

## Dinamica del punto materiale: lavoro e energia.

**Problema n. 1:** Un'automobile, assimilabile a un corpo puntiforme, si muove lungo un piano orizzontale sotto l'azione: i) della forza di un motore che eroga una potenza costante di 10 kW; ii) dell'attrito cinematico radente con coefficiente di attrito  $\mu_d = 0.1$ ; iii) della forza peso e della corrispondente reazione vincolare del piano orizzontale. In queste condizioni il corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante di modulo  $v_0 = 50$  m/s. Determinare:

- (a) la forza che il motore esercita sul corpo puntiforme; [ $F_0 = P/v_0 = 200$  N]  
 (b) la massa del corpo; [ $m a = F_0 + F_A = 0$ ;  $F_0 - \mu_d mg = 0$ ;  $m = F_0 / (\mu_d g) = 204.08$  kg]

Assumendo che al tempo  $t=0$  il motore venga spento, si calcoli:

- (c) la lunghezza del tratto rettilineo che il punto percorre prima di fermarsi; [ $W' = E_{k,f} - E_{k,0}$ ;  $-\mu_d mgd = -E_{k,0}$ ;  $d = E_{k,0} / (\mu_d mg) = 1275.51$  m]  
 (d) il tempo impiegato dal corpo puntiforme a fermarsi. [ $t_f = \sqrt{2d / (\mu_d g)} = 51.02$  s]



**Problema n. 2:** Un'automobile, assimilabile a un corpo puntiforme, si muove di moto rettilineo con velocità costante di modulo  $v_0 = 20$  m/s in salita lungo una strada inclinata di  $\alpha = 16.5^\circ$  rispetto al piano orizzontale. Il corpo si muove sotto l'azione delle seguenti forze:

- 1) forza di un motore che eroga una potenza costante di 25 kW;
- 2) sua forza peso e corrispondente reazione vincolare del piano inclinato;
- 3) forza d'attrito cinematico radente, caratterizzata da un coefficiente di attrito  $\mu_d = 0.2$ .

Determinare:

- (a) la forza che il motore esercita sull'automobile;  
 (b) la massa dell'automobile.

Supponendo che a un certo istante di tempo ( $t=0$ ) il motore venga spento, si calcoli:

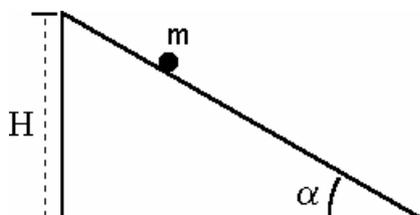
- (c) la lunghezza del tratto rettilineo che l'automobile percorre lungo la salita prima di fermarsi;  
 (d) la velocità con cui ripassa dalla posizione occupata all'istante  $t = 0$ , durante il successivo moto di discesa (si supponga che il coefficiente di attrito statico sia  $= 0.25$ ).

**Problema n. 3:** Un cane tira una slitta di massa  $m = 60$  kg lungo una strada ghiacciata inclinata di un angolo di  $\alpha = 10^\circ$  sull'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e la strada è  $\mu_d = 0.1$ . Assumendo che il cane tiri la slitta parallelamente alla superficie della strada sviluppando una potenza costante di 80 W, determinare:

- (a) la velocità della slitta; [ $v = 0.5$  m/s]  
 (b) la frazione di potenza sviluppata dal cane che viene spesa per vincere l'attrito; [ $P_a = 36.2\%$ ]  
 (c) la frazione di potenza che viene spesa per compiere lavoro contro la forza di gravità; [ $P_g = 63.8\%$ ]  
 (d) il lavoro fatto dal cane per spostare la slitta di 25 m lungo la strada in salita. [ $W = P \Delta t = 4 \times 10^3$  J]

**Problema n. 4:** Un corpo puntiforme di massa  $m = 5$  kg viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla lungo un piano inclinato di  $\alpha = 30^\circ$  sul piano orizzontale da un'altezza  $H=2$  m rispetto a questo piano. Il corpo striscia lungo il piano inclinato con coefficiente d'attrito dinamico  $\mu_d=0.2$ , fino a raggiungere la base del piano stesso. Calcolare:

- (a) il lavoro della risultante delle forze agenti sul corpo dopo che il corpo ha raggiunto la base del piano inclinato; [ $W_T = mgH - \mu_d mg \cos\alpha H/\sin\alpha = 64.05$  J]  
 (b) la velocità con cui il corpo arriva alla base del piano inclinato; [ $v_B = \sqrt{2 W_T/m} = 5.06$  m/s]  
 (c) il tempo impiegato dal corpo per raggiungerla. [ $t = \sqrt{2 L/a} = \sqrt{4H/g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)} = 1.58$  s]



**Problema n. 5:** Un corpo di massa  $m$  è appoggiato su un piano inclinato di angolo  $\alpha = 30^\circ$ . Il corpo, inizialmente in quiete ad un'altezza  $H = 1.5$  m rispetto al piano orizzontale, è lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Il coefficiente di attrito statico è noto e pari a  $\mu_s = 0.4$ , mentre quello cinematico è  $\mu_d = 0.25$  sia sul piano inclinato che sul piano orizzontale. Determinare:

- con quale velocità  $v_1$  il corpo arriva alla base del piano inclinato;
- la distanza  $d$  percorsa dal corpo sul piano orizzontale prima di arrestarsi.

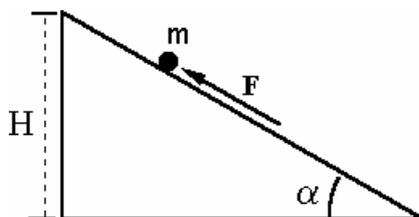
**Nota Bene:** Si assuma che il raccordo tra piano inclinato e piano orizzontale avvenga mediante un breve profilo curvo privo di spigoli.

**Problema n. 6:** Un blocco di massa  $m = 80$  kg, sta scivolando lungo un piano inclinato formante un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con il piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e il piano è  $\mu_d = 0.2$ . Una forza  $\mathbf{F}$  parallela alla superficie del piano inclinato spinge il blocco in modo da farlo scendere lungo il piano stesso con velocità costante di modulo pari a  $v = 1.25$   $\text{ms}^{-1}$ . Determinare:

- l'intensità e il verso della forza  $\mathbf{F}$ ; [ $\mathbf{F} = -256.47$  N  $\mathbf{i}$ ]
- la potenza dissipata dalla forza di attrito; [ $P = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{v} = -\mu_d mg \cos\alpha v = -169.91$  W]
- la potenza sviluppata dalla forza peso. [ $P = \mathbf{mg} \cdot \mathbf{v} = mg \sin\alpha v = 490.5$  W]

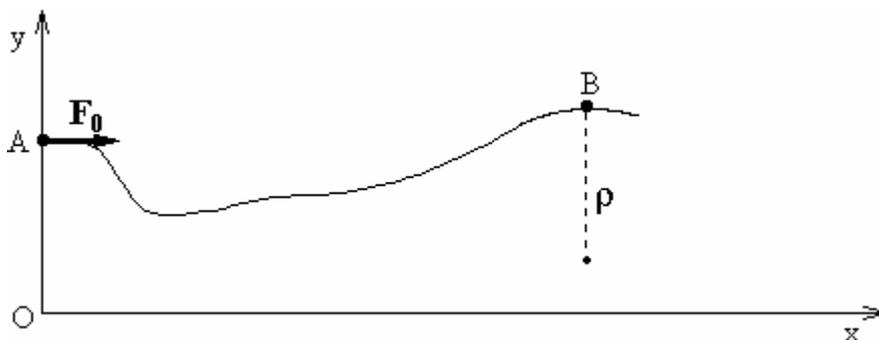
Assumendo che all'istante  $t=0$  il blocco si trovi ad un'altezza  $H = 10$  m dal suolo, calcolare, con riferimento all'istante in cui il blocco raggiunge la base del piano inclinato:

- il lavoro fatto dalla forza  $\mathbf{F}$ ; [ $W_F = -F L = -5129.4$  J]
- il lavoro fatto dalla forza di gravità; [ $W_{mg} = mg H = +7848$  J]
- il lavoro fatto dalla reazione vincolare della superficie del piano inclinato; [ $W' = -\mu_d mg \cos\alpha (H/\sin\alpha) = +2718.6$  J]
- la variazione di energia meccanica del blocco. [ $\Delta E_M = E_{M,f} - E_{M,0} = (\frac{1}{2}) mv^2 - [(\frac{1}{2}) mv^2 + mg H] = -mgH = -7848$  J]



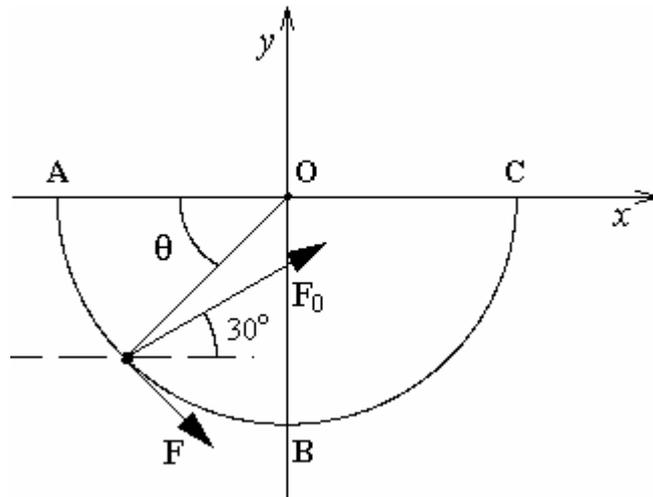
**Problema n. 7:** Un corpo puntiforme di massa  $m = 5$  kg si muove nel piano verticale Oxy lungo la guida curvilinea perfettamente liscia (vincolo bilaterale) rappresentata in figura. Il corpo è soggetto anche all'azione una forza costante, di intensità  $F_0 = 15$  N e diretta orizzontalmente. All'istante  $t = 0$  il corpo si trova nella posizione A, di ascissa  $x_A = 0$  e l'altezza rispetto al suolo  $y_A = 1.6$  m. Dopo un certo tempo il corpo raggiunge la posizione B di ascissa  $x_B = 3.2$  m e altezza dal suolo  $y_B = 2.0$  m. Determinare:

- il diagramma delle forze agenti all'istante  $t = 0$ , dandone una rappresentazione grafica; [ $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_0$ ]
- il lavoro della risultante delle forze agenti nello spostamento da A a B; [ $W_{AB}^T = \sum_i W_{AB,i} = F_0 (x_B - x_A) - mg (y_B - y_A) = 28.4$  J]
- il modulo della velocità nel punto B, nell'ipotesi che la velocità all'istante  $t = 0$  sia  $\mathbf{v}_0 = 0.63$  m/s  $\mathbf{i}$ ; [ $v_B = \sqrt{(v_A^2 + 2W_{AB}^T/m)} = 3.43$  m/s]
- la reazione  $\mathbf{R}$  della guida nel punto B, nell'ipotesi che il raggio di curvatura della guida nel punto B sia  $\rho = 1.6$  m. [ $\mathbf{R}_B = m(g - v_B^2/\rho) \mathbf{j} = 12.235$  N  $\mathbf{j}$ ]



**Problema n. 8 :** Un carrello di massa  $m = 5 \text{ kg}$ , assimilabile a un corpo puntiforme, si muove lungo una rotaia semicircolare liscia di raggio  $R = 4 \text{ m}$  che giace su un piano orizzontale  $xy$ . Il corpo si muove sotto l'azione simultanea di due forze  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}_0$  di modulo rispettivamente  $40 \text{ N}$  e  $75 \text{ N}$ . La forza  $\mathbf{F}$  è sempre tangente al profilo circolare della rotaia, mentre la forza  $\mathbf{F}_0$  agisce in direzione fissa, e forma un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con l'asse  $x$  (v. figura). Calcolare:

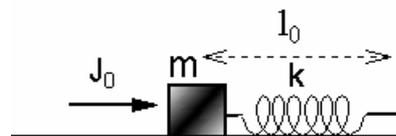
- Le componenti cartesiane della risultante  $\mathbf{R}$  delle due forze  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}_0$ , in funzione della coordinata angolare  $\theta$ , che individua la posizione istantanea del carrello sulla guida, come indicato in Figura;
- il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo per spostarlo da A a B;
- il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo per spostarlo da A a C;
- la velocità del corpo nella posizione B, assumendo che la sua velocità iniziale nel punto A sia nulla;
- la reazione vincolare nel punto B.



**Problema n. 9:** Un blocco assimilabile a un punto materiale, di massa  $m = 2 \text{ kg}$  è fissato ad un'estremità di una molla di massa trascurabile e di costante elastica  $k = 25 \text{ N/m}$  avente un'estremità solidale a una parete fissa. Tra il blocco e la superficie del piano orizzontale di appoggio esiste attrito ( $\mu_s = 0.6$ ,  $\mu_d = 0.4$ ).

All'istante  $t = 0$ , con la molla alla lunghezza di riposo  $l_0 = 1 \text{ m}$ , al blocco è applicato un impulso istantaneo  $\mathbf{J}_0 = 2 \text{ kg m/s i}$ . Determinare:

- quanto spazio percorre il blocco prima di fermarsi;
- il tempo impiegato dal blocco a fermarsi;
- se la posizione dove il blocco si ferma è di equilibrio oppure no.



**Problema n. 10:** Un corpo puntiforme di massa  $m = 0.5 \text{ kg}$  scivola su un piano orizzontale liscio con velocità  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  e urta l'estremità libera di molla) di costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo  $x_0 = 20 \text{ cm}$ , disposta orizzontalmente con l'asse parallelo alla direzione del moto del corpo e avente l'altra estremità fissata a una parete verticale fissa. Il corpo comprime la molla, fino al valore  $x_0/2$ , e viene poi rilanciato nella direzione opposta a quella di arrivo contro la molla. Calcolare:

- la costante elastica della molla;
- la velocità con cui il corpo si stacca dalla molla; (il corpo abbandona la molla quando questa ha riacquisito la sua lunghezza di riposo);
- quanto tempo il corpo resta a contatto con la molla
- la massima accelerazione subita dal corpo e il punto in cui ciò avviene.

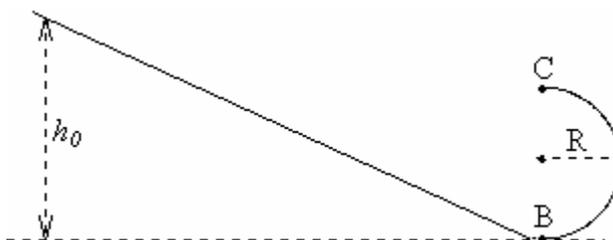
**Problema n. 11:** Una molla ideale, di lunghezza a riposo  $L_0 = 0.6$  m, è sospesa al soffitto e una particella massa  $m = 250$  g è attaccata al suo estremo libero. Quando la massa raggiunge la posizione di equilibrio la molla risulta 5 cm più lunga rispetto alla sua lunghezza a riposo. Calcolare:

- il valore della costante elastica  $k$  della molla;
- il periodo di oscillazione di un corpo puntiforme di massa  $M = 0.8$  kg attaccato alla stessa molla;
- la legge oraria del moto di oscillazione della massa  $M$ , di cui al punto (b), inizialmente in quiete nella sua posizione di equilibrio, a seguito dell'applicazione di un impulso istantaneo di intensità  $J_0 = 1.2$  kg m s<sup>-1</sup> e diretto verso l'alto;
- la lunghezza massima della molla e quella minima durante il moto oscillatorio;
- l'energia meccanica totale della massa  $M$  in corrispondenza di tali configurazioni estreme.



**Problema n. 12:** Un corpo puntiforme di massa  $m = 2.5$  kg può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato che si raccorda tangenzialmente con un profilo circolare di raggio  $R = 1$  m, sì da costituire un unico vincolo liscio. Si determini:

- la minima altezza  $h_0$  (rispetto al punto più basso della guida) da cui il corpo deve partire (con velocità nulla) per raggiungere la sommità (punto C) del profilo circolare, senza mai staccarsi da esso; [ $h_0 = 5R/2$ ]
- la reazione  $\mathbf{R}_B$  della guida quando il corpo si trova nel punto più basso di essa; [ $\mathbf{R}_B = 4 mg \mathbf{j}$ ]
- la reazione  $\mathbf{R}_C$  della guida quando il corpo si trova nel punto più alto di essa, assumendo che il corpo parta dalla stessa altezza  $h_0$  di cui al punto (a) ma con velocità iniziale  $v_0 = 1.2$  m/s. [ $\mathbf{R}_C = -m v_0^2/R \mathbf{j}$ ]



**Problema n. 13:** Una particella di massa  $m = 0.2$  kg si muove, partendo da ferma e da un'altezza  $h$ , scivola su un piano inclinato liscio fino a raggiungere una guida liscia che forma un anello di raggio  $R = 1$  m (giro della morte) e dopo aver percorso il giro della morte finisce per comprimere una molla di costante elastica  $k = 200$  N/m. Si calcoli:

- il minimo valore di  $h$  per cui la particella arriva a comprimere la molla;
- per tale valore di  $h$ , la massima compressione della molla;

Nota Bene: Discutere distintamente i due casi di vincolo (i) unilaterale e (ii) bilaterale.

**Problema n. 14:** Un punto materiale di massa  $m_1 = 1$  kg è attaccato ad un'estremità di una fune ideale (inestensibile e di massa trascurabile) che passa attraverso un foro di un piano orizzontale liscio. Inizialmente il punto materiale striscia sul piano orizzontale con velocità di modulo costante  $v_0$ , descrivendo una circonferenza di raggio  $r_0$  intorno al foro. Lentamente il filo viene tirato in modo che il raggio della traiettoria passi da  $r_0$  a  $r_1$ . Calcolare:

- la tensione del filo in funzione del raggio  $r_0$  della circonferenza;
- il lavoro fatto dalla tensione del filo per passare da  $r_0$  a  $r_1$ ;
- la velocità  $v_f$  il punto materiale possiede quando si muove sulla circonferenza di raggio  $r_1$ .