Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 13 dicembre 2007 — Compito A

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

1 – Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. È vero che $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

2 – Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. L'insieme $\{\mathbf{v}_1; 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2\}$ è linearmente indipendente?

3 – Esiste una matrice $\mathbf{A}$, 3×2, di rango 3?

Scrivere chiaramente sul primo foglio le risposte alle domande iniziali, con una breve giustificazione. Non saranno presi in considerazione compiti in cui manchino le risposte a queste domande.

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice abbia inversa sinistra.

T2) Dato un insieme linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ nello spazio vettoriale euclideo V, si dimostri che esiste un insieme ortonormale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per $1 \le i \le n$, $\langle \mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_i \rangle$.

E1) Sia α un numero complesso e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

• Trovare una decomposizione LU di $\mathbf{A}_\alpha$ e, dove non è possibile, la decomposizione P^TLU.
• Per $\alpha = 0$, trovare una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$.
• Per $\alpha = 1$, trovare la proiezione ortogonale su $N(\mathbf{A}_1)$ di $[-1\ 0\ 2\ 1]^T$.
• Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema, si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzione.

E2) L'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ ha come matrice associata, rispetto alla base $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ su dominio e codominio, la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T,$$

si calcoli la dimensione dell'immagine di f e si dica se il vettore $[1\ 0\ 1]^T$ appartiene all'immagine di f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & 2\beta & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori di β trovare una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e si scrivano le matrici $\mathbf{S}$ e $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{B}_\beta = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$