'-g;log(1+t);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');

```