Università degli Studi di Verona
CL in Matematica Applicata
Algebra

Anno Accademico 2016-2017

Foglio di Esercizi n°1 - 12/10/2016

(Da consegnare il giorno 19/10/2016)

Notazione Sia G un gruppo e siano H, K due sottogruppi di G. Denotiamo con HK il seguente sottoinsieme di G: $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

Esercizio 1

Siano G_1 e G_2 gruppi. Il *prodotto diretto esterno* di G_1 e G_2 è il prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$, dotato della seguente operazione:

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) := (g_1 g'_1, g_2 g'_2),$$

per ogni $(g_1, g_2), (g'_1, g'_2) \in G_1 \times G_2$.

1. (*3 punti*) Dimostrare che il prodotto diretto esterno di due gruppi è un gruppo.
2. (*5 punti*) Siano G_1 e G_2 gruppi e sia $G = G_1 \times G_2$ il loro prodotto diretto esterno. Dimostrare che esistono due sottogruppi $\overline{G_1}, \overline{G_2} \leq G$ tali che:
   a) $\overline{G_i} \cong G_i$, per $i = 1, 2$;
   b) $\overline{G_i} \trianglelefteq G$, per $i = 1, 2$;
   c) $G = \overline{G_1}\,\overline{G_2}$ (vedere la **Notazione**);
   d) $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \{1\}$.

Sia G un gruppo e siano $\overline{G_1}, \overline{G_2}$ sottogruppi di G che soddisfano le proprietà a)-d) elencate sopra. Allora G si dice il *prodotto diretto interno* di $\overline{G_1}$ e $\overline{G_2}$. Dunque se G è il prodotto diretto interno dei suoi sottogruppi $\overline{G_1}$ e $\overline{G_2}$, allora G è isomorfo al prodotto diretto esterno $\overline{G_1} \times \overline{G_2}$ (e viceversa).

Esercizio 2

Verificare che l'insieme $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ con prodotto

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$$

è un gruppo.

1. (*4 punti*) Dimostrare che $H = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ è un sottogruppo di G, e che $K = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G.
2. (*5 punti*) Sia N un sottogruppo non banale di K. Mostrare che se N è normale in G allora $N = K$.

3. (*3 punti*) È vero che G è il prodotto diretto (interno) di H e K?

Esercizio 3

Sia $G = GL(2,\mathbb{R})$ il gruppo moltiplicativo delle matrici 2×2 ad elementi in $\mathbb{R}$ con determinante non nullo. Sia $N = \{A \in G \,|\, \det(\mathrm{A}) \in \mathbb{Q}\}$. Siano inoltre $\mathbb{R}^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli e $\mathbb{Q}^*$ il suo sottogruppo dei numeri razionali non nulli.

1. (*3 punti*) Determinare un omomorfismo suriettivo di G nel gruppo $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$.
2. (*4 punti*) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$
3. (*3 punti*) Dimostrare che G/N è abeliano.