Università di Verona
Dipartimento di Informatica

Sistemi avanzati per il riconoscimento

http://www.adherents.com/lit/comics/img/p/PlasticMan.jpg

Descrittori di forma

Introduzione

- **Descrittore di forma**:
  - insieme di numeri prodotti per descrivere una forma
- l'importante è che i descrittori di forma siano **discriminativi** nei confronti della forma che individuano
- Avvertenze: come contare i pixel dei contorni?
  - 1 per i pixel 4-connessi
  - sqrt(2) per i pixel 8-connessi (i pixel diagonali)

Descrittori elementari

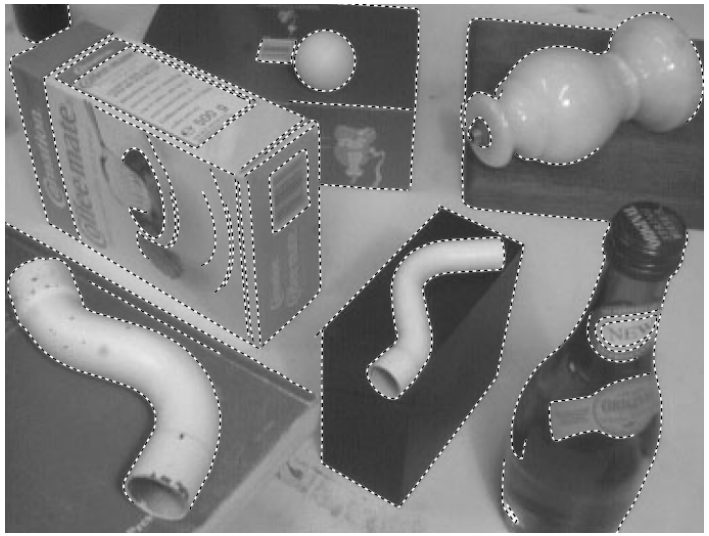
- Alcuni semplici descrittori di forma:
  - **Area**: il numero di pixel contenuti nella forma
  - **Perimetro**: il numero di pixel sul contono della forma
  - **(Non)Compattezza o (non)circolarità**: perimetro^2/area
    - la forma più compatta è il cerchio (4π), tutte le altre forme hanno compattezza > 4π
  - **Eccentricità**: il rapporto tra la corda piu' lunga nella forma e la più lunga corda perpendicolare ad essa
  - **Rettangolarità**: quanto rettangolare è una forma: area della forma/area della bounding-box
  - **Orientazione**: angolo dell'asse maggiore della forma

Tassonomia

- Esistono 2 tipologie di descrittori di forma:
  - **Region-based**
    - basati sull'area della forma
  - **Boundary-based**
    - basati sugli edge della forma 

Descrittori di forma basati sul contorno –spline

- Spline: curve parametriche
  - nello spazio, parametro s, crescente, reale
    - s determina lo sviluppo della curva
    - x(s), y(s)= < x(s), y(s)>, con x,y particolari funzioni spline
  - nel tempo, parametro t
    - r(s,t)=< x(s,t), y(s,t)>
- Spline di ordine d
  - funzione polinomiale a tratti
  - ogni tratto (= span) polinomio di ordine d



Descrittori di forma basati sul contorno –spline

- Ordine = numero di coefficienti necessari a definire un polinomio
- Grado = massimo esponente del polinomio

$$a + bx + cx^2$$

- Ordine = 3, grado = 2
- Di solito si usano polinomi di ordine 3 o 4
- Per approssimare una curva qualunque
  - Si aumenta l'ordine
  - si aumenta il numero di span (scelta migliore computazionalmente)

Descrittori di forma basati sul contorno – B-spline

- Una spline x(s) puo' essere vista come somma pesata di funzioni base (le B-spline, appunto) $B_n(s)$, n=0,...,N_B-1 – da cui si parla di rappresentazione tramite B-spline, o semplicemente B-spline

$$x(s) = \sum_{n=0}^{N_B-1} x_n B_n(s) \qquad \text{pesi}$$

$$x(s) = \mathbf{B}(s)^T \mathbf{Q}^x$$

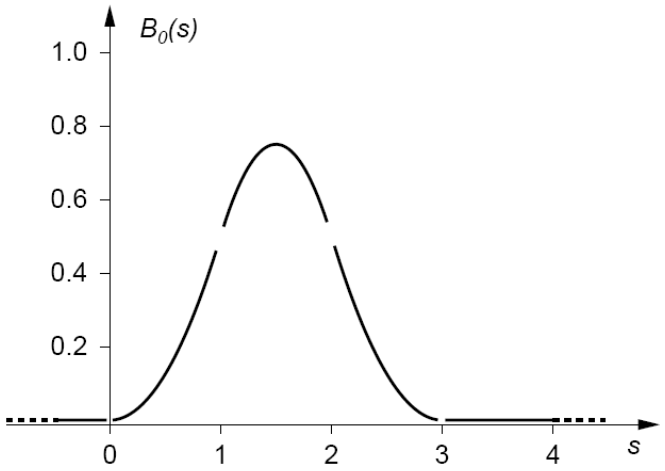
$$\mathbf{Q}^x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N_B-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(s) = (B_0(s), B_1(s), \ldots, B_{N_B-1}(s))^T$$

- Nel caso più semplice (caso regolare) ogni funzione base è rappresentata da d polinomi ognuno definito su uno span
- Per semplicità, definiamo uno span avente lunghezza unitaria
- Tutti gli span sono collegati in corrispondenza di nodi (*knots*)
- In questo caso, la curva risultante ha continuità d-2

Funzione di base

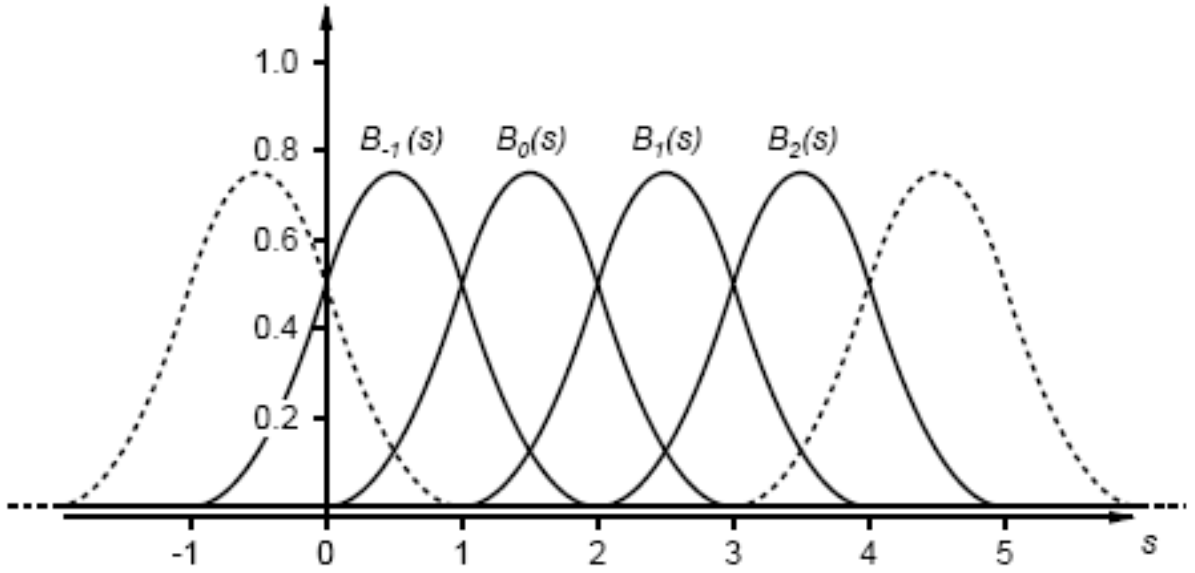
- Esempi:



$$B_0(s) = \begin{cases} s^2/2 & \text{if } 0 \le s < 1 \\ \frac{3}{4} - (s - \frac{3}{2})^2 & \text{if } 1 \le s < 2 \\ (s-3)^2/2 & \text{if } 2 \le s < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Funzione base $B_0(s)$ di ordine 3
- definita su 3 span
- parte da s=0

Funzioni di base – basi equispaziate



- Esempi:

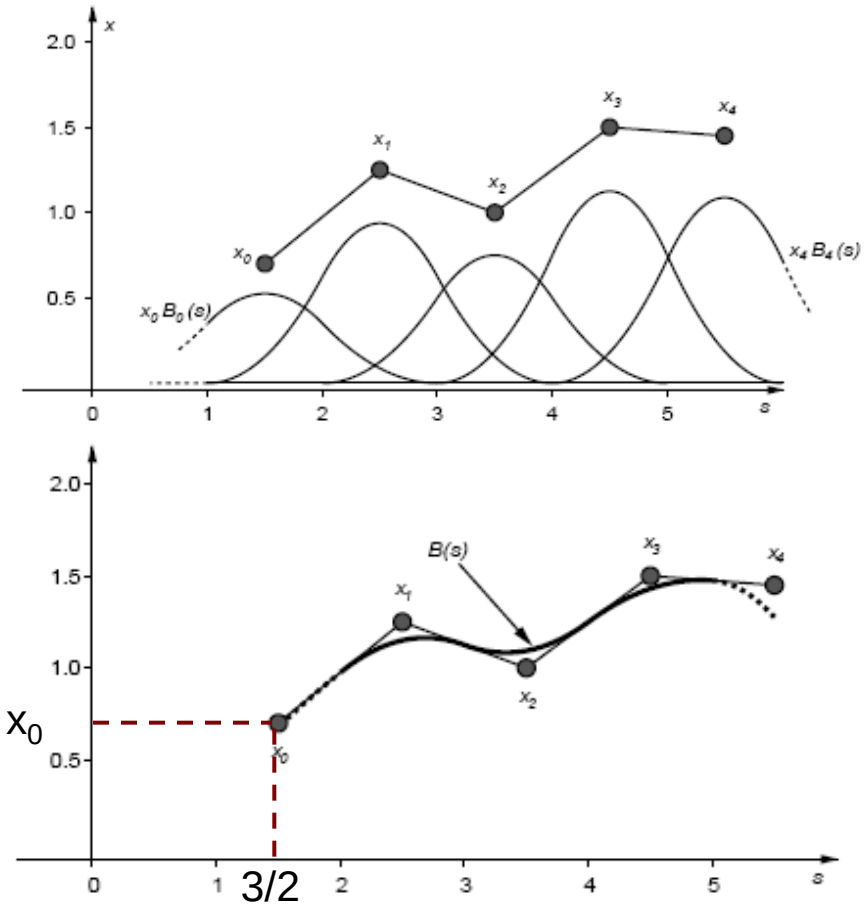
- Le spline si possono localizzare $B_n(s) = B_0(s - n)$

- Le basi in teoria si definiscono anche all'infinito, in pratica $0 \leq s \leq L$

Creazione di una B-spline

- Esempi:

$$\mathbf{Q}^x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N_B-1} \end{pmatrix}$$



- Q^x individua la *forma* della curva
- la spline approssima i punti dati da

<ampiezzaspan/2,peso>

Forma spazio-temporale di una B-spline

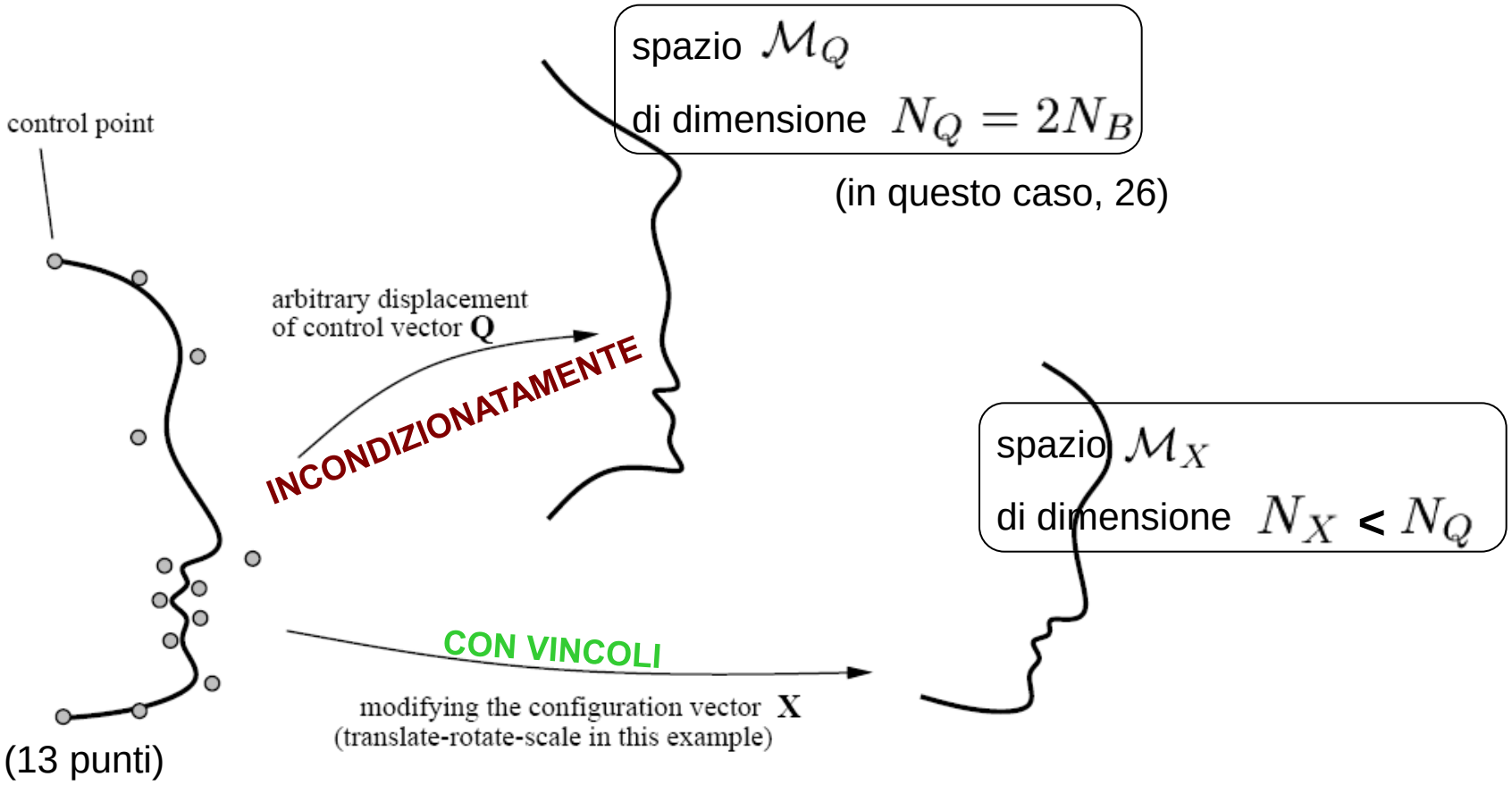
- Generalizzando, nel caso di una curva in 2D, tempo-variante, avro' $\mathbf{r}(s,t)$

$$\mathbf{r}(s,t) = (\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{Q}^x(t),\ \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{Q}^y(t)) \quad \text{for} \quad 0 \leq s \leq L$$

con $$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^x \\ \mathbf{Q}^y \end{pmatrix}$$

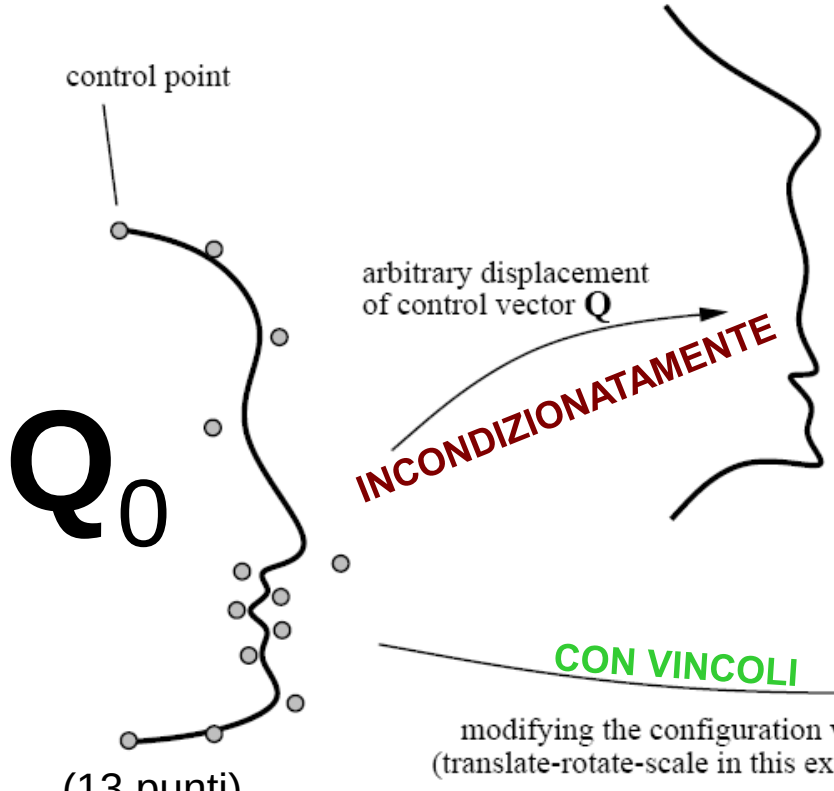
Evoluzione di una B-spline

- Come posso modificare **Q**? Due scelte:



Evoluzione vincolata di una B-spline

- Come posso modificare **Q**? Due scelte:



$$\mathbf{Q}=W\mathbf{x}+\mathbf{Q}_0$$

- W = matrice di *traduzione* o "*shape matrix*" N_Q x N_X
- **x** = vettore *di forma*, $\in \mathbb{R}^{N_X}$

Trasformazioni

- Voglio avere trasformazioni affini
  - Classe di trasformazioni 2D lineari geometriche che mappano variabili (valori di intensità di pixel localizzati in un'immagine) in nuove variabili (in un'immagine di output), applicando una **combinazione lineare** di
    - **traslazioni**,
    - **rotazioni**,
    - **scalatura**,
    - **shearing**, ossia scalatura non uniforme in determinate direzioni
- E' possibile definire una trasformazione affine di un punto generico appartenente alla curva bspline come

$$\mathbf{r}(s) = \underset{2 \times 1}{\mathbf{u}} + \underset{2 \times 2}{M}\mathbf{r}_0(s)$$

Trasformazioni affini

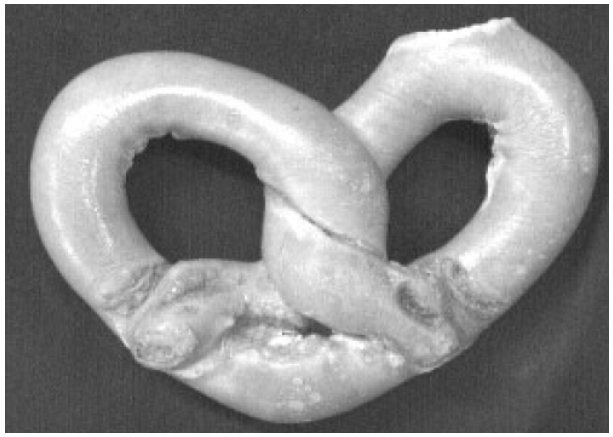
$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{u} + M\mathbf{r}_0(s)$$

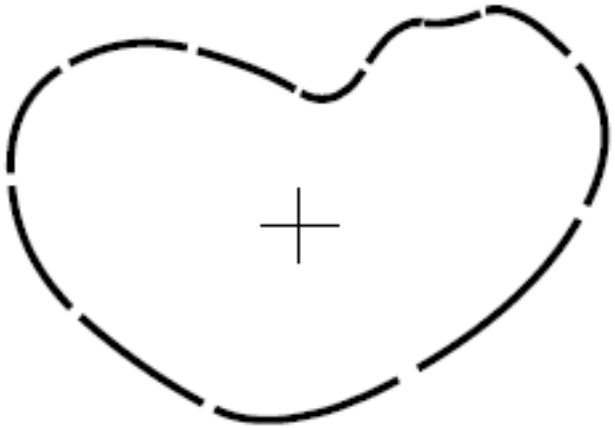
- Traslazione $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rotazione $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
- Scalatura $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$

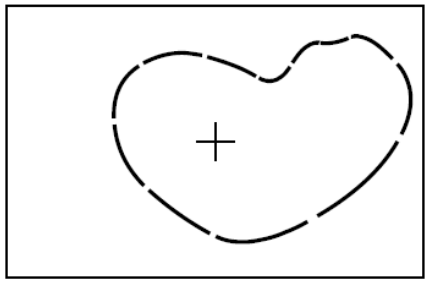
Θ: angolo positivo che indica rotazioni clockwise

Esempi di trasformazioni

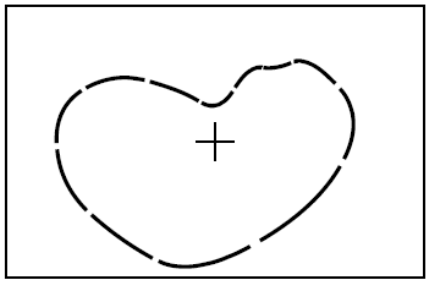
$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{u} + M\mathbf{r}_0(s)$$



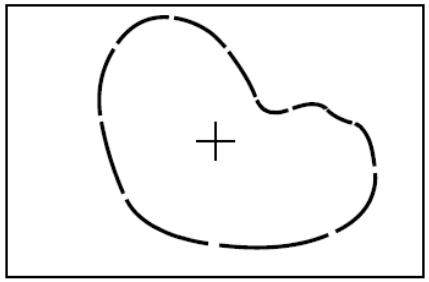




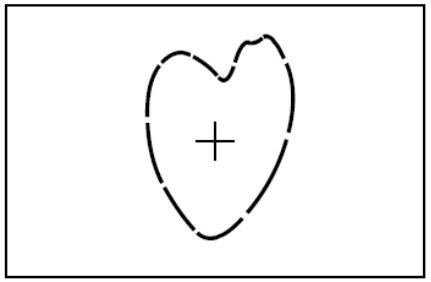
translate horizontally



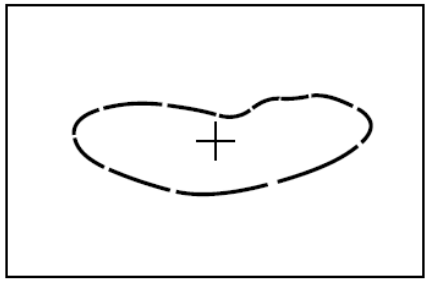
translate vertically



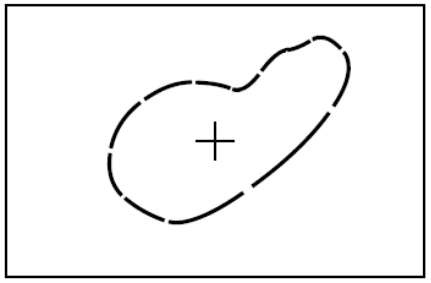
rotate



scale horizontally



scale vertically



scale diagonally

Identificatore di una curva

- Questo significa che ho 6 parametri da settare = 6 *gradi di libertà*
- Questi gradi di libertà possono essere linerizzati su un unico vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Nx=6}$

$$\mathbf{x} = (u_1, u_2, M_{11} - 1, M_{22} - 1, M_{21}, M_{12})^T$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{W}\mathbf{x}+\mathbf{Q}_0$$

Matrice di traduzione-*shape matrix*

- La matrice di traduzione è

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^y \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_0^x & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

x y — traslazioni

(riguardano) — rotazioni/scaling

$\mathbf{1} = (1\ 1\ \ldots\ 1)^T$
$\mathbf{0} = (0\ 0\ \ldots\ 0)^T$

sono vettori con N_B componenti
(= numero di funzioni base localizzate
~ numero di pesi = numero punti di controllo)

$$\mathbf{Q=Wx+Q_0}$$

Esempi di identificatori

- Dati:

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^y \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_0^x & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (u_1, u_2, M_{11} - 1, M_{22} - 1, M_{21}, M_{12})^T$$

in pratica:

$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ represents the original template shape $\mathbf{Q}_0$

$\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ represents the template translated 1 unit to the right,

$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)^T$ represents the template doubled in size

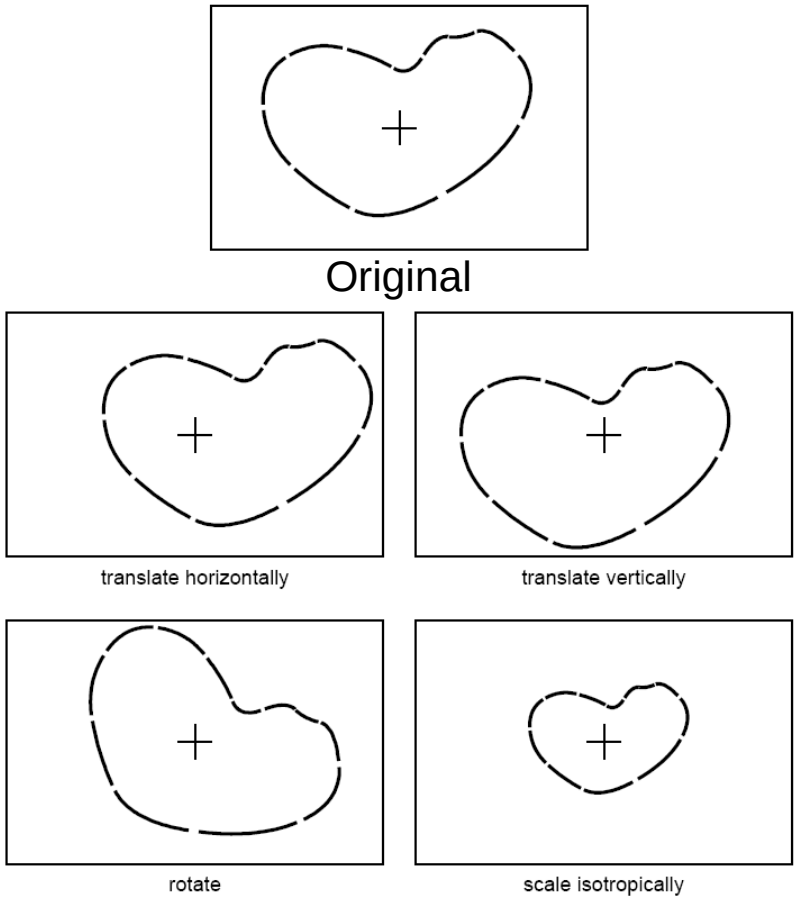
$\mathbf{x} = (0, 0, \cos\theta - 1, \cos\theta - 1, -\sin\theta, \sin\theta)^T$ represents the template rotated through angle θ

$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ represents the template doubled in width

Trasformazioni euclidee

- Semplificando la modellazione, e restringendosi a trasformazioni euclidee ho una diversa matrice di traduzione

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^x & -\mathbf{Q}_0^y \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_0^x \end{pmatrix}$$



Ancora identificatori...

$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0)^T$ represents the original template shape $\mathbf{Q}_0$

$\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T$ represents the template translated 1 unit to the right, so that, from (4.1),

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0)^T$ represents the template doubled in size

$$\mathbf{Q} = 2\mathbf{Q}_0$$

$\mathbf{x} = (0, 0, \cos\theta - 1, \sin\theta)^T$ represents the template rotated through angle θ:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ \mathbf{Q}_0^x - \sin\theta\ \mathbf{Q}_0^y \\ \\ \sin\theta\ \mathbf{Q}_0^x + \cos\theta\ \mathbf{Q}_0^y \end{pmatrix}.$$

Esercizio

Esercizio: a cosa corrisponde questa trasformazione, in termini di fattore di scala e rotazione?

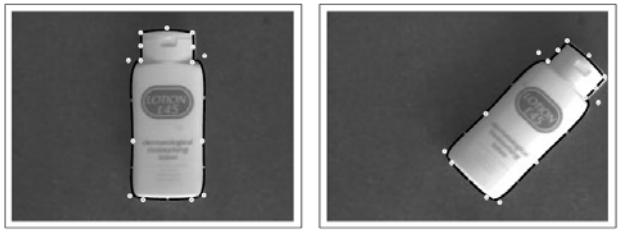
$$\mathbf{x} = (0.465, 0.047, -0.282, -0.698)^T$$

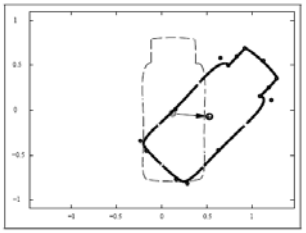
scalatura

rotazione

$$\sqrt{(1-0.282)^2 + 0.698^2} = 1.001$$

$$\arctan(1-0.282, -0.698) = -44.2^o$$



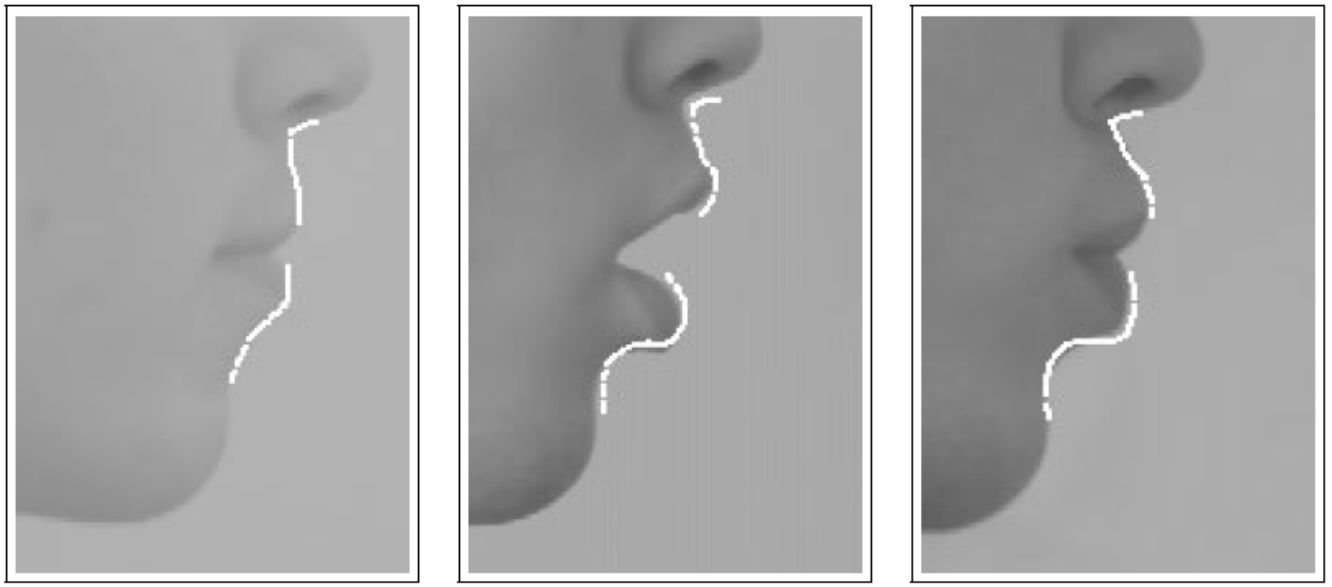


Trasformazioni non rigide

- Le trasformazioni affini/euclidee sono convenienti per modellare l'aspetto del moto 3D di un oggetto rigido
- Per le situazioni di deformazione (moto non rigido) questi strumenti non sono sufficienti
- Due soluzioni:
  1. Utilizzo dei **key-frames**
     - semplice ma poco espressivo
  2. **Learning** dello spazio delle deformazioni
     - si utilizza **PCA**

Trasformazioni non rigide con key frames

- Una curva viene vista come **combinazione lineare** di **forme elementari** (NB: non modello ora alcuna trasformazione)



Template $\mathbf{Q}_0$ *Key-frame: opening* $\mathbf{Q}'_1$ *Key-frame: protrusion* $\mathbf{Q}'_2$

Trasformazioni non rigide con key frames (2)

- Una curva viene vista come **combinazione lineare** di **forme elementari** (NB: non modello ora alcuna trasformazione)
- Parto dalla solita espressione vincolante la forma della curva

$$\mathbf{Q}=W\mathbf{x}+\mathbf{Q}_0$$

- Sfrutto i due k-frames $\mathbf{Q}'_1, \mathbf{Q}'_2$ e costruisco la matrice di traduzione

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^x & \mathbf{Q}_2^x \\ \mathbf{Q}_1^y & \mathbf{Q}_2^y \end{pmatrix}$$

dove

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}'_i - \mathbf{Q}_0$$

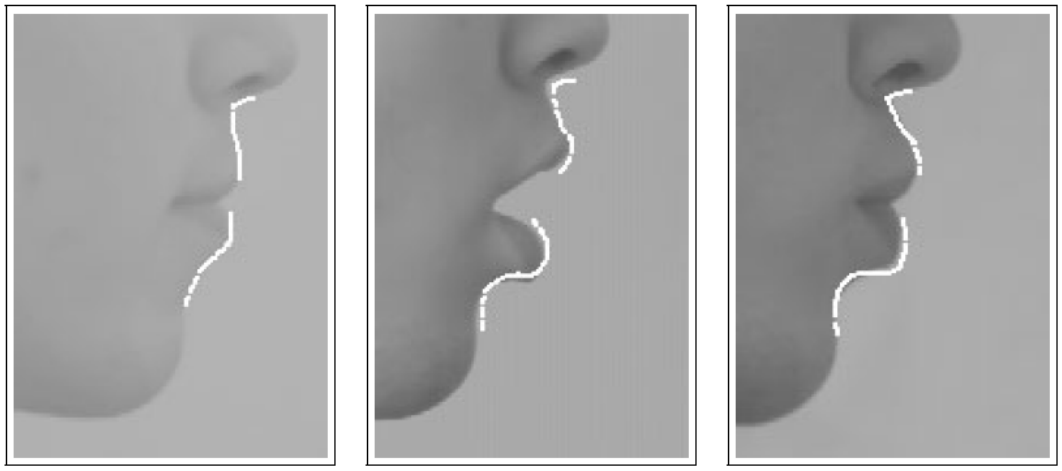
Trasformazioni non rigide con key frames (3)

- A questo punto risulta intuitivo formare nuove configurazioni

$\mathbf{x} = (0,0)^T$ represents the closed mouth;

$\mathbf{x} = (1/2,0)^T$ represents the half-open mouth;

$\mathbf{x} = (1/4,1/2)^T$ represents the mouth, half-protruding and slightly open.



Template $\mathbf{Q}_0$ *Key-frame: opening* $\mathbf{Q}_1'$ *Key-frame: protrusion* $\mathbf{Q}_2'$

Trasformazioni non rigide con key frames (4)

- Per includere le trasformazioni (euclidee), la matrice utile risulta essere

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{Q}_0^x & -\mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_1^x & -\mathbf{Q}_1^y & \mathbf{Q}_2^x & -\mathbf{Q}_2^y \\ 0 & 1 & \mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_0^x & \mathbf{Q}_1^y & \mathbf{Q}_1^x & \mathbf{Q}_2^y & \mathbf{Q}_2^x \end{pmatrix}$$

- quindi:

$\mathbf{x} = (u, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ represents the fully open mouth, shifted to the right by u;

$\mathbf{x} = (0, 0, \cos\theta - 1, \sin\theta, 0, 0, \frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta)^T$ represents the closed mouth, half-protruding and rotated through an angle θ.

Trasformazioni non rigide con key frames - limiti

- Problema:
  - come scegliere i k-frames?
  - quanti k-frames?
    - Se ho una sequenza di M frames, avro' $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$,..., $\mathbf{Q}_M$ forme: sono tutte indicative di forme differenti?

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{Q}_0^x & -\mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_1^x & -\mathbf{Q}_1^y & \mathbf{Q}_2^x & -\mathbf{Q}_2^y \\ 0 & 1 & \mathbf{Q}_0^y & \mathbf{Q}_0^x & \mathbf{Q}_1^y & \mathbf{Q}_1^x & \mathbf{Q}_2^y & \mathbf{Q}_2^x \end{pmatrix}$$

N_X

- Soluzione:
  - uso PCA → ...out of the scope!!!

Studio della dinamica di una B-spline

- Dato una forma in movimento, voglio dedurne la dinamica (da inserire in nel tracking, per esempio)
- Uso un modello auto regressivo (*auto-regressive process*, ARP) del secondo ordine

$$\mathbf{x}_t = A_2\mathbf{x}_{t-2} + A_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{D}_0 + B_0\mathbf{w}_t$$

$\mathbf{w}_t$ = valori estratti da distribuzioni normali

$\mathbf{D}_0$ = matrice di offset deterministica

A_2, A_1 = matrici, componenti deterministiche del sistema

B_0 = matrice, componente stocastica del sistema

Studio della dinamica di una B-spline (2)

$$\mathbf{x}_t = A_2\mathbf{x}_{t-2} + A_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{D}_0 + B_0\mathbf{w}_t$$

- Per semplicità notazionale possiamo vedere anche

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \\ \mathbf{x}_t \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{D} + B\mathbf{w}_t$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

Studio della dinamica di una B-spline (3)

RICORDA: $\mathbf{x}_t = A_2\mathbf{x}_{t-2} + A_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{D}_0 + B_0\mathbf{w}_t$

- Lo studio dei parametri puo' essere formulato da un punto di vista statistico
- Voglio massimizzare la likelihood dei dati, dati i parametri

$$L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M | A_1, A_2, B_0, \mathbf{D}_0) \equiv \log p(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M | A_1, A_2, B_0, \mathbf{D}_0)$$

$$p(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k | A_1, A_2, B_0, \mathbf{D}_0) \propto \prod_{k=3}^{M} p_{B_0\mathbf{w}_k}(\mathbf{x}_k - A_2\mathbf{x}_{k-2} - A_1\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{D}_0)$$

Per l'indipendenza tra i vettori di forma e il rumore

La modello come una normale multivariata

Studio della dinamica di una B-spline (4)

RICORDA: $$\mathbf{x}_t = A_2\mathbf{x}_{t-2} + A_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{D}_0 + B_0\mathbf{w}_t$$

- Pertanto la forma della log-likelihood diventa

$$L(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_M | A_1, A_2, B_0, \mathbf{D}_0) =$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{M} \left| B_0^{-1} \left(\mathbf{x}_k - A_2\mathbf{x}_{k-2} - A_1\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{D}_0\right)\right|^2 - (M-2)\log\det B_0$$

- I parametri buoni danno alta likelihood. Quindi la devo massimizzare. E' una Normale multivariata, ed esiste forma chiusa per la massimizzazione.

Given a training set $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M\}$ of shapes from an image sequence, learn the parameters A_1, A_2, B_0 and $\mathbf{D}_0$ for a second-order AR process that describes the dynamics of the moving shape.

Algorithm

matrice

1. First, sums R_i, $i = 0, 1, 2$ and auto-correlation coefficients R_{ij} and R'_{ij}, $i, j = 0, 1, 2$ are computed:

$$R_i = \sum_{k=3}^{M} \mathbf{x}_{k-i}, \quad R_{ij} = \sum_{k=3}^{M} \mathbf{x}_{k-i}\mathbf{x}_{k-j}^T, \quad R'_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{M-2} R_i R_j^T.$$

2. Estimated parameters $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ and $\hat{\mathbf{D}}_0$ are given by

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= \left(R'_{02} - R'_{01}R'^{-1}_{11}R'_{12}\right)\left(R'_{22} - R'_{21}R'^{-1}_{11}R'_{12}\right)^{-1} \\ \hat{A}_1 &= \left(R'_{01} - \hat{A}_2 R'_{21}\right) R'^{-1}_{11} \\ \hat{\mathbf{D}}_0 &= \frac{1}{M-2}\left(R_0 - \hat{A}_2 R_2 - \hat{A}_1 R_1\right). \end{aligned}$$

3. The covariance coefficient B_0 is estimated as a matrix square root $\hat{B}_0 = \sqrt{\hat{C}}$ where

$$\hat{C} = \frac{1}{M-2}\left(R_{00} - \hat{A}_2 R_{20} - \hat{A}_1 R_{10} - \hat{\mathbf{D}}_0 R_0^T\right).$$

Fitting di una B-spline sull'immagine

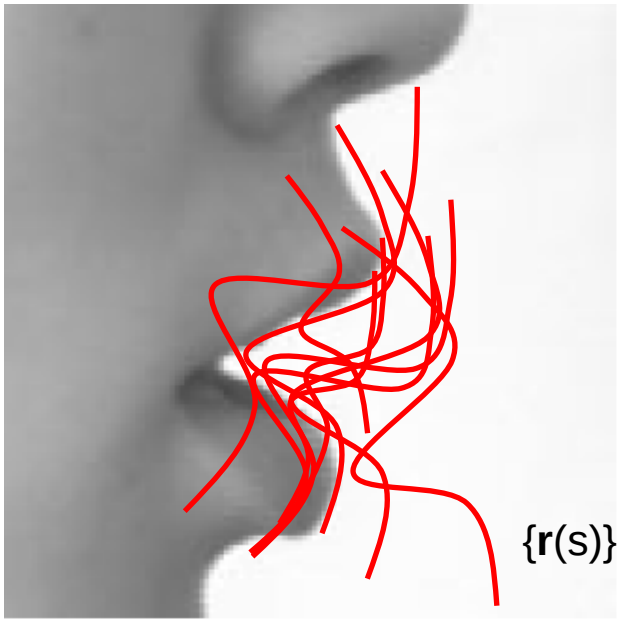
- Manualmente,
  - determino i punti sul contorno della forma, calcolo la B-spline
  - aumento gli span fino a quando sono soddisfatto del fitting
- Automaticamente
  - A partire da una forma binaria (ottenuta per esempio via sottrazione del background)
    - estraggo il perimetro
    - campiono il perimetro con una frequenza a piacere, ottengo i nodi
    - calcolo la B-spline

Applicazione di una B-spline a Condensation

- Parto da uno stato piu' probabile (la posterior) $\mathbf{x}_{t-2}$
- Ogni particella è un vettore $\mathbf{x}_{t-1}$ che determina **Q**, da cui origina una B-spline **r**(s)
- La fase di **selezione o campionamento** produce un numero alto di campioni $\{\mathbf{x}_{t-1}\}$
- Ad essi applico la dinamica, ottenendo $\{\mathbf{x}_t\}$

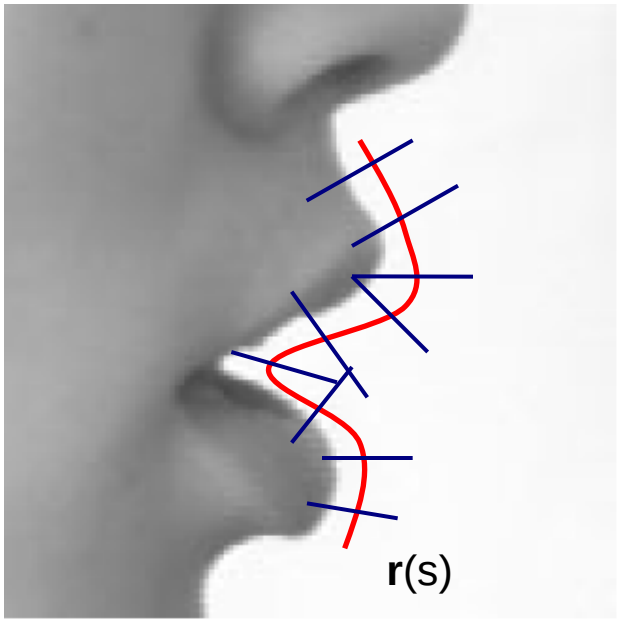
$$\mathbf{x}_t = A_2\mathbf{x}_{t-2} + A_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{D}_0 + B_0\mathbf{w}_t$$

Applicazione di una B-spline a Condensation (2)



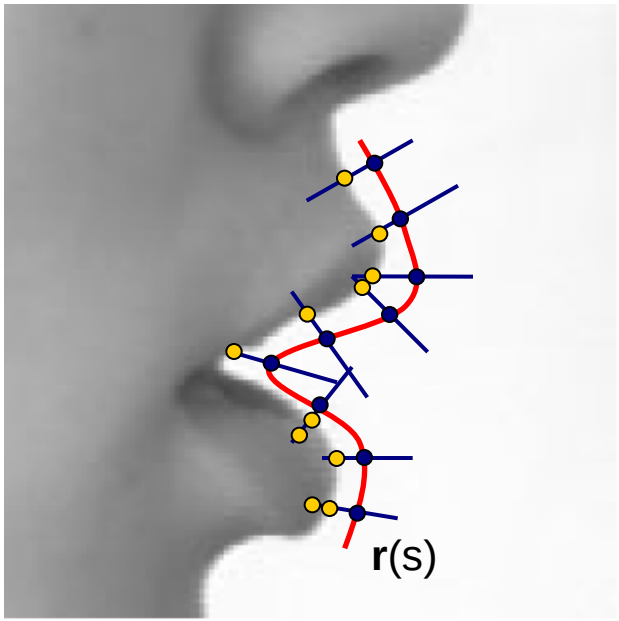
- La fase di **valutazione** valuta la spline che fitta meglio l'obiettivo

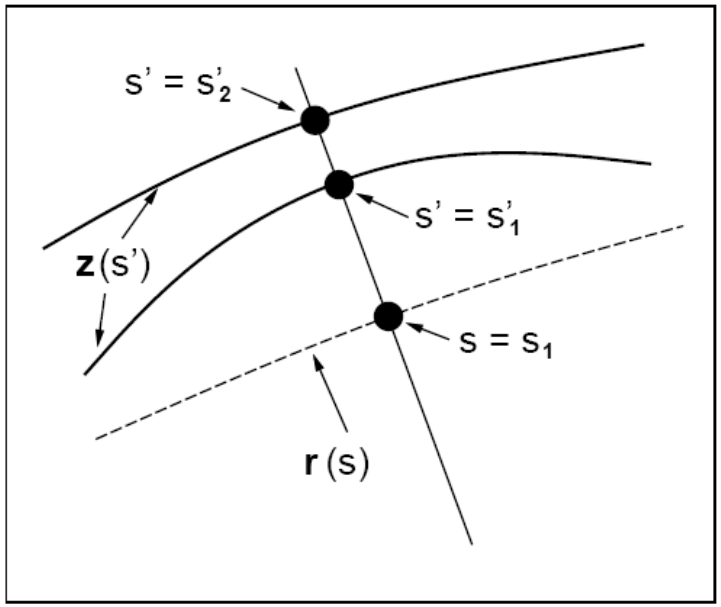
Applicazione di una B-spline a Condensation (3)



- in corrispondenza di M punti equispaziati sulla curva, costruisco dei segmenti normali, di lunghezza fissata a priori

Applicazione di una B-spline a Condensation (4)





- su ogni normale, calcolo gli edge
- noto che si puo' verificare la presenza di piu' edge in corrispondenza di una normale

Applicazione di una B-spline a Condensation (5)

- La funzione di pesatura o valutazione è

$$p(\mathbf{Z}|\mathbf{x}) \propto \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2rM} f(\mathbf{z}_1(s_m) - \mathbf{r}(s_m); \mu)\right\}$$

dove

$$\mathbf{z}_1(s) = \mathbf{z}(s')$$

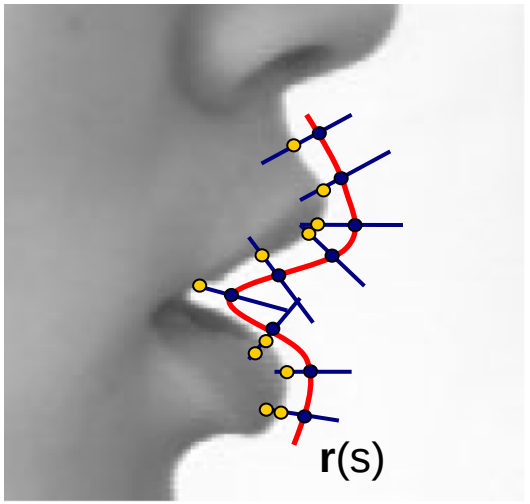
con

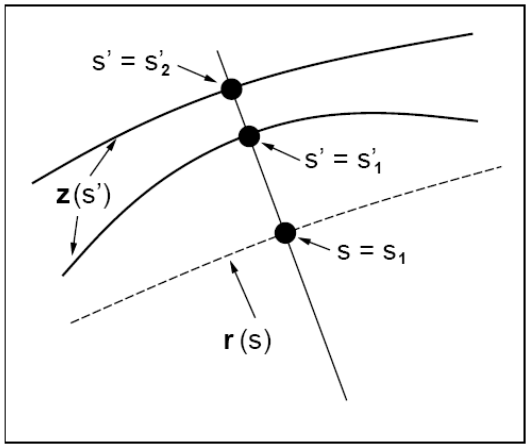
$$s' = \arg \min_{s' \in \text{ normale}} |\mathbf{r}(s) - \mathbf{z}(s')|$$

e

- $f(\nu; \mu) = \min(\nu^2, \mu^2)$

- μ scelta opportunamente





Applicazione di una B-spline a Condensation (6)

- Nota che la sottrazione del background puo' essere inserita nel framework