

# Capitolo 1

## Grandezze fisiche e loro misurazione

La grande potenza del *metodo scientifico* per lo studio dei fenomeni naturali si basa sulla possibilità di individuare alcune proprietà misurabili, che chiamiamo *grandezze fisiche*, e sulla capacità di trovare delle relazioni stabili tra i valori misurati di grandezze fisiche diverse. Ad esempio, la legge fondamentale della meccanica,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , collega tra di loro tre grandezze fisiche: forza  $\vec{F}$ , massa  $m$  ed accelerazione  $\vec{a}$ .

In questo primo capitolo cercheremo di capire che cosa si intende in generale per *grandezza fisica*. Ad esempio, perché la *lunghezza* o la *massa* sono grandezze fisiche, mentre proprietà direttamente percepibili dai nostri sensi, come il sapore o l'odore, non lo sono ?

Come vedremo, la definizione stessa delle grandezze fisiche, nonché il loro impiego pratico, sono indissolubilmente legati alla individuazione di procedure di *misurazione*. La misurazione consente di stabilire una corrispondenza tra grandezze fisiche e numeri e di applicare quindi il linguaggio ed i formalismi della matematica alla descrizione dei fenomeni naturali.

Apparirà chiaro comunque fin da questo Primo Capitolo un fatto fondamentale: qualsiasi operazione di misura implica un certo grado di *incertezza* del suo risultato. In altri termini, l'incertezza fa parte integrante di qualsiasi misura. Saper valutare correttamente l'incertezza di misura è essenziale sia in campo scientifico, per fissare i limiti di validità delle teorie con cui si descrivono i fenomeni naturali, sia in campo tecnologico, per asserire il grado di affidabilità di prodotti e procedure.

La trattazione dell'incertezza di misura e delle sue conseguenze costituisce il filo conduttore principale di questo libro.

### 1.1 – Metodi di osservazione e misurazione

Per dare un significato concreto al concetto di *grandezza fisica*, incominciamo col prendere in considerazione diversi metodi con cui si possono studiare i fenomeni naturali, classificandoli in ordine di crescente complessità e potenza.

#### A) Metodo morfologico

Il metodo di studio più semplice si limita al rilievo sensoriale delle proprietà di oggetti o fenomeni ed alla loro eventuale registrazione e descrizione, tramite disegno, fotografia, etc.

*Esempio:* Lo studio dell'anatomia del corpo umano viene generalmente fatto mediante rappresentazioni

fotografiche, disegni, filmati.

*Esempio:* Molte sostanze chimiche possono essere individuate, da una persona esperta, in base al colore, alla lucentezza, all'odore, al sapore, etc.

## B) Metodo classificatorio

Un progresso nella descrizione del mondo naturale si ha quando è possibile realizzare una ripartizione di un insieme di oggetti o fenomeni in *classi* (sottoinsiemi privi di intersezioni ed esaurienti) secondo la rispondenza a uno o più requisiti ben definiti. Due oggetti o fenomeni appartengono alla medesima classe se e solo se godono di una o più proprietà in comune.

*Esempio:* Lo studio sistematico della zoologia e della botanica si basa su una complessa ed articolata classificazione del mondo animale e del mondo vegetale. Così, gli animali vertebrati vengono suddivisi in 5 classi: mammiferi, uccelli, rettili, anfibi, pesci. A sua volta ogni classe è divisa, secondo una scala gerarchica discendente, in più ordini, famiglie, specie.

*Esempio:* La relazione di congruenza tra segmenti considerata dalla Geometria è una relazione di equivalenza e consente quindi di suddividere i segmenti dello *bigskip* in classi. Queste classi, interpretate come elementi di un nuovo insieme, sono chiamate *lunghezze*: segmenti congruenti hanno la medesima lunghezza, e viceversa. A questo livello di definizione la lunghezza non è comunque ancora considerata una grandezza fisica.

## C) Metodo comparativo

Un ulteriore progresso nella descrizione del mondo naturale si ha quando è possibile introdurre una *relazione d'ordine*, cioè un criterio che consente di decidere in modo univoco se, dati due oggetti o fenomeni, il primo possiede una data proprietà in grado minore, uguale o maggiore del secondo.

Se la relazione d'ordine gode della proprietà transitiva, si può stabilire una corrispondenza tra i gradi di quella proprietà ed un insieme di numeri, in modo tale che la relazione d'ordine sia preservata.

Una proprietà degli oggetti o dei fenomeni per la quale sia possibile introdurre un metodo comparativo è una *grandezza fisica*.

*Esempio:* La scala di Mohs per le durezze dei minerali è basata sul seguente criterio: il minerale *A* è più duro del minerale *B* se *A* scalfisce *B*. Il criterio stabilisce una relazione d'ordine che gode della proprietà transitiva: la *durezza* è una grandezza fisica. La scala di Mohs elenca 10 minerali in ordine di durezza crescente, associandoli a 10 numeri, pure in ordine crescente:

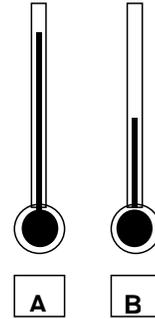
|                |            |             |               |               |
|----------------|------------|-------------|---------------|---------------|
| 1 - talco      | 2 - gesso  | 3 - calcite | 4 - fluorite  | 5 - apatite   |
| 6 - ortoclasio | 7 - quarzo | 8 - topazio | 9 - corindone | 10 - diamante |

Si noti che la scelta dei numeri che individuano la durezza nella scala di Mohs è puramente arbitraria; qualsiasi altra scelta, purché rispettosa della relazione d'ordine, sarebbe stata accettabile.

*Esempio:* Il confronto per sovrapposizione di due segmenti consente di decidere in modo univoco non solo se i due segmenti sono congruenti ma anche se uno è più corto dell'altro o viceversa. Il criterio del confronto tra segmenti consente di introdurre in modo operativo una relazione d'ordine per le lunghezze. La relazione d'ordine tra lunghezze gode della proprietà transitiva. Ad ogni lunghezza si può associare un numero comunque scelto purché la relazione d'ordine sia preservata. A questo punto possiamo dire che *la lunghezza è una grandezza fisica*.

*Esempio:* Gli *stati termici* di due oggetti *A* e *B* possono essere confrontati mettendo i due oggetti successivamente a contatto con uno stesso termoscopio (Fig. 1.1); il confronto consente di stabilire una relazione d'ordine transitiva: si dice che *A* ha *temperatura* più alta di *B* se provoca una maggiore dilatazione del mercurio nel termoscopio. Allo stato termico di ogni oggetto si può associare un numero, scelto in modo qualsiasi purché la relazione d'ordine sia preservata. La *temperatura* è una grandezza fisica.

**Fig. 1.1** – Un termoscopio a mercurio è costituito da un bulbo di vetro riempito di mercurio, in comunicazione con un sottile cannello, pure di vetro (si pensi ad un comune termometro, privo però della scala graduata).



## D) Metodo quantitativo o metrico

In alcuni casi è possibile, oltre che riconoscere nell'insieme dei gradi di una proprietà una relazione d'ordine transitiva, definire anche una *legge di composizione* che goda delle stesse proprietà dell'addizione tra numeri. Si può allora stabilire una corrispondenza tra i gradi della proprietà e l'insieme dei numeri reali che riproduce non solo la relazione d'ordine, ma anche la struttura additiva.

*Esempio:* Una legge di composizione per le lunghezze di segmenti può essere introdotta nel modo seguente.

Consideriamo due segmenti  $a$  e  $b$ , di estremi rispettivamente  $AA'$  e  $BB'$ . La composizione si effettua ponendo i due segmenti sulla stessa retta e facendo coincidere l'estremo  $A'$  del segmento  $a$  con l'estremo  $B$  del segmento  $b$ . Il segmento somma  $a + b$  ha come estremi  $A$  e  $B'$ .

Il metodo quantitativo è alla base di gran parte delle operazioni di misura scientifiche e tecniche. Esso consente di applicare alla descrizione dei fenomeni naturali i formalismi sviluppati dalla matematica. Approfondiremo il metodo quantitativo nel §1.3.

Si noti che esistono grandezze fisiche per le quali non è possibile definire una legge di composizione che goda delle stesse proprietà dell'addizione in aritmetica. Esempi significativi sono la durezza e la temperatura.

## E) Metodi statistici

Quando si studiano popolazioni molto numerose di oggetti o eventi è spesso possibile, utilizzando gli strumenti matematici della statistica, descriverne alcune proprietà medie per mezzo di pochi parametri. Ad esempio, in Fisica i metodi statistici vengono utilizzati per interpretare le grandezze termodinamiche macroscopiche (pressione, energia interna, temperatura, etc.) in termini di comportamento medio microscopico di un numero molto elevato di atomi o molecole. Un altro campo di utilizzazione dei metodi statistici riguarda il conteggio di eventi casuali, cui accenneremo nel § 1.4.

Vedremo nel Cap. 4 che i metodi statistici rivestono una notevole importanza nella misurazione delle grandezze fisiche e nella ricerca di relazioni analitiche tra grandezze diverse, in quanto forniscono gli strumenti per valutare le incertezze nei valori di misura.

# 1.2 – Grandezze fisiche

L'analisi dei diversi metodi di osservazione e misurazione fatta al §1.1 ci consente di chiarire cosa si intende per *grandezza fisica*.

Una *grandezza fisica* (in inglese *physical quantity*) è una proprietà di un oggetto o di un fenomeno per la quale è possibile definire una relazione d'ordine che goda della proprietà transitiva.

Per molte grandezze fisiche è possibile definire anche una legge di composizione che gode delle stesse proprietà dell'addizione tra numeri.

Le grandezze fisiche possono pertanto venire raggruppate in due categorie:

a) **Grandezze quantitative (o metrizzabili)**

Sono le grandezze per le quali è possibile definire sia una relazione d'ordine transitiva sia una legge di composizione additiva (metodo quantitativo o metrico del §1.1.D).

*Esempi:* La lunghezza, l'intervallo di tempo, la massa, la velocità, la forza sono esempi di grandezze quantitative.

b) **Grandezze di stato (o non metrizzabili)**

Sono grandezze per le quali è possibile definire una relazione d'ordine transitiva ma non una legge di composizione additiva (metodo comparativo del §1.1.C).

*Esempi:* La temperatura e la durezza sono tipici esempi di grandezze di stato.

La *misurazione* (in inglese *measurement*) è il procedimento che consente di associare ad ogni valore della grandezza fisica un numero, detto *misura* della grandezza (in inglese *measure*).

Metodologie diverse di misurazione dovranno essere utilizzate a seconda che la grandezza sia metrizzabile oppure no. Approfondiremo l'argomento nel prossimo paragrafo, §1.3.

La realizzazione pratica della misurazione avviene per mezzo degli *strumenti di misura*. Le principali caratteristiche degli strumenti di misura verranno analizzate nel Cap. 3.

## 1.3 – Misurazione diretta ed indiretta

Due diverse metodologie di misurazione vengono generalmente distinte: la misurazione diretta e la misurazione indiretta.

### A) Misurazione diretta

Consideriamo una grandezza  $\mathcal{G}$  di tipo metrizzabile, per la quale cioè sia definita una legge di composizione additiva. Per concretezza, pensiamo ad esempio alla lunghezza di un'asta. La misurazione diretta della grandezza  $\mathcal{G}$  si può ricondurre idealmente ad una sequenza logica di azioni:

- |   |   |
|---|---|
| a) costruzione o scelta di un campione $\mathcal{U}$ di unità di misura;          | $\mathbf{u}$         |
| b) composizione di campioni: $\sum \mathcal{U}_i$ ;                               | $\Sigma \mathbf{u}$  |
| c) verifica di identità tra $\mathcal{G}$ e una somma $n\mathcal{U}$ di campioni; | $\mathbf{g}$         |
| d) computo degli $n$ campioni.  |   |

Secondo questo schema logico, la misura  $X(\mathcal{G})$  della grandezza  $\mathcal{G}$  è il rapporto tra la grandezza  $\mathcal{G}$  ed l'unità di misura  $\mathcal{U}$ :

$$X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{U}. \quad (1.3.1)$$

Il risultato di una misurazione si indica pertanto così:  $\mathcal{G} = X \cdot \mathcal{U}$ ;  $X$  è il numero che esprime la misura,  $\mathcal{U}$  è l'unità di misura; ad esempio, per una lunghezza:  $d = 5$  metri; per un intervallo di tempo:  $\Delta t = 7$  secondi, per una massa:  $m = 2$  chilogrammi.

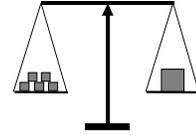
La misurazione diretta è la realizzazione operativa del metodo quantitativo o metrico; essa può quindi essere realizzata solo per grandezze quantitative o metrizzabili (che vengono perciò anche chiamate *grandezze direttamente misurabili*.)

*Esempio:* Misurazione di una lunghezza con un regolo millimetrato. Il campione è la distanza tra due tacche contigue (1 mm); la composizione dei campioni è stata effettuata una volta per tutte al

momento dell'incisione delle tacche; la verifica di identità si fa ponendo in coincidenza gli estremi dell'oggetto da misurare con le tacche della riga; il computo dei campioni è facilitato dai numeri incisi sulla riga in corrispondenza di alcune tacche.

*Esempio:* Misurazione di una massa con una bilancia meccanica a due piatti.

Il campione è un pesetto di massa unitaria; la composizione dei campioni si fa ponendo più pesetti identici su un piatto della bilancia; la verifica di identità consiste nel calibrare il numero di pesetti in modo da bilanciare la massa del corpo posto sull'altro piatto della bilancia.



## B) Incertezza nella misurazione diretta

Analizziamo ora più in dettaglio il significato dell'eq.(1.3.1), partendo da considerazioni di carattere puramente matematico, per poi passare a tenere conto dei fattori sperimentali che influenzano la misurazione.

È facile rendersi conto che la grandezza  $\mathcal{G}$  solo in qualche caso corrisponderà ad un multiplo intero  $n\mathcal{U}$  dell'unità di misura. Pertanto, la misura  $X = \mathcal{G}/\mathcal{U}$  non è in genere un numero intero  $n$ .

Ammettendo la divisibilità dell'unità di misura  $\mathcal{U}$  in un numero comunque grande di sottomultipli, si potrebbe pensare che la misura  $X = \mathcal{G}/\mathcal{U}$  possa comunque essere sempre un numero razionale  $m/n$ . È però ben noto che esistono grandezze incommensurabili (ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato) il cui rapporto è un numero irrazionale.

Pertanto la misura di una grandezza fisica è, almeno in linea di principio, un *numero reale*  $r$ :

$$X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{U} = r. \quad (1.3.2)$$

L'eq. (1.3.2) stabilisce la corrispondenza tra grandezze fisiche e numeri reali che sta alla base dell'uso dei formalismi della matematica del continuo nella descrizione teorica di gran parte dei fenomeni fisici macroscopici.

Nella pratica sperimentale di misurazione si ha sempre a che fare con strumenti di misura in cui l'unità  $\mathcal{U}$  non può essere resa arbitrariamente piccola, per cui la verifica di identità tra la grandezza  $\mathcal{G}$  e una somma di campioni può essere fatta solo in modo approssimato. Con esattezza potremo solo decidere che

$$n\mathcal{U} < \mathcal{G} < (n+1)\mathcal{U}, \quad (1.3.3)$$

cioè stabilire un intervallo di valori di larghezza  $\mathcal{U}$  entro il quale si colloca la misura della grandezza  $\mathcal{G}$ . In altri termini, il risultato di una misurazione diretta non è un numero, bensì un intervallo finito di possibili valori. La larghezza dell'intervallo rappresenta un'*incertezza* o *indeterminazione* (in inglese *uncertainty*) della misura.

In linea di principio si potrebbe pensare di ricondurre l'incertezza al di sotto di un valore comunque prefissato riducendo opportunamente l'unità di misura  $\mathcal{U}$ . Nella pratica, la riduzione dell'unità  $\mathcal{U}$  è generalmente limitata da difficoltà di natura tecnica. Inoltre, come avremo modo di vedere nel Cap. 3 e soprattutto nel Cap. 4, altre cause, legate sia a fluttuazioni di natura casuale sia ad errori di tipo sistematico nelle procedure di misurazione, possono contribuire in modo determinante all'incertezza di misura.

L'esperienza ha mostrato che l'incertezza nelle procedure di misurazione non è mai completamente eliminabile. L'incertezza è dunque parte integrante della misura e va ogni volta valutata quantitativamente con attenzione. La misura di una qualsiasi grandezza fisica deve sempre riportare l'informazione sull'entità della sua incertezza. La sua espressione sarà tipicamente del tipo

$$\mathcal{G} = (X_0 \pm \delta X)\mathcal{U}, \quad (1.3.4)$$

dove  $X_0$  è il valore centrale della misura e  $\delta X$  rappresenta la semi-larghezza dell'intervallo di incertezza. Buona parte del Cap. 4 sarà dedicata ad imparare come valutare l'incertezza di misura in diverse possibili situazioni e ad esprimerla in modo convenzionale mediante un semi-intervallo  $\delta X$ .

### C) Misurazione indiretta

Si parla di misurazione indiretta quando la misura  $X(\mathcal{G})$  della grandezza  $\mathcal{G}$  in esame viene ottenuta sfruttando relazioni analitiche che la collegano alle misure  $Y(\mathcal{A})$ ,  $Z(\mathcal{B})$ , ... di altre grandezze  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$  direttamente misurabili.

La misurazione indiretta viene talora utilizzata per grandezze che sarebbero in linea di principio misurabili anche direttamente:

- a) per convenienza pratica della misurazione indiretta rispetto alla misurazione diretta;
- b) per impossibilità pratica della misurazione diretta.

*Esempio:* La lunghezza della diagonale  $d$  di un quadrato può essere misurata direttamente oppure indirettamente a partire dalla misura diretta del lato  $a$  attraverso la relazione  $d = a\sqrt{2}$ .

*Esempio:* La velocità è in linea di principio misurabile direttamente (almeno finché si considerano velocità molto inferiori alla velocità della luce, così da poter trascurare gli effetti relativistici). La velocità viene però generalmente misurata in modo indiretto, ad esempio come rapporto tra uno spazio e un intervallo di tempo misurati direttamente.

*Esempio:* Le distanze astronomiche non possono essere misurate direttamente; la loro misurazione indiretta è ricondotta alla misurazione diretta di angoli e di una distanza più piccola.

Alla misurazione indiretta si deve comunque ricorrere per le grandezze di stato o *non metrizzabili* (dette perciò anche *non direttamente misurabili*). La misurazione indiretta consente di stabilire anche per alcune grandezze non metrizzabili una corrispondenza con un insieme di numeri che riproduce la struttura additiva.

*Esempio:* La *temperatura* non è misurabile direttamente, in quanto non è definibile una legge di composizione per le temperature. È tuttavia possibile stabilire delle *scale termometriche* che mettono in relazione in modo convenzionale la temperatura con una grandezza misurabile direttamente (una lunghezza, una pressione, una resistenza elettrica, etc.) Ad esempio, in un termometro a mercurio, preventivamente tarato secondo la scala Celsius, la misurazione di una variazione di temperatura  $\Delta T$  viene ricondotta alla misurazione diretta della variazione  $\Delta \ell$  di lunghezza della colonnina di mercurio.

La misurazione indiretta di una grandezza si basa sulla misurazione diretta di una o più altre grandezze. L'*incertezza*, che come abbiamo visto sopra caratterizza ogni misura ottenuta direttamente, si propaga ovviamente anche ai valori delle grandezze misurate indirettamente. La propagazione dell'incertezza nelle misure indirette sarà affrontata nel §4.6.

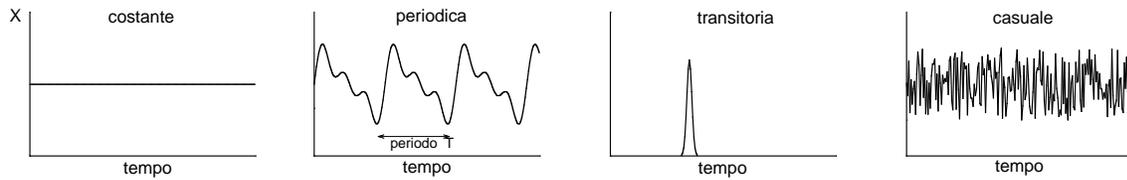
## 1.4 – Dipendenza dal tempo delle grandezze fisiche

Tra le diverse grandezze fisiche, il tempo assume spesso un ruolo privilegiato. Frequentemente infatti si presenta la necessità di seguire le variazioni di una grandezza fisica  $\mathcal{G}$  al trascorrere del tempo  $t$ , cioè di studiare l'andamento della funzione  $X(t)$ , dove  $X$  rappresenta la misura della grandezza  $\mathcal{G}$  e  $t$  il tempo. A seconda del tipo di dipendenza del valore  $X$  dal tempo  $t$ , è utile evidenziare alcuni casi particolari, che sono illustrati schematicamente in Fig. 1.2.

### A) Grandezze costanti

Una grandezza  $X$  si dice **costante** quando il suo valore  $X(\mathcal{G})$  non cambia al trascorrere del tempo.

*Esempio:* La forza di interazione gravitazionale tra due corpi di masse rispettivamente  $m$  e  $M$  e di dimensioni trascurabili, posti a distanza  $r$  l'uno dall'altro, vale  $F = GmM/r^2$ . La costante di proporzionalità  $G$  è detta *costante gravitazionale*; il suo valore non dipende né dall'istante né dal



**Fig. 1.2** – Dipendenza dal tempo delle grandezze fisiche: alcuni casi particolarmente significativi. Da sinistra verso destra: grandezza costante, periodica, transitoria, casuale.

luogo in cui è misurata.  $G$  è una *costante fondamentale della Fisica*. Il suo valore è riportato in Appendice D.2, insieme con il valore di alcune altre costanti fondamentali.

*Esempio:* L'accelerazione di gravità  $g$  dipende dal luogo in cui viene misurata. In un determinato luogo, tuttavia, il suo valore rimane costante nel tempo.

*Esempio:* Il periodo  $\mathcal{T}$  di oscillazione di un pendolo dipende dall'ampiezza dell'oscillazione (si veda la Fig. A.1 in Appendice A.3). Poiché l'ampiezza si riduce nel tempo a causa degli attriti, anche il periodo si riduce progressivamente. Tuttavia, se l'ampiezza delle oscillazioni è sufficientemente piccola, la dipendenza del periodo dall'ampiezza è debole e lo smorzamento dovuto all'attrito è lento. In queste condizioni il periodo di oscillazione viene con buona approssimazione considerato costante (*isocronismo delle piccole oscillazioni*).

## B) Grandezze periodiche

Una grandezza  $X$  ha andamento **periodico** con periodo  $T$  quando, per ogni valore di  $t$ , si ha:

$$X(t + T) = X(t) \quad (1.4.1)$$

*Esempio:* L'angolo  $\theta$  di apertura di un pendolo oscillante varia con il tempo in modo periodico. Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, la dipendenza dell'angolo  $\theta$  dal tempo è descritta da una legge oraria sinusoidale:  $\theta = \theta_0 \sin(2\pi t/\mathcal{T} + \phi_0)$ , dove  $\theta_0$  è l'ampiezza dell'oscillazione,  $\mathcal{T}$  il periodo e  $\phi_0$  la fase iniziale a  $t = 0$ .

*Esempio:* In un motore a combustione interna, ad esempio il motore di un'automobile, la pressione dei gas all'interno della camera di scoppio varia nel tempo. Se il motore gira a regime costante, la pressione assume con buona approssimazione la stessa sequenza di valori ad ogni ciclo; la pressione dipende cioè dal tempo in modo periodico, secondo l'Eq. (1.4.1).

*Nota:* È l'attribuzione di un carattere periodico ad alcuni fenomeni naturali (come l'oscillazione di un pendolo o la vibrazione di un cristallo di quarzo) che consente di stabilire le procedure per la misurazione diretta della durata degli intervalli di tempo, e quindi la definizione stessa di *intervallo di tempo*.

## C) Grandezze impulsive

Una grandezza ha andamento **impulsivo** o **transitorio** quando il suo valore è diverso da zero solo per un intervallo finito di tempo.

*Esempio:* Quando due corpi solidi (ad esempio due palle da biliardo) si urtano, si sviluppa una forza di mutua interazione che varia molto velocemente nel tempo, la cui durata è comunque limitata al brevissimo intervallo di tempo durante cui i due corpi sono a contatto. Nel caso dell'urto tra corpi solidi pertanto la forza ha carattere impulsivo.

## D) Grandezze casuali

Una grandezza ha andamento **casuale** quando il suo valore varia continuamente nel tempo in modo non

periodico.

*Esempio:* In un gas le molecole si muovono incessantemente, urtandosi reciprocamente. Ad ogni urto la velocità di una molecola cambia di direzione e modulo in modo imprevedibile. Il modulo della velocità di una molecola ha quindi un valore casuale.

*Esempio:* Anche il valore di grandezze fisiche macroscopiche può subire delle fluttuazioni casuali ad opera di molteplici cause. Queste fluttuazioni casuali sono generalmente di piccola entità rispetto al valore della misura ma contribuiscono alla sua incertezza. Questo argomento sarà ripreso e approfondito al Cap. 4.

Come vedremo in seguito, la dipendenza di una grandezza fisica dal tempo condiziona notevolmente la metodologia della sua misurazione e la scelta dello strumento di misura più adatto.

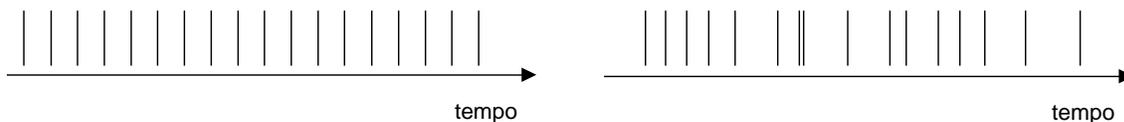
Ad esempio, per misurare una grandezza costante nel tempo si ha a disposizione un tempo virtualmente illimitato; si possono ottenere misure affidabili anche con strumenti relativamente semplici sfruttando la possibilità di ripetere più volte la misurazione e modificare se necessario la metodologia. Le principali proprietà che caratterizzano uno strumento per misurazioni di grandezze costanti nel tempo verranno descritte nel Cap. 3.

Nel caso di una grandezza dipendente dal tempo, la misurazione richiede l'uso di uno strumento di misura veloce, in grado di seguire il più possibile fedelmente le variazioni della grandezza stessa. Al § 3.5 verrà fatto un breve cenno introduttivo al problema della risposta dinamica degli strumenti di misura.

## 1.5 – Conteggio di eventi casuali

Come abbiamo visto al § 1.3.A, la misurazione diretta di una grandezza fisica si riconduce sempre ad un'operazione di *conteggio*, cioè al computo del numero  $n$  di campioni  $\mathcal{U}$  che consentono di ottenere, a meno dell'incertezza di misura, la coincidenza tra la grandezza  $\mathcal{G}$  e la somma  $n\mathcal{U}$ .

A titolo di esempio, consideriamo la misurazione di un intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  con un orologio in grado di scandire i secondi. L'operazione di misura consiste nel contare i secondi a partire dall'istante iniziale  $t_1$  per finire all'istante finale  $t_2$ . I segnali prodotti ad ogni secondo dall'orologio possono essere considerati come *eventi regolarmente equispaziati* nel tempo (Fig. 1.3, a sinistra).



**Fig. 1.3** – Eventi che si susseguono con regolarità nel tempo (a sinistra) ed eventi casuali (a destra).

Nella pratica di laboratorio può accadere di dover affrontare una situazione piuttosto differente, cioè il conteggio di eventi che si presentano in modo disordinato ed imprevedibile nel tempo o nello spazio (Fig. 1.3, a destra). Si tratta del conteggio di *eventi casuali*.

Un esempio tipico è rappresentato dal fenomeno dei raggi cosmici, cioè delle particelle di alta energia che continuamente arrivano dallo spazio sulla superficie terrestre. Le particelle possono essere rivelate, e quindi contate, per mezzo di opportuni strumenti, ad esempio i contatori Geiger. L'arrivo di una particella sulla finestra di ingresso di un contatore Geiger è un evento casuale nel tempo, e l'istante di arrivo è del tutto imprevedibile. La sequenza costituita dagli arrivi di più particelle è disordinata e casuale, come in Fig. 1.3, a destra).

Molti altri fenomeni legati alla fisica del mondo microscopico danno origine ad eventi casuali; si pensi ad

esempio al decadimento di isotopi radioattivi, all'emissione di fotoni (quanti di luce) da sorgenti di bassa intensità, alle collisioni tra particelle elementari.

La casualità dei fenomeni sembrerebbe a prima vista precludere la possibilità di un loro studio quantitativo. Tuttavia, se si effettuano conteggi di un numero sufficientemente elevato di eventi, è possibile comunque estrarre dalla loro sequenza irregolare delle *proprietà medie* regolari e significative. Queste proprietà medie rappresentano delle *grandezze fisiche*.

*Esempio:* Consideriamo un campione di isotopi radioattivi. Un *decadimento radioattivo* è un evento casuale, del tutto imprevedibile. Così pure casuale è la sequenza di decadimenti nel tempo, che può essere rivelata mediante opportuni strumenti contatori. Tuttavia, se si esegue un numero sufficientemente grande di osservazioni, è possibile mettere in luce una forma di regolarità nel comportamento *medio* degli eventi casuali. Se all'istante  $t = 0$  sono presenti  $N_0$  isotopi, il loro numero si riduce nel tempo, *in media*, secondo la legge esponenziale:  $N(t) = N_0 \exp(-\alpha t)$ , dove  $\alpha$  è una costante detta *costante di disintegrazione*. La costante di disintegrazione è una grandezza fisica, il cui valore caratterizza il comportamento di quel determinato isotopo.

Il conteggio di eventi casuali richiede strumentazione apposita nonché opportune tecniche statistiche di analisi dei dati, di cui ci occuperemo nei prossimi capitoli. I conteggi di eventi casuali sono intrinsecamente affetti da *incertezza*. Questa incertezza si riflette evidentemente anche sulle grandezze fisiche definite in base alle loro proprietà medie.

## 1.6 – Definizione operativa delle grandezze fisiche

Come abbiamo visto al § 1.2, una grandezza fisica è una proprietà degli oggetti o dei fenomeni per la quale è possibile definire una relazione d'ordine transitiva (metodo comparativo) ed eventualmente anche una legge di composizione additiva (metodo quantitativo).

Al §1.3 abbiamo anche visto che la misurazione delle grandezze fisiche si basa proprio sull'esistenza della relazione d'ordine o della legge di composizione. Ad esempio, la misurazione diretta presuppone che si conosca la ricetta pratica per aggiungere i campioni  $\mathcal{U}$ . Il concetto di grandezza fisica è quindi intrinsecamente connesso con le procedure di misurazione.

Questo modo di vedere le cose è un tipico esempio del *carattere operativo* che viene attribuito ai concetti della Fisica. Le grandezze fisiche (lunghezza, massa, tempo, forza, etc.) non vengono definite in termini di proprietà astratte, bensì in modo concreto, *operativo*: la definizione di ogni singola grandezza fisica consiste nell'enunciazione dettagliata delle operazioni che è necessario fare per misurarla.

Lo sviluppo scientifico e tecnologico ha portato ad una progressiva estensione dell'utilizzazione delle grandezze fisiche al di fuori del campo della comune esperienza quotidiana. I valori delle grandezze fisiche possono coprire molti ordini di grandezza. A titolo di esempio, consideriamo due lunghezze tipiche della fisica atomica e dell'astronomia: il raggio della prima orbita elettronica nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno è circa  $5.3 \times 10^{-11}$  m, mentre il raggio medio dell'orbita del pianeta Plutone è  $5.9 \times 10^{+12}$  m.

È ovvio che né le lunghezze su scala atomica né le lunghezze di interesse astronomico possono essere misurate per confronto diretto con un campione di unità di misura. Generalizzando, una stessa grandezza fisica può richiedere tecniche di misura diverse per differenti ordini di grandezza dei suoi valori. Tecniche di misura diverse corrispondono a definizioni operative diverse. Affinché si possa comunque parlare di una medesima grandezza fisica pur in presenza di diverse definizioni operative, è necessario che le diverse definizioni operative siano tra di loro coerenti: se in un dato intervallo di valori due o più tecniche di misurazione sono possibili, esse devono fornire lo stesso risultato.

Una grandezza fisica è pertanto definita dalla classe di tutte le sue possibili definizioni operative.

## 1.7 – Il metodo sperimentale

La Fisica non si limita alla semplice osservazione dei fenomeni naturali e alla misurazione di grandezze fisiche, in conformità ai *metodi descrittivi* presentati al §1.1. Come abbiamo osservato all’inizio di questo capitolo, la grande potenza del metodo scientifico sta nella capacità di trovare delle correlazioni tra grandezze fisiche diverse, in modo da poter stabilire delle leggi e costruire delle teorie di validità generale.

La ricerca di correlazioni tra grandezze fisiche non è tuttavia un compito semplice. I fenomeni naturali si presentano generalmente in forme complesse, caratterizzate dalla compresenza e mutua influenza di molti fattori: si pensi solo all’effetto degli attriti, che per molti secoli ha impedito di individuare la relazione di proporzionalità tra forza e accelerazione che sta alla base della meccanica classica. Molti fenomeni importanti addirittura sfuggono alla percezione sensoriale diretta e possono venire rivelati solo mediante strumentazione opportuna (si pensi ai fenomeni elettromagnetici).

La ricerca di correlazioni tra grandezze fisiche si basa sul *metodo sperimentale*, introdotto da Galileo Galilei (1564–1642). Il ricercatore non si limita all’osservazione passiva dei fenomeni naturali, bensì li riproduce in forma controllata in laboratorio, modificando sistematicamente i diversi fattori che ne influenzano lo svolgimento. È così possibile ridurre o addirittura eliminare fattori che si ritengono secondari ed isolare gli aspetti fondamentali di un fenomeno. Si arriva in tal modo all’enunciazione di semplici relazioni empiriche tra grandezze fisiche. Ad esempio, la progressiva riduzione dell’effetto dell’attrito su un corpo in moto lungo un piano inclinato ha portato Galileo Galilei ad intuire e quindi ipotizzare la relazione di proporzionalità tra forza ed accelerazione.

Le relazioni tra grandezze fisiche stabilite sperimentalmente sono la base per lo sviluppo delle teorie scientifiche. Le teorie scientifiche consentono di fare previsioni sull’evoluzione di fenomeni più complessi. La validità di ogni teoria scientifica è corroborata dalla verifica sperimentale delle sue previsioni.

Il metodo sperimentale si basa ovviamente su una scelta oculata delle grandezze fisiche utilizzate per descrivere i fenomeni naturali ed una loro rigorosa definizione operativa. Richiede però anche il senso critico, l’abilità tecnica, la fantasia necessarie per ricercare correlazioni semplici e riproducibili tra grandezze fisiche.

È fondamentale, per il ricercatore, essere capace di valutare correttamente l’affidabilità dei suoi risultati. Come abbiamo già accennato nei paragrafi precedenti e come vedremo approfonditamente nei prossimi capitoli, la misura di qualsiasi grandezza fisica è comunque affetta da incertezza, attribuibile alle prestazioni degli strumenti di misura e alle metodologie del loro impiego. Questa incertezza si riflette sulle leggi che esprimono le correlazioni tra grandezze fisiche, e quindi sulle teorie scientifiche che ne derivano. Dalla affidabilità delle misure dipendono in ultima analisi i limiti di validità delle teorie scientifiche nonché delle loro conseguenze di rilevanza tecnologica.

# Capitolo 2

## Sistemi di unità di misura

In questo Capitolo studieremo come le grandezze fisiche vengono organizzate in *Sistemi di unità di misura*. Ci occuperemo principalmente del *Sistema Internazionale* (S.I.), ma vedremo anche altri sistemi che vengono talora utilizzati in campi specialistici della Fisica. Introdurremo infine le *dimensioni* delle grandezze fisiche e accenneremo alle principali applicazioni dell'*analisi dimensionale*.

### 2.1 – Grandezze fondamentali e derivate

Come abbiamo visto al § 1.3, alla base di ogni operazione di misura sta la possibilità che alcune grandezze (le grandezze quantitative o metrizzabili) siano misurate in modo diretto per confronto con un campione  $\mathcal{U}$ , che definisce l'*unità di misura*.

Nella descrizione del mondo fisico vengono introdotte molte grandezze fisiche, metrizzabili e non, collegate tra loro da relazioni analitiche. In linea di principio, è del tutto lecito scegliere per ogni grandezza un'unità di misura arbitraria. Ciò porta però in genere all'introduzione di scomodi fattori di proporzionalità, oltre alla necessità di definire e mantenere un grande numero di campioni di unità di misura.

*Esempio:* Consideriamo tre grandezze, la lunghezza  $\ell$ , il tempo  $t$  e la velocità  $v$ , che indicheremo provvisoriamente con i simboli  $\mathcal{G}_\ell$ ,  $\mathcal{G}_t$  e  $\mathcal{G}_v$ . Per un moto uniforme la velocità è definita come

$$\mathcal{G}_v = \Delta\mathcal{G}_\ell / \Delta\mathcal{G}_t.$$

In linea di principio è possibile scegliere in modo indipendente le unità di misura  $\mathcal{U}$  per le tre grandezze. Una scelta possibile potrebbe essere:

|                           |   |
|---------------------------|---|
| per la lunghezza $\ell$ , | $\mathcal{U}_\ell =$ raggio terrestre;              |
| per il tempo $t$ ,        | $\mathcal{U}_t =$ periodo di rotazione terrestre;   |
| per la velocità $v$ ,     | $\mathcal{U}_v =$ velocità tangenziale all'Equatore |

Passiamo ora dalle grandezze  $\mathcal{G}$  alle loro misure  $X$  usando l'eq. (1.3.1):  $\mathcal{G} = X\mathcal{U}$ . La velocità è per definizione il rapporto tra uno spazio ed un intervallo di tempo. Con la scelta indipendente delle unità di misura fatta sopra, la misura della velocità sarà legata alle misure di spazio e tempo dalla relazione

$$X_v = (1/2\pi) X_\ell / X_t.$$

Infatti, un punto fisso sull'Equatore si muove con velocità unitaria  $\mathcal{G}_v = 1 \mathcal{U}_v$ , percorrendo la distanza  $\mathcal{G}_\ell = 2\pi\mathcal{U}_\ell$  nel tempo unitario  $\mathcal{G}_t = 1 \mathcal{U}_t$ .

Nell'esempio precedente, l'unità di velocità è legata alle unità di spazio e di tempo mediante il fattore  $(1/2\pi)$ . Per evitare, o almeno ridurre, la necessità di fattori moltiplicativi diversi da 1 nelle formule che collegano le unità di misura di grandezze fisiche diverse, risulta conveniente scegliere in modo arbitrario l'unità di misura solo per un numero molto piccolo di grandezze. Per le altre grandezze l'unità di misura

verrà definita in modo univoco mediante relazioni analitiche.

*Esempio:* Scegliamo come unità di misura arbitrarie: il *metro* (m) per le lunghezze  $\ell$  e il *secondo* (s) per i tempi  $t$ ; allora l'unità di velocità  $v$  sarà il *metro al secondo* (m/s), definito dalla relazione  $v = \ell/t$ .

Si chiamano:

- **Grandezze fondamentali** (in inglese *base quantities*) le grandezze per le quali l'unità di misura è definita in modo arbitrario.
- **Grandezze derivate** (in inglese *derived quantities*) le grandezze per le quali l'unità di misura è definita tramite le relazioni analitiche che le collegano alle grandezze fondamentali.

Costruire un **SISTEMA DI UNITÀ DI MISURA** significa essenzialmente:

- scegliere una determinata ripartizione delle grandezze fisiche tra fondamentali e derivate;
- definire le unità di misura e gli eventuali campioni delle grandezze fondamentali.

Il primo tentativo di costruire un sistema di unità di misura per la meccanica fu avviato dal governo rivoluzionario in Francia nel 1790 e condusse all'introduzione per legge del *Sistema Metrico Decimale* nel 1795. In seguito, vari altri sistemi di unità di misura sono stati introdotti, alcuni dei quali tuttora in uso nella scienza, nella tecnica, nelle attività commerciali. Le crescenti necessità di standardizzazione legate all'incremento degli scambi commerciali e allo sviluppo della ricerca scientifica hanno portato, a partire dal 1895 (*Convenzione del metro*), alla stipula di varie convenzioni internazionali per l'unificazione dei sistemi. Negli ultimi anni si è realizzata la convergenza verso un ben definito sistema, il *Sistema Internazionale* (S.I.), di cui parleremo in dettaglio nel § 2.3.

Un sistema di unità di misura è detto:

- *completo* se tutte le grandezze fisiche si possono ricavare dalle grandezze fondamentali tramite relazioni analitiche;
- *coerente* se le relazioni analitiche che definiscono le unità delle grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità diversi da 1;
- *decimale* se multipli e sottomultipli delle unità di misura sono tutti potenze di 10.

## 2.2 – Campioni per le unità di misura

Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono realizzate mediante *campioni* (in inglese *measurement standards*). Esistono campioni di unità di misura anche per molte grandezze derivate. Le proprietà principali che caratterizzano un campione sono:

- a) *precisione*;
- b) *invariabilità* (nel tempo);
- c) *accessibilità*, ossia possibilità di accesso al campione per chiunque ne abbia necessità;
- d) *riproducibilità*, ossia possibilità di riprodurre il campione qualora dovesse andare distrutto.

Si distinguono due tipi fondamentali di campioni:

- a) **Campioni naturali**, la cui definizione fa riferimento a fenomeni naturali.
- b) **Campioni artificiali**, costruiti appositamente.

*Esempio:* Ricordiamo l'evoluzione nel tempo del campione di metro. Il metro venne introdotto nel 1795 come la frazione  $(1/10^7)$  dell'arco di meridiano terrestre dal polo all'equatore (campione naturale). Nel 1799 venne costruito un campione artificiale costituito da un regolo in platino, il *metro legale di Fortin* (precisione  $10 \div 20 \mu\text{m}$ ). Nel 1889 si introdusse un nuovo campione artificiale, costituito da una sbarra in lega 90% platino + 10% iridio (precisione  $0.2 \mu\text{m}$ ). Nel 1960 si tornò ad un campione naturale, il *metro ottico*, definito come un multiplo della lunghezza d'onda della luce rosso-arancione

emessa dall'isotopo 86 del kripton (precisione  $0.01 \mu\text{m}$ ). Nel 1983 si è infine introdotta l'attuale definizione del metro basata sul prodotto della velocità della luce per un intervallo di tempo.

I campioni naturali assicurano la riproducibilità e l'invariabilità, anche se talora a scapito dell'accessibilità.

I campioni di maggior precisione per una data grandezza sono detti *campioni primari* (in inglese *primary standards*). Vengono in genere realizzati anche campioni più accessibili, seppure meno precisi, detti *campioni secondari* (*secondary standards*). I campioni secondari vengono periodicamente calibrati per confronto con i campioni primari. I campioni di uso corrente, detti *campioni di lavoro* (*working standards*) vengono a loro volta calibrati per confronto con i campioni secondari.

## 2.3 – Il Sistema Internazionale

Il Sistema Internazionale di unità di misura (S.I.) è stato introdotto nel 1960 dalla XI Conferenza Generale dei Pesi e Misure e perfezionato dalle Conferenze successive. Il S.I. è oggetto di direttive della Comunità Europea fin dal 1971, ed è stato legalmente adottato in Italia nel 1982.

Il Sistema Internazionale è:

- completo
- coerente
- decimale (tranne che per la misura degli intervalli di tempo)

Il S.I. opera una precisa ripartizione tra *grandezze fondamentali* e *grandezze derivate* ed assegna ad ogni grandezza un'unità di misura (vedi Appendici B.1.a e B.1.b).

Il S.I. codifica anche le norme di scrittura dei nomi e dei simboli delle grandezze fisiche nonché l'uso dei prefissi moltiplicativi secondo multipli di 1000 (vedi Appendici B.1.d e B.1.e).

### A) Grandezze fondamentali

Il Sistema Internazionale (S.I.) è basato su 7 grandezze fondamentali, di cui riportiamo unità di misura e relativi simboli nella seguente tabella:

| <i>Grandezza</i>                | <i>Unità</i> | <i>Simbolo</i> |
|---------------------------------|--------------|----------------|
| intervallo di tempo             | secondo      | s              |
| lunghezza                       | metro        | m              |
| massa                           | chilogrammo  | kg             |
| quantità di materia             | mole         | mol            |
| temperatura                     | kelvin       | K              |
| intensità di corrente elettrica | ampere       | A              |
| intensità luminosa              | candela      | cd             |

Vediamo ora in dettaglio come sono definite le unità di misura delle grandezze fondamentali del S.I.

#### Intervallo di tempo

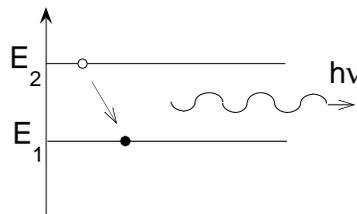
Il **secondo** (*s*) è la durata di 9 192 631 770 oscillazioni della radiazione emessa dall'atomo di cesio 133 ( $^{133}\text{Cs}$ ) nella transizione tra i due livelli energetici iperfini ( $F=4, M=0$ ) e ( $F=3, M=0$ ) dello stato fondamentale  $^2S_{1/2}$ .

Il  $^{133}\text{Cs}$  ha un nucleo formato da 55 protoni e 78 neutroni. Lo stato fondamentale è lo stato in cui un atomo ha la configurazione elettronica di minima energia. La suddivisione dello stato fondamentale in livelli iperfini è dovuta all'interazione degli elettroni con il momento magnetico del nucleo; la differenza in energia  $\Delta E$  tra i livelli iperfini è molto piccola rispetto alla differenza in energia tra i livelli principali dell'atomo.

Durante la transizione tra due livelli di energia (Fig. 2.1) l'atomo emette onde elettromagnetiche di frequenza  $\nu = \Delta E/h$ , corrispondente ad una lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$  e un periodo  $T = 1/\nu$ ;  $h$  è la costante di Planck e  $c$  è la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto (sono due costanti fondamentali della Fisica, i cui valori numerici sono riportati in Appendice D.2). La radiazione emessa dal  $^{133}\text{Cs}$  durante la transizione in questione ha frequenza  $\nu \simeq 10^{10}$  Hz e lunghezza d'onda  $\lambda \simeq 3$  cm (regione delle microonde). Il secondo è pertanto definito come un multiplo intero del periodo  $T = 1/\nu$  della radiazione emessa dal cesio.

Il campione primario del secondo è costituito da un *orologio al cesio*. Un orologio al cesio può commettere un errore massimo relativo di  $1 \times 10^{-12}$ , equivalente a  $1 \mu\text{s}$  ogni 12 giorni.

**Fig. 2.1** – Rappresentazione schematica della transizione di un atomo da un livello di energia più alta ad un livello di energia più bassa, con conseguente emissione di radiazione elettromagnetica.



### Lunghezza

Il **metro** ( $m$ ) è definito come la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell'intervallo di tempo di  $1/299\,792\,458$  secondi.

La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto (*velocità della luce*) è una costante fondamentale della Fisica (Appendice D.2). Con la definizione del metro introdotta nel 1983, il suo valore è assunto come esatto (cioè privo di incertezza) e immodificabile:  $c = 299\,792\,458$  m/s. Per la realizzazione pratica del campione di metro, è raccomandato l'uso della radiazione monocromatica emessa da un laser ad elio-neon nella regione del rosso visibile (lunghezza d'onda  $\lambda = 633$  nm).

### Massa

Il **chilogrammo** ( $kg$ ) è la massa del prototipo di platino-iridio conservato nel padiglione del B.I.P.M. (Bureau International des Poids et Mesures) di Breteuil, a Sèvres.

È l'unico campione artificiale del SI. Si tratta di un cilindro di platino-iridio di 38 mm di diametro e di altezza, custodito in una tripla teca sotto vuoto insieme ad altre 6 copie di riscontro.

La precisione relativa del campione è dell'ordine di  $10^{-9}$ .

È allo studio la possibilità di introdurre un campione naturale di massa basato su proprietà atomiche.

### Quantità di materia

La **mole** ( $mol$ ) è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in  $0.012$  kg di carbonio 12 ( $^{12}\text{C}$ ).

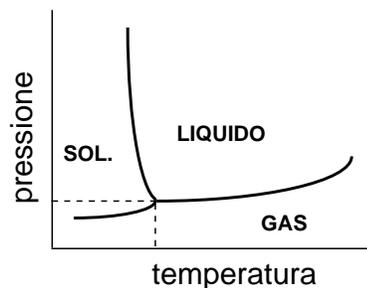
Il  $^{12}\text{C}$  è l'isotopo più abbondante del carbonio: il nucleo atomico è composto da 6 protoni e 6 neutroni. Quando si usa la mole è necessario specificare la natura delle entità elementari cui ci si riferisce:  $n$  mol di atomi, opp. di molecole, opp. di ioni, etc. Il numero di entità elementari che costituiscono 1 mole è detto *numero di Avogadro*; il suo valore è  $N_0 \simeq 6.022 \times 10^{23}$  (Appendice D.2).

### Temperatura

Il **kelvin** è la frazione  $1/273.16$  della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.

Si chiama *punto triplo* di una sostanza lo stato termodinamico in cui sono in equilibrio le tre fasi liquida, solida e gassosa (Fig. 2.2). Il punto triplo dell'acqua si verifica ad una pressione di 610 Pa e (per definizione) ad una temperatura di 273.16 K, pari a  $0.01^\circ\text{C}$ . La precisione relativa della determinazione della temperatura del punto triplo dell'acqua è di circa  $1 \times 10^{-6}$ .

**Fig. 2.2** – Andamento schematico del diagramma di stato dell'acqua nel piano temperatura-pressione. Ad ogni punto del piano, cioè ad ogni coppia di valori  $(T, p)$ , corrisponde uno stato termodinamico dell'acqua. Le tre regioni del piano corrispondono ai tre stati di aggregazione: solido, liquido, gas. Le linee rappresentano stati in cui coesistono all'equilibrio due stati di aggregazione. La loro intersezione è il *punto triplo*.



Si ricordi che la temperatura è una grandezza non metrizzabile, per la quale non è possibile definire un'operazione di addizione. La temperatura non si può quindi misurare direttamente addizionando repliche di un campione di unità di misura.

La *temperatura termodinamica assoluta* è definita in relazione al rendimento di un ciclo termodinamico ideale, il ciclo di Carnot; la sua misurazione è ricondotta alla misurazione di un rapporto tra quantità di calore, o più in generale di un rapporto tra valori di una grandezza metrizzabile.

### Intensità di corrente elettrica

L'*ampere* è la corrente elettrica costante che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a distanza di 1 m nel vuoto, determina tra essi una forza di  $2 \times 10^{-7}$  N per metro di conduttore.

L'ampere è definito con riferimento alla legge che dà la forza di interazione  $F$  tra due conduttori paralleli di lunghezza  $\ell$  posti a distanza  $d$  e percorsi rispettivamente dalle correnti  $I_1$  e  $I_2$ :

$$F = 2k_m I_1 I_2 \frac{\ell}{d},$$

imponendo alla costante  $k_m$  il valore numerico  $10^{-7}$ . In genere  $k_m$  viene espresso in funzione della permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$ :  $k_m = \mu_0/4\pi$ .

Secondo la definizione S.I., l'ampere può essere realizzato mediante un elettrodinometro, cioè uno strumento che misura la forza tra due conduttori percorsi da corrente. Nella pratica si preferisce far ricorso alla legge di Ohm  $I = V/R$  e realizzare l'unità di corrente (ampere) come rapporto tra le unità di differenza di potenziale (volt) e di resistenza (ohm). I campioni del volt e dell'ohm sono oggi realizzati ricorrendo a due fenomeni quantistici, rispettivamente l'effetto Josephson e l'effetto Hall quantistico.

### Intensità luminosa

La *candela* è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza  $540 \times 10^{12}$  Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di  $(1/683)$  W/sr.

L'intensità luminosa è la grandezza fondamentale della *fotometria*, cioè della disciplina che si occupa dello studio della radiazione elettromagnetica nel campo di sensibilità dell'occhio umano (luce visibile). L'intensità luminosa corrisponde al flusso di energia irraggiata da una sorgente nell'angolo solido unitario, misurata in base alla sensazione visiva, cioè pesata dalla curva media di sensibilità dell'occhio umano (Fig. 2.3). Le misure fotometriche, che si eseguono mediante strumenti appositamente costruiti, detti fotometri, sono rilevanti nei campi dell'astronomia, della fotografia, delle tecniche di illuminazione.

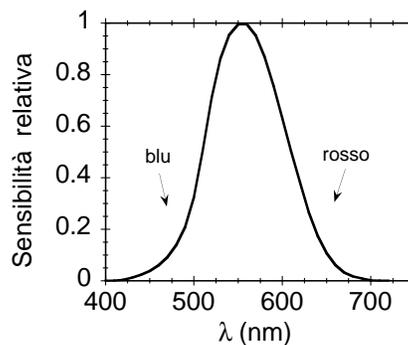
## B) Grandezze derivate

Le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unità di misura delle grandezze fondamentali. Non esistono fattori di conversione diversi da uno (il S.I. è coerente). Le unità di misura di alcune grandezze derivate sono dotate di nome proprio.

Le unità di misura di alcune grandezze derivate dotate di nome proprio sono elencate in Appendice B.1.b.

*Esempio 1:* L'*accelerazione* è una grandezza derivata. Per definizione l'accelerazione è il rapporto tra una

**Fig. 2.3** – Curva della sensibilità media dell'occhio umano in funzione della lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. La curva definisce la regione della *luce visibile*. Il massimo della sensibilità corrisponde ad una lunghezza d'onda  $\lambda = 556 \times 10^{-9}$  m, pari ad una frequenza  $\nu = 540 \times 10^{12}$  Hz.



velocità ed un tempo, cioè tra uno spazio ed il quadrato di un tempo. La sua unità di misura, priva di nome proprio, è  $1 \text{ m s}^{-2}$ .

*Esempio 2:* L'*angolo piano* e l'*angolo solido* sono grandezze derivate, definite rispettivamente come il rapporto tra due lunghezze e il rapporto tra una superficie e il quadrato di una lunghezza. Le loro unità di misura sono dotate di nome proprio, rispettivamente *radiante* e *steradiano*. Il *radiante* (rad) è l'angolo piano che sottende, su una circonferenza centrata nel suo vertice, un arco di lunghezza uguale al raggio. Lo *steradiano* (sr) è l'angolo solido che sottende, su una sfera centrata nel suo vertice, una calotta sferica di area uguale al quadrato del raggio.

*Esempio 3:* La *forza*  $F$  è una grandezza derivata. Attraverso la legge fondamentale della dinamica,  $F = ma$ , l'unità di misura della forza è ricondotta alle unità di misura della massa e dell'accelerazione. L'unità di misura della forza è dotata di nome proprio, il *newton* (N), ed è definita come  $1 \text{ N} = 1 \text{ Kg m s}^{-2}$ .

Può valer la pena, a questo punto, tornare sul problema della ripartizione delle grandezze fisiche in fondamentali e derivate. La scelta del numero di grandezze da considerare fondamentali, in linea di principio puramente convenzionale, è guidata da criteri di praticità e semplicità, e talora anche da motivi storici.

Come abbiamo visto, il S.I. considera 3 grandezze fondamentali per la meccanica (spazio, tempo e massa). Sarebbe possibile scegliere 4 grandezze fondamentali anziché 3. Ad esempio, a spazio, tempo e massa si potrebbe aggiungere come fondamentale la forza, con un'unità di misura definita arbitrariamente. La legge fondamentale della dinamica dovrebbe essere espressa come  $F = kma$ , con l'aggiunta cioè di una costante moltiplicativa dimensionale  $k$ .

Alternativamente, si potrebbero anche ridurre a 2 le grandezze fondamentali della meccanica. Ad esempio, consideriamo la legge della gravitazione universale  $ma = GmM/r^2$  (dove si è posto  $F = ma$ ). Se si impone che la costante gravitazionale  $G$  sia adimensionale e assuma il valore 1, si ottiene un vincolo tra le tre grandezze spazio, tempo e massa, per cui la scelta arbitraria delle unità di misura di due delle tre grandezze implica la determinazione dell'unità di misura della terza.

Queste ultime considerazioni, di scarsa rilevanza pratica se ci si limita alla meccanica, sono invece importanti nel campo dell'elettromagnetismo, per comprendere la differenza tra il S.I. e i sistemi c.g.s., come vedremo al § 2.4.A.

### C) Enti normativi

Le ricerche sul continuo aggiornamento del S.I. sono affidate all'*Ufficio Internazionale dei Pesi e Misure* (B.I.P.M., *Bureau International des Poids et Mesures*) con sede a Sèvres, presso Parigi. Il B.I.P.M. è controllato dalla *Conferenza Generale dei Pesi e Misure* (C.G.P.M.), che si riunisce di regola ogni 4 anni. Le decisioni della C.G.P.M. vengono rese operative dal *Comitato Internazionale dei Pesi e Misure* (C.I.P.M.).

Un ente internazionale che svolge un ruolo notevole per l'unificazione di norme e procedure in campo scientifico e tecnologico, incluse le norme relative al Sistema Internazionale, è l'*International Organisation for*

*Standardisation* (I.S.O.). Negli Stati Uniti d'America un ruolo analogo è svolto dal *National Instruments Standard Techniques* (N.I.S.T.), noto in passato come *National Bureau of Standards* (N.B.S.).

In Italia la divulgazione e il controllo dell'applicazione del S.I. sono affidati all' *Ente Nazionale per l'Unificazione* (U.N.I.). I campioni nazionali delle unità di misura sono realizzati in parte presso l'*Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris*, in parte presso l'*Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti*, entrambi con sede a Torino.

Gli indirizzi Internet dei principali enti normativi sono riportati in Appendice E.3.

## 2.4 – Altri sistemi di unità di misura

In aggiunta al S.I., sono tuttora in uso altri sistemi di unità di misura. Ci limiteremo in questo paragrafo ad alcuni aspetti rilevanti per le applicazioni fisiche.

### A) Sistemi c.g.s.

Nei sistemi c.g.s. le unità fondamentali della meccanica sono il centimetro, il grammo e il secondo. Per quanto riguarda la meccanica, quindi, le differenze tra S.I. e c.g.s. si limitano a fattori potenze di 10 nei valori delle grandezze fondamentali e derivate, nonché ai nomi delle unità di misura (si veda in proposito l'Appendice B.4).

La differenza sostanziale tra i sistemi c.g.s. e il Sistema Internazionale riguarda le grandezze elettromagnetiche. Mentre il S.I. introduce una grandezza fondamentale per l'elettromagnetismo (l'intensità di corrente), nei sistemi c.g.s. le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle meccaniche. Storicamente si sono sviluppati vari sistemi c.g.s., a seconda della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche in funzione delle grandezze meccaniche.

Per chiarire le differenze tra i diversi sistemi, consideriamo le tre leggi: di Coulomb, dell'interazione elettrodinamica tra correnti e dell'induzione elettromagnetica:

$$F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad F_m = 2 K_m I_1 I_2 \frac{\ell}{d}; \quad f = -K_i \frac{d\Phi_B}{dt};$$

le prime due leggi collegano grandezze elettriche (carica elettrica  $q$  o corrente elettrica  $I$ ) a grandezze meccaniche (forze  $F$  e lunghezze  $r, \ell, d$ ), la terza collega una grandezza elettrica (la forza elettromotrice  $f$ ) ad una grandezza magnetica (il flusso  $\Phi$  del campo d'induzione  $\vec{B}$ ). Le costanti  $K_e$  e  $K_m$  devono in ogni caso essere legate dalla relazione  $K_e/K_m = c^2$ , dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.

Il **Sistema Internazionale** usa la legge dell'interazione elettrodinamica per definire l'intensità di corrente come grandezza fondamentale; le tre costanti  $K_e, K_m, K_i$  valgono rispettivamente

$$K_e = 1/(4\pi\epsilon_0); \quad K_m = \mu_0/(4\pi); \quad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. elettrostatico** ricava l'unità di carica elettrica (lo *statcoulomb*) dalla legge di Coulomb imponendo che la costante  $K_e$  sia adimensionale ed abbia il valore 1; le tre costanti  $K_e, K_m, K_i$  valgono rispettivamente

$$K_e = 1; \quad K_m = 1/c^2; \quad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. elettromagnetico** ricava l'unità di corrente (l' *abampere*) dalla legge dell'interazione elettrodinamica imponendo che la costante  $K_m$  sia adimensionale ed abbia il valore 1. L'unità di carica del sistema cgs elettromagnetico (l' *abcoulomb*) è diversa da quella del sistema cgs elettrostatico per un fattore  $c$ . Le tre costanti  $K_e, K_m, K_i$  valgono rispettivamente

$$K_e = c^2; \quad K_m = 1; \quad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. simmetrizzato di Gauss** adotta le unità del sistema c.g.s. elettrostatico per le grandezze elettriche, le unità del sistema c.g.s. elettromagnetico per le grandezze magnetiche. In alcune

equazioni che collegano grandezze elettriche e magnetiche compare come coefficiente la velocità della luce nel vuoto,  $c$ . Le tre costanti  $K_e, K_m, K_i$  valgono rispettivamente

$$K_e = 1; \quad K_m = 1/c^2; \quad K_i = 1/c.$$

Il sistema cgs simmetrizzato è frequentemente usato nel campo della fisica teorica. Non trova invece applicazione in campo sperimentale.

*Esempio:* Nel modello di Bohr per l'atomo di idrogeno, lo stato fondamentale, cioè lo stato di minima energia, corrisponde ad un'orbita circolare dell'elettrone, di raggio  $a_0$ . Il valore approssimato di  $a_0$  è espresso rispettivamente, nel S.I. e nel sistema di Gauss, come

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (\text{S.I.}) \quad a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-9} \text{ cm} \quad (\text{Gauss})$$

dove con il simbolo  $\hbar$  (*acca tagliato*) si indica la costante di Planck divisa per  $2\pi$ :  $\hbar = h/2\pi$ ;  $m_e$  ed  $e$  sono rispettivamente la massa e la carica elettrica dell'elettrone (i valori numerici delle costanti sono riportati in Appendice D.2).

*Nota:* Il S.I. è razionalizzato, il sistema di Gauss non è razionalizzato. Un sistema di misura si dice *razionalizzato* quando i coefficienti numerici che compaiono nelle leggi sono scelti in modo che il numero irrazionale  $\pi$  compaia solo in formule relative a simmetrie circolari, sferiche o cilindriche e non in quelle relative a simmetrie piane. La razionalizzazione del S.I. per le formule dell'elettromagnetismo è ottenuta esplicitando il fattore  $4\pi$  nella legge di Coulomb.

In Appendice B.4 sono riportate alcune tabelle che facilitano la conversione tra sistema c.g.s. di Gauss e S.I.

## B) Sistemi pratici

Varie unità di misura *pratiche* estranee al S.I. sono tuttora in uso. Salvo poche eccezioni limitate a campi specialistici ammesse dal Comitato Internazionale dei Pesi e Misure (Appendice B.1.c), le unità *pratiche* non dovrebbero più essere usate (un elenco parziale è riportato in Appendice B.2).

Tra le unità di misura non S.I. ammesse all'uso alcune sono frequentemente utilizzate in Fisica.

Un'unità di massa atomica (u), in inglese *atomic mass unit* (amu) è 1/12 della massa di un atomo di carbonio 12, cioè dell'isotopo del carbonio il cui nucleo contiene 12 nucleoni (6 protoni e 6 neutroni).

La massa di un atomo misurata in amu ha un valore molto vicino al numero di massa A (cioè al numero di nucleoni). 1 mol di atomi o molecole di qualsiasi sostanza ha una massa in grammi uguale alla massa in amu dei singoli atomi o molecole.

Il valore oggi accettato per l'unità di massa atomica è riportato in Appendice D.2. Approssimativamente,  $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

Un **elettronvolt** (eV) è l'energia acquistata da un elettrone nel passaggio tra due punti separati da una differenza di potenziale elettrico di 1 V:  $1 \text{ eV} = 1.6021892 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

*Esempio:* L'energia necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno, cioè per separare a distanza infinita l'elettrone dal protone, è 13.595 eV. La separazione in energia tra i due livelli iperfini del cesio 133 utilizzati per definire il secondo è  $\Delta E \simeq 4 \times 10^{-5} \text{ eV}$ .

L'**unità astronomica** (ua), corrispondente all'incirca alla distanza Terra-Sole, è usata per esprimere le distanze all'interno del sistema solare. Approssimativamente,  $1 \text{ ua} = 1.496 \text{ times } 10^{11} \text{ m}$ .

Nella misurazione degli **angoli piani** si usa spesso come unità di misura il **grado** ( $^\circ$ ), nonché i suoi sottomultipli non decimali: il minuto,  $1' = (1/60)^\circ$ , e il secondo,  $1'' = (1/3600)^\circ$ .

Nella misurazione delle **distanze a livello atomico** è spesso usato come unità di misura delle lunghezze l'**ångström** ( $\text{\AA}$ ).  $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} = 10 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

## C) Sistemi anglosassoni

In Appendice B.3 sono elencate alcune unità di misura tuttora in uso nei paesi anglosassoni, in attesa

della definitiva adozione del S.I.

I sistemi anglosassoni sono generalmente a base non decimale. Ad esempio, partendo dall'unità base di lunghezza, cioè il pollice (*inch*), i principali multipli sono il piede (*foot*), pari a 12 pollici, e la iarda (*yard*), pari a 3 piedi.

Da notare anche che talora esistono differenze di valore tra omonime unità inglesi e americane. Ad esempio il *gallone*, unità di volume, vale 4.546 dm<sup>3</sup> in Gran Bretagna e 3.785 dm<sup>3</sup> negli Stati Uniti.

## D) Sistemi naturali

In alcuni campi specialistici della Fisica si usano talora, per semplificare le notazioni e i calcoli, unità di misura dette *naturali* in quanto assumono come valori unitari quelli di alcune grandezze di particolare rilevanza nella fisica atomica e nucleare.

Il **sistema atomico di Hartree** è spesso utilizzato nella descrizione dei fenomeni a livello atomico. Le grandezze fondamentali per la meccanica e l'elettromagnetismo sono tre, come per i sistemi c.g.s.:

- la *massa*: unità di misura è la massa a riposo dell'elettrone,  $m_e=1$  (nel S.I.  $m_e=9.1093897 \cdot 10^{-31}$  kg);
- la *carica elettrica*: unità di misura è la carica dell'elettrone  $e=1$  (nel S.I.  $e=1.60217733 \cdot 10^{-19}$  C);
- l'*azione* (prodotto di un'energia per un tempo): unità di misura è il quanto d'azione  $h$  (costante di Planck) diviso per  $2\pi$ ,  $\hbar=h/2\pi=1$  (nel S.I.  $\hbar=1.0545727 \cdot 10^{-34}$  J s);

Il sistema di Hartree è indicato anche come *sistema*  $m_e=e=\hbar=1$ .

*Esempio*: Consideriamo ancora il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno. Il raggio dell'orbita più interna dell'elettrone e la corrispondente energia potenziale sono espressi, nel sistema c.g.s. di Gauss, come

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2}; \quad U_0 = -\frac{e^2}{a_0} = -\frac{m_e e^4}{\hbar}.$$

Nel sistema di Hartree quindi  $a_0 = 1$ ,  $U_0 = 1$ . Il raggio della prima orbita di Bohr  $a_0$  rappresenta l'unità naturale di lunghezza. Il modulo di  $U_0$  rappresenta l'unità naturale di energia, cui viene dato il nome di hartree (vedi Appendice B.5). La velocità dell'elettrone nella prima orbita di Bohr,  $v_0 = e^2/\hbar$ , è l'unità di velocità. L'unità di tempo è infine data dal rapporto  $a_0/v_0$ .

Il **sistema di Dirac** è spesso utilizzato nella fisica delle particelle elementari. Le grandezze fondamentali sono:

- la *massa*: unità di misura è la massa a riposo dell'elettrone,  $m_e=1$ ;
- la *velocità*: unità di misura è la velocità della luce nel vuoto,  $c=1$  (nel S.I.  $c=299\,792\,458$  m/s);
- l'*azione*: unità di misura è  $\hbar=h/2\pi=1$ ;

Il sistema di Dirac è indicato anche come *sistema*  $m_e=c=\hbar=1$ .

## E) Unità elettroniche ed informatiche

Nei campi dell'elettronica, dell'informatica e delle telecomunicazioni sono in uso unità di misura specifiche, che non hanno ancora trovato sistemazione normativa nel S.I.

Tali unità possono servire a misurare la **quantità di informazione**:

- il **bit** (contrazione dall'inglese *binary digit*) corrisponde ad una cifra binaria;
- 1 **byte** = 8 bit;
- 1 **word** = uno o più byte elaborabili contemporaneamente;

oppure la **velocità di calcolo**:

- le **IPS** sono le *Instructions Per Second* (Istruzioni al Secondo); tipicamente si usano i multipli, come 1 MIPS = 10<sup>6</sup> IPS;
- le **FLOPS** sono le *Floating Point Operations Per Second* (Operazioni in Virgola Mobile al Secondo), anche qui tipicamente si usano i multipli, come 1 MFLOPS = 10<sup>6</sup> FLOPS;

o infine la **velocità di trasmissione dell'informazione**:

f) il **bps** o **bit/s**, corrispondente ad un bit al secondo, e talora impropriamente chiamato *baud*.

## 2.5 – Analisi dimensionale

Come abbiamo visto, una volta scelte le grandezze fisiche da considerare come fondamentali, resta arbitraria la scelta delle rispettive unità di misura. Vogliamo studiare come il cambiamento dell'unità di misura di una grandezza fondamentale si ripercuote sulle unità delle altre grandezze (fondamentali e derivate). Per semplicità ci riferiremo solo al S.I.

### A) Dimensioni delle grandezze fisiche

Supponiamo di sostituire l'unità di misura delle lunghezze, cioè il metro, con un'unità  $L$  volte più piccola; di conseguenza le misure

|              |                       |           |
|--------------|-----------------------|-----------|
| di lunghezza | sono moltiplicate per | $L$       |
| di tempo     | sono moltiplicate per | $L^0 = 1$ |
| di volume    | sono moltiplicate per | $L^3$     |
| di velocità  | sono moltiplicate per | $L$       |

L'esponente del fattore  $L$  viene chiamato *dimensione* rispetto alla lunghezza.

Simbolicamente la dipendenza del valore di una grandezza qualsiasi  $X$  dalle unità delle grandezze fondamentali  $A, B, C, \dots$  viene espressa tramite equazioni dimensionali del tipo:

$$[X] = [A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma \dots$$

L'analisi delle dimensioni delle grandezze trova applicazione pratica principalmente in meccanica e talora in elettromagnetismo: ci si limita perciò in genere a considerare le dimensioni rispetto a lunghezza, massa, tempo e (qualora occorra) intensità di corrente, simbolizzati con  $L, M, T, A$ .

Ad esempio, le dimensioni della velocità sono

$$[v] = [L]^1 [T]^{-1} [M]^0$$

le dimensioni del lavoro e dell'energia sono

$$[W] = [E] = [L]^2 [T]^{-2} [M]^1$$

le dimensioni della differenza di potenziale elettrico sono

$$[V] = [L]^2 [T]^{-1} [M] [A]^{-1}$$

Grandezze che hanno le stesse dimensioni sono dette *dimensionalmente omogenee*.

### B) Grandezze adimensionali

Alcune quantità hanno dimensione nulla rispetto a tutte le grandezze fondamentali:  $[L]^0, [T]^0, [M]^0, [A]^0$ . Si tratta dei *numeri puri* ( $3, \sqrt{2}, \pi, \dots$ ) e delle *grandezze adimensionali*, cioè grandezze uguali al rapporto tra due grandezze omogenee.

Il valore delle grandezze adimensionali *non* dipende dalla scelta delle unità di misura delle grandezze fondamentali e derivate.

*Esempi:* Gli *angoli piani*, misurati in radianti, sono grandezze adimensionali; la misura in radianti è infatti il rapporto tra due lunghezze, quella dell'arco e quella del raggio. Anche gli *angoli solidi*, misurati in steradiani, sono grandezze adimensionali; la misura in steradiani è infatti il rapporto tra due lunghezze al quadrato.

*Esempio:* La densità assoluta di una sostanza è il rapporto tra la sua massa e il suo volume:  $\rho = m/V$ .

La *densità relativa* di una sostanza è il rapporto tra la sua densità assoluta e la densità dell'acqua alla temperatura di  $4^\circ\text{C}$ . La densità relativa è una grandezza adimensionale.

*Esempio:* Una costante adimensionale molto importante nella fisica atomica è la *costante di struttura fine*  $\alpha$ , definita nel S.I. dalla relazione

$$\alpha^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{(137)^2}.$$

Il valore numerico della costante di struttura fine,  $\alpha \simeq 1/137$ , non dipende dal sistema di unità di misura.

### C) Principio di omogeneità dimensionale

L'utilizzazione pratica dell'analisi delle dimensioni si fonda sul **principio di omogeneità dimensionale**: possono essere uguagliate o sommate solo espressioni dimensionalmente omogenee. In altri termini, un'equazione tra grandezze fisiche è del tipo

$$A + B + C + \dots = M + N + P + \dots$$

dove  $A, B, C, \dots, M, N, P, \dots$  devono essere monomi dimensionalmente omogenei.

In particolare, le funzioni trascendenti (sen, cos, exp, log, ...) ed i loro argomenti devono essere adimensionali.

*Esempio:* Una massa appesa ad una molla esegue un moto oscillatorio. La sua coordinata di posizione  $z$  dipende dal tempo  $t$  secondo una legge sinusoidale. La dipendenza di  $x$  da  $t$  non può essere espressa come  $x(t) = \text{sen } t$ , in quanto: a) l'argomento  $t$  della funzione seno non è adimensionale; b) la funzione seno è adimensionale mentre  $x$  ha le dimensioni di una lunghezza. L'equazione corretta è  $x(t) = A \text{sen}(\omega t)$ , dove  $A$  è una costante con le dimensioni di una lunghezza,  $\omega$  è una costante con le dimensioni inverse al tempo.

### D) Applicazioni dell'analisi dimensionale

Ricordiamo brevemente le principali applicazioni dell'analisi dimensionale.

#### Verifica delle equazioni

L'omogeneità dimensionale è condizione necessaria per l'esattezza di un'equazione fisica.

Non è però condizione sufficiente, perché:

- a) l'analisi dimensionale non è in grado di valutare l'esattezza numerica;
- b) esistono grandezze omogenee dimensionalmente, ma con significato fisico ben distinto (ad es. il lavoro meccanico ed il momento di una forza).

*Esempio:* Si vuole calcolare la traiettoria di un proiettile lanciato con velocità iniziale  $v_0$  ad un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Applicando le regole della cinematica si trova

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \text{tg} \theta$$

dove  $x$  e  $z$  sono le coordinate rispettivamente orizzontale e verticale.

È immediato verificare la correttezza dimensionale dell'equazione. Se l'omogeneità dimensionale non fosse stata soddisfatta, l'equazione sarebbe stata sicuramente sbagliata.

Viceversa, l'equazione avrebbe potuto essere sbagliata anche se dimensionalmente corretta: ad esempio se per un errore di calcolo si fosse ottenuto  $\cos\theta$  anziché  $\text{tg}\theta$  nell'ultimo termine.

Per poter applicare l'analisi dimensionale alla verifica delle equazioni è necessario che i calcoli siano fatti sotto forma letterale, ed i valori numerici siano sostituiti solo alla fine.

#### Deduzione di equazioni

L'analisi dimensionale consente talora di determinare la relazione che intercorre tra le diverse grandezze che caratterizzano un fenomeno fisico, a meno di eventuali costanti adimensionali.

*Esempio:* Il periodo  $\mathcal{T}$  di oscillazione di un pendolo può dipendere, in linea di principio, dalla massa  $m$  e dalla lunghezza  $\ell$  del pendolo, dall'accelerazione di gravità  $g$  e dall'ampiezza  $\theta_0$  dell'oscillazione. La dipendenza di  $\mathcal{T}$  da  $m$ ,  $\ell$  e  $g$  potrà essere espressa dimensionalmente come

$$[T] = [m]^\alpha [\ell]^\beta [g]^\gamma$$

cioè

$$[T] = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-2\gamma}.$$

Il principio di omogeneità dimensionale impone che

$$\alpha = 0; \quad \beta + \gamma = 0; \quad \gamma = -1/2,$$

da cui

$$T = C \sqrt{\ell/g}$$

dove  $C$  è una costante adimensionale. Si noti che l'analisi dimensionale non è in grado di determinare l'eventuale dipendenza del periodo dall'ampiezza  $\theta_0$  (adimensionale), né il valore della costante  $C$ .

Il periodo di oscillazione del pendolo, considerato nell'esempio precedente, può comunque venire determinato in modo completo (cioè includendo le grandezze adimensionali) risolvendo l'equazione del moto. Nel caso di sistemi fisici molto complessi, per i quali non esista una teoria completa (ad esempio, in alcuni campi della fluidodinamica) l'analisi dimensionale può rappresentare uno strumento di grande utilità.

### Similitudine fisica

Sistemi complessi di grandi dimensioni vengono spesso studiati con l'aiuto di modelli in scala ridotta (ad esempio in ingegneria idraulica ed aeronautica, in studi di elasticità, in studi sulla trasmissione del calore, etc). L'analisi dimensionale consente di valutare come la riduzione in scala della misura delle grandezze fondamentali si riflette sulle misure delle grandezze derivate. Risulta molto utile, nelle modellizzazioni in scala, fare ricorso a grandezze adimensionali (come le densità relative, il numero di Reynolds, il numero di Mach, etc.) che non dipendono dai fattori di scala.

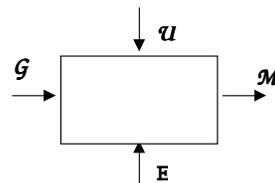
## Capitolo 3

# Strumenti di misura

Le operazioni di misurazione delle grandezze fisiche vengono effettuate per mezzo degli *strumenti di misura* (in inglese *measuring instruments*). Nella pratica quotidiana della ricerca scientifica o delle applicazioni tecnologiche si utilizzano molti strumenti di diverso tipo, in genere prodotti in serie, ma talora anche realizzati *ad hoc* per esigenze particolari. In questo Capitolo verranno introdotti alcuni criteri generali per la classificazione degli strumenti e per la valutazione delle loro prestazioni.

### 3.1 – Elementi funzionali

In linea di principio, il funzionamento di uno strumento di misura può essere schematizzato nel modo seguente: la grandezza  $\mathcal{G}$  da misurare viene confrontata con il campione di unità di misura  $\mathcal{U}$ ; il risultato della misurazione, cioè il valore  $X$  della misura, viene presentato in uscita dallo strumento, in genere trasformato nel valore  $Z$  di una nuova grandezza  $\mathcal{M}$  di facile lettura (ad es. lo spostamento di un indice su una scala graduata). Nella figura, la quarta freccia ( $E$ ) rappresenta l'energia che in molti casi deve essere fornita dall'esterno allo strumento.



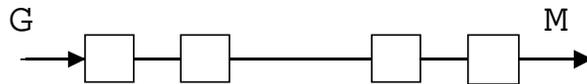
Alcuni pochi strumenti presentano una struttura logica semplice, in cui la grandezza  $\mathcal{G}$  viene confrontata direttamente con il campione  $\mathcal{U}$ .

*Esempio:* Un'asta millimetrata per misure di lunghezza. La grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso è la lunghezza che si vuole misurare. Il campione  $\mathcal{U}$  (in questo caso il millimetro) ed i suoi multipli sono incisi sull'asta. Anche la misura  $X(\mathcal{G})$  è leggibile direttamente sull'asta.

Nella maggior parte dei casi la struttura logica dello strumento è più complessa: il confronto con il campione avviene tramite l'operazione di *taratura* (in inglese *calibration*), eseguita generalmente dal costruttore dello strumento. La grandezza  $\mathcal{G}$  può subire più manipolazioni e trasformazioni in altre grandezze.

*Esempio:* Il termometro a mercurio. La grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso è la temperatura del fluido a contatto con il bulbo del termometro. La grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita è l'altezza della colonna di mercurio nel cannello. Lo strumento è tarato in modo da poter leggere direttamente sulla scala graduata i valori  $X(\mathcal{G})$  della grandezza in ingresso.

Per studiare la struttura logica di uno strumento, conviene considerarlo costituito da più *elementi funzionali*, ciascuno in grado di svolgere un ben determinato compito.



**Fig. 3.1** – Rappresentazione schematica di uno strumento come sequenza di elementi funzionali (catena di misura).

Quando si vuole porre in evidenza la struttura logica interna di uno strumento come sequenza di elementi funzionali (Fig. 3.1) si usa spesso il termine *catena di misura* (ingl. *measuring chain*).

### A) Elemento sensibile (sensore)

Il *sensore* (ingl. *sensor*) è il primo anello della catena, cioè l'elemento d'ingresso dello strumento, che viene direttamente influenzato dalla grandezza  $G$  da misurare.



*Esempi:* Il bulbo del termometro a mercurio. La giunzione bimetallica di un termometro a termocoppia. La coppia di puntali di uno strumento per misure di corrente elettrica o differenza di potenziale elettrico.

### B) Elemento di uscita della misura

È l'ultimo anello della catena di misura. Trasmette all'esterno dello strumento il valore  $Z(\mathcal{M})$  della grandezza in uscita, che fornisce l'informazione sul valore  $X(\mathcal{G})$  della grandezza in ingresso.



L'elemento di uscita è spesso un visualizzatore (in inglese *display*), leggibile direttamente dall'operatore.

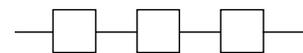
*Esempi:* Un ago mobile (ingl. *index*) su un quadrante graduato (ingl. *dial*). Un visualizzatore digitale. Il pennino di un registratore. Una stampante.

L'elemento di uscita non comunica necessariamente con l'uomo: esso può anche fornire segnali, tipicamente elettrici, adatti a costituire l'ingresso di un altro dispositivo meccanico o elettrico (ad es. un attuatore o un calcolatore elettronico).

*Esempio:* I termostati ambientali misurano la temperatura di una stanza e la confrontano con un valore pre-impostato. L'esito della misura non viene generalmente visualizzato, bensì inviato, sotto forma di segnale elettrico, ad un attuatore (pompa di circolazione o valvola) o ad un elaboratore elettronico di controllo.

### C) Elementi intermedi: trasduttori, amplificatori, manipolatori

All'interno della catena di misura, la grandezza da misurare può subire una o più trasformazioni in altre grandezze, più comode da manipolare, trasmettere o visualizzare. Nella pratica è molto frequente il caso di grandezze meccaniche o termiche trasformate in grandezze elettriche.



L'elemento che esegue la trasformazione è detto *trasduttore* (ingl. *transducer*).

Spesso, all'interno della catena di misura, il valore di una grandezza è soggetto a delle variazioni: ad esempio, può venire amplificato, o subire operazioni di addizione o sottrazione. L'elevata flessibilità dei segnali elettrici in relazione a questo tipo di manipolazioni è uno dei motivi che giustificano la conversione di grandezze meccaniche o termiche in grandezze elettriche.

*Esempio 1:* In un termometro a resistenza elettrica il sensore è costituito da un resistore attraversato da una corrente elettrica costante. Una variazione di temperatura si traduce in una variazione della resistenza elettrica, che a sua volta produce una variazione della differenza di potenziale ai capi del resistore. Le deboli variazioni di differenza di potenziale vengono poi amplificate in modo da pilotare

lo spostamento di un indice su una scala graduata opportunamente tarata.

*Esempio 2:* In una *bilancia elettronica* la grandezza  $\mathcal{G}$  da misurare è la massa  $m$ . La bilancia trasforma la forza peso  $mg$  in una grandezza elettrica: una differenza di potenziale o un'intensità di corrente. Le variazioni della grandezza elettrica vengono amplificate in modo da pilotare il visualizzatore, opportunamente tarato, dell'elemento di presentazione dei dati.

È bene notare che la suddivisione di uno strumento o di una catena di misura in elementi funzionali, se è in genere sempre possibile dal punto di vista logico, non necessariamente corrisponde ad una reale suddivisione fisica. È infatti frequente il caso che un solo componente fisico di uno strumento svolga contemporaneamente le funzioni logiche di due o più elementi funzionali.

## 3.2 – Classificazioni degli strumenti

In relazione al loro modo di funzionamento, gli strumenti possono venire variamente classificati.

### A) Strumenti con uscita a deviazione o a zero

Negli strumenti con **uscita a deviazione** la variazione del valore  $X$  della grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso viene trasformata in una corrispondente variazione  $Z$  della grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita (ad es., la deviazione di un indice su una scala graduata). La catena di misura è aperta (Fig. 3.2, a sinistra).

*Esempi:* Il dinamometro, il termometro a mercurio, la bilancia pesa-persone.

Negli strumenti con **uscita a zero** il valore incognito  $X$  della grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso viene posto a confronto con un valore noto  $Y$  della stessa grandezza. In genere, il confronto tra  $X$  e  $Y$  avviene per sottrazione: il valore noto  $Y$  viene variato finché la differenza  $X - Y$  non risulta zero. L'elemento di presentazione dei dati è un *rivelatore di zero*. (Questo metodo di misurazione viene anche detto *ad azzeramento* o *per opposizione*). La catena di misura è chiusa, cioè presenta un ramo di ritorno (*retroazione*, in inglese *feedback*) che contiene un attuatore, manuale o automatico, in grado di far variare il valore noto  $Y$  (Fig. 3.2, a destra). Elemento fondamentale della catena chiusa è il manipolatore che esegue la sottrazione  $X - Y$ .

Gli strumenti con uscita a zero sono generalmente più accurati di quelli a deviazione, ma meno adatti a seguire grandezze variabili velocemente nel tempo.

*Esempio:* La bilancia a due piatti. La misurazione di una massa incognita  $m$  posta su un piatto richiede di variare manualmente il numero di masse campione poste sull'altro piatto fino a raggiungere l'equilibrio meccanico.



**Fig. 3.2** – Confronto schematico tra uno strumento con uscita a deviazione (a sinistra) e uno strumento con uscita a zero (a destra). Nel primo caso la catena di misura è aperta, nel secondo caso è chiusa.

### B) Strumenti analogici o digitali

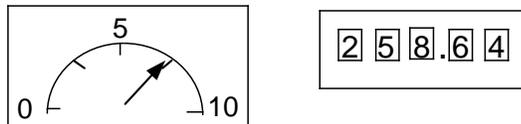
Negli **strumenti analogici** (in inglese *analogue instruments*) il valore  $X$  della grandezza da misurare

si trasforma, al termine della catena di misura, in un segnale di tipo analogico, cioè un segnale che può variare con continuità (deviazione di un indice, valore di una tensione elettrica, etc.)

Negli **strumenti digitali** (in inglese *digital instruments*), al termine della catena di misura il valore  $X$  viene trasformato in un numero, leggibile direttamente su di un visualizzatore oppure codificato sotto forma di segnali elettrici (ad esempio in codice binario) adatti ad essere accettati da un elaboratore elettronico.

La trasformazione del segnale analogico d'ingresso in un segnale digitale in uscita può essere ottenuta mediante congegni meccanici, ma generalmente è oggi realizzata per mezzo di dispositivi elettronici detti *convertitori analogico-digitali* ( $ADC = \text{Analog to Digital Converter}$ ).

**Fig. 3.3** - Visualizzatore di uno strumento analogico (a sinistra) e di uno strumento digitale (a destra).



*Esempio:* Una generica grandezza  $\mathcal{G}$  viene preventivamente trasformata, per mezzo di uno o più trasduttori, in una differenza di potenziale elettrico  $V_i$ . Un modo relativamente semplice per realizzare la conversione analogico-digitale della differenza di potenziale  $V_i$  si basa sul *convertitore a singola rampa*. In questo dispositivo elettronico, una differenza di potenziale di riferimento  $V_r$  variabile linearmente nel tempo ( $V_r = at$ ) viene prodotta ogni  $\Delta T$  secondi. Durante la crescita della rampa  $V_r = at$ , si contano in sequenza gli impulsi prodotti da un generatore a frequenza costante, e si confronta il valore crescente  $V_r$  con il valore d'ingresso  $V_i$  utilizzando un componente elettronico detto *comparatore*. Quando  $V_r = V_i$  il comparatore invia un segnale di stop al contatore di impulsi, che viene così fermato: il numero  $n_i$  di impulsi contati è proporzionale al valore d'ingresso  $V_i$ , e può venire direttamente visualizzato oppure inviato ad un elaboratore. Ogni singola conversione analogico-digitale richiede un intervallo di tempo  $\Delta T$  (tempo di campionamento, in inglese *sampling time*).

### C) Strumenti indicatori o registratori

Negli **strumenti indicatori** (in inglese *displaying instruments*) il valore della misura viene presentato all'operatore, sotto forma analogica o digitale, per la sola durata dell'operazione di misura.

*Esempi:* La bilancia a due piatti, il termometro a mercurio.

Negli **strumenti registratori** (in inglese *recording instruments*) il valore della misura viene immagazzinato, in forma analogica o digitale, su opportuni supporti: carta da grafico, nastro o disco magnetico, memorie a semiconduttore, etc.

*Esempi:* Un termometro registratore, un barometro registratore.

### D) Strumenti attivi o passivi

Gli **strumenti passivi** prelevano l'energia necessaria al loro funzionamento dal sistema su cui viene effettuata la misurazione.

Gli **strumenti attivi** sono invece forniti di una sorgente di energia estranea al sistema in misura (alimentazione dalla rete elettrica, batterie, etc.).

*Esempio:* Un termometro a mercurio è uno strumento passivo. Un termometro a resistenza elettrica è uno strumento attivo.

### 3.3 – Caratteristiche statiche degli strumenti

Le caratteristiche di rendimento di uno strumento individuano la qualità delle misure che lo strumento è in grado di eseguire. In questo paragrafo 3.3 e nel successivo 3.4 considereremo le principali caratteristiche *statiche*, relative cioè a misurazioni di *grandezze costanti nel tempo*. Nel paragrafo 3.5 accenneremo alle caratteristiche dinamiche, relative cioè alla misurazione di grandezze variabili nel tempo.

#### A) Campo di misura

Il *campo di misura* (in inglese *range of indication*) è l'intervallo di valori  $X$  della grandezza  $\mathcal{G}$  in cui lo strumento esegue misure entro un prefissato grado di accuratezza.

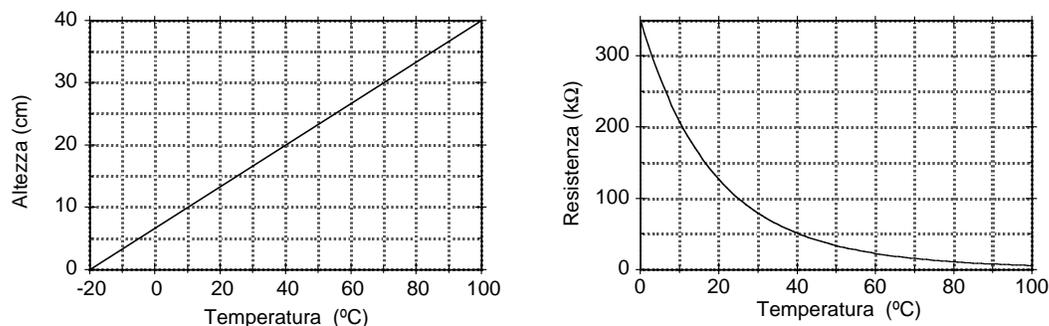
Il campo di misura è limitato inferiormente dalla *portata minima* (in inglese *lower limit*) e superiormente dalla *portata massima*, detta anche *fondo scala* (in inglese *upper limit*). La *portata massima di sicurezza* (in genere maggiore del fondo scala) è il massimo valore di  $X$  applicabile senza danneggiare lo strumento. In alcuni strumenti (detti strumenti *a più portate*) è possibile variare il campo di misura per mezzo di opportuni selettori (ad esempio ruotando la manopola di un commutatore).

*Esempio:* In un metro a nastro la portata minima è zero, la portata massima corrisponde alla lunghezza della scala graduata. Non c'è necessità di definire una portata massima di sicurezza.

*Esempio:* Nel termometro a mercurio il campo di misura è definito dai valori minimo e massimo incisi sulla scala graduata (ad es.  $-10^{\circ}\text{C}$  e  $+100^{\circ}\text{C}$ ). Il valore massimo rappresenta generalmente anche la portata massima di sicurezza: esporre il termometro a temperature superiori può provocarne la rottura.

#### B) Linearità

Uno strumento è detto *lineare* quando la curva di risposta, cioè la relazione che collega i valori  $Z$  della grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita ai valori  $X$  della grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso, è lineare.



**Fig. 3.4** – Nel termometro a mercurio (a sinistra) la relazione tra temperatura e altezza della colonnina è lineare. In un termometro con sonda a semiconduttore (a destra) la relazione tra temperatura e resistenza elettrica non è lineare.

*Esempio 1:* Il termometro a mercurio è con ottima approssimazione uno strumento lineare. Nel campo tipico di utilizzo, il coefficiente di espansione termica del mercurio è costante, e l'altezza della colonnina di mercurio cresce linearmente con la temperatura (Fig. 3.4, a sinistra).

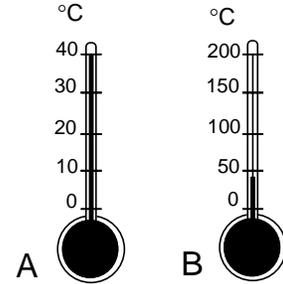
*Esempio 2:* Un termometro con sonda a semiconduttore (termistore) è un buon esempio di strumento *non* lineare. La grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso è la temperatura, la grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita è la resistenza

elettrica del termistore. Al crescere della temperatura la resistenza elettrica del termistore si riduce in modo non lineare (Fig. 3.4, a destra).

### C) Sensibilità

La *sensibilità* (in inglese *sensitivity*) è il rapporto  $\Delta Z/\Delta X$  tra variazione del valore della grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita dallo strumento (ad es. la deviazione di un indice) e corrispondente variazione del valore della grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso (grandezza da misurare).

*Esempio 1:* In un termometro a mercurio la grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso è la temperatura, la grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita è l'altezza della colonnina di mercurio. Facendo riferimento alla figura, il termometro A ha una sensibilità 5 volte maggiore del termometro B, in quanto la stessa variazione di temperatura provoca una variazione 5 volte maggiore dell'altezza della colonnina di mercurio.



Negli *strumenti lineari* la sensibilità  $\Delta Z/\Delta X$  è costante in tutto il campo di misura, e corrisponde alla pendenza della retta nel grafico di  $Z$  in funzione di  $X$ .

*Esempio 2:* Nel caso del termometro a mercurio della Fig. 3.4 (a sinistra) la sensibilità  $\Delta h/\Delta \theta$  ha il valore costante di  $0.33 \text{ cm}/^\circ\text{C}$ .

Negli *strumenti non lineari* la sensibilità non è costante nel campo di misura; la pendenza della curva  $Z(X)$  non è infatti costante. La sensibilità va pertanto definita come la derivata  $dZ/dX$ .

*Esempio 3:* Nel termometro con sonda a semiconduttore della Fig. 3.4 (a destra) il valore assoluto  $|dR/d\theta|$  della sensibilità varia da  $18.4 \text{ k}\Omega/^\circ\text{C}$  (a  $0^\circ\text{C}$ ) a  $0.18 \text{ k}\Omega/^\circ\text{C}$  (a  $100^\circ\text{C}$ ).

Negli *strumenti analogici* il visualizzatore è spesso costituito da una scala graduata. Si usa talora esprimere la sensibilità  $\Delta Z/\Delta X$  considerando come valore  $\Delta Z$  il numero di divisioni sulla scala graduata. La sensibilità è allora l'inverso della risoluzione (vedi più sotto).

*Esempio 4:* Un regolo millimetrato ha la sensibilità  $1/\Delta X$  di 1 divisione per millimetro.

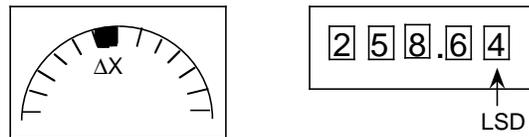
Negli *strumenti digitali* la sensibilità va valutata considerando la grandezza (analogica)  $\mathcal{M}$  a monte del convertitore analogico/digitale di uscita.

Si chiama *soglia di sensibilità* il più piccolo valore della grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso capace di provocare una variazione della grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita.

### D) Risoluzione di lettura

La risoluzione di lettura (in inglese *display resolution*) è la più piccola variazione misurabile  $\Delta X$  del valore  $X$  della grandezza  $\mathcal{G}$  in ingresso, corrispondente alla minima variazione percepibile  $\Delta Z$  del valore  $Z$  della grandezza  $\mathcal{M}$  in uscita.

**Fig. 3.5** – Risoluzione di lettura di uno strumento analogico (a sinistra) e di uno strumento digitale (a destra).



Negli **strumenti analogici** la risoluzione di lettura corrisponde generalmente alla distanza minima tra due incisioni della scala graduata (Fig. 3.5, a sinistra).

Negli **strumenti digitali** la risoluzione di lettura corrisponde al valore unitario della cifra meno significativa ( $LSD = \text{Least Significant Digit}$ ) (Fig. 3.5, a destra)

*Esempi:* Le aste millimetriche (righe da disegno) hanno generalmente risoluzione di lettura  $\Delta X = 1 \text{ mm}$ .

I calibri a vite micrometrica hanno generalmente risoluzione di lettura  $\Delta X = 0.01 \text{ mm}$ .

*Nota:* Sensibilità e risoluzione sono tra di loro strettamente correlate. Per ridurre la risoluzione di uno

strumento è in genere necessario aumentare la sua sensibilità. Come abbiamo visto più sopra, per gli strumenti analogici talora la sensibilità viene espressa come l'inverso  $1/\Delta X$  della risoluzione.

*Nota:* Non esiste tuttora un diffuso accordo sulla nomenclatura utilizzata in questo paragrafo. Talora si usa il termine *potere risolvante* per indicare l'inverso della risoluzione,  $1/\Delta X$ , oppure il rapporto tra l'estensione del campo di misura e la risoluzione. È pure frequente, seppure evidentemente sbagliato, l'uso del termine *risoluzione* per indicare il *potere risolvante*. Il significato reale dei vari termini risulta in genere chiarito dal contesto.

## E) Discrezione

Uno strumento di misura provoca generalmente una perturbazione al sistema su cui viene eseguita la misurazione. Il valore  $X$  della grandezza  $\mathcal{G}$  viene pertanto alterato dalla presenza dello strumento di misura. Si parla di maggiore o minore *discrezione* (in inglese *transparency*) di uno strumento in relazione all'entità di questa alterazione.

*Esempio 1:* La misurazione di una massa con una bilancia non altera il valore della massa stessa; la bilancia è uno strumento discreto.

*Esempio 2:* La misurazione della temperatura di un corpo richiede uno scambio di calore tra il corpo e il termometro, e quindi altera lo stato termico del corpo stesso.

*Esempio 3:* L'applicazione di un voltmetro ad un circuito elettrico per misurare una differenza di potenziale altera le caratteristiche elettriche del circuito stesso.

Nel §3.2 abbiamo introdotto la distinzione tra strumenti attivi e passivi. Evidentemente uno strumento passivo perturba il sistema soggetto a misurazione, in quanto ne preleva l'energia necessaria per il suo funzionamento (si parla in questo caso anche di *consumo* di uno strumento).

Va tuttavia tenuto presente che anche per gli strumenti attivi la perturbazione, se può spesso venire ridotta al di sotto dei livelli ritenuti accettabili per misure macroscopiche, non può mai venire completamente eliminata. In particolare, a livello di sistemi atomici o subatomici la perturbazione indotta sul sistema dalla misurazione non è mai trascurabile.

## F) Limiti d'impiego

Il funzionamento di uno strumento risente delle condizioni ambientali. Oltre alla grandezza  $\mathcal{G}$  che si vuole misurare, altre grandezze (dette *grandezze d'influenza*, in inglese *influence quantities*) possono influire sul valore della misura: temperatura, pressione, umidità, intensità delle vibrazioni meccaniche, accelerazione, tensione di alimentazione, campi elettromagnetici, etc.

Le *condizioni d'impiego* (in inglese *operating conditions*) di uno strumento definiscono gli intervalli dei valori delle grandezze d'influenza nel cui ambito lo strumento esegue misurazioni entro un prefissato grado di accuratezza.

*Esempio:* Dalle caratteristiche tecniche di una bilancia elettronica:

|                             |                      |
|-----------------------------|----------------------|
| temperatura di operazione   | $0 \div 40$ C        |
| livello sopra/sotto il mare | -3400 m ... + 6000 m |
| umidità relativa dell'aria  | 15 % $\div$ 85 %     |
| vibrazioni                  | 0.3 m/s <sup>2</sup> |

Eseguire una misurazione al di fuori dei limiti d'impiego dello strumento comporta l'introduzione di errori nella misura, e talora anche il danneggiamento dello strumento stesso.

## 3.4 – Accuratezza di uno strumento

Come abbiamo già accennato al § 1.3, il risultato della misurazione di una grandezza fisica, qualsiasi sia lo strumento utilizzato, non è mai un valore numerico  $X$  univocamente definito.

Come minimo, ogni strumento è infatti caratterizzato da una **risoluzione di lettura** finita  $\Delta X$ , per cui non è in grado di fornire informazioni su variazioni della grandezza inferiori a  $\Delta X$ . Per effetto della risoluzione finita, il risultato di una singola misurazione è pertanto un intervallo continuo di valori, di ampiezza pari a  $\Delta X$ .

Per convenzione, la misura di una grandezza fisica viene generalmente espressa nella forma

$$X = X_0 \pm \delta X, \quad (3.4.1)$$

dove  $X_0$  è un valore centrale che individua la posizione dell'intervallo di valori sull'asse  $X$  e  $\delta X$  è l'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura.

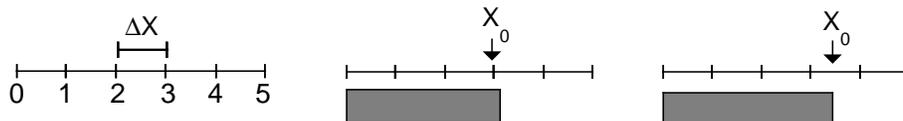
Per il momento opereremo la scelta, del tutto ragionevole, di esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione come  $\delta X = \Delta X/2$ . Nel Cap. 4 riprenderemo in considerazione l'argomento in modo più approfondito e vedremo che in molti casi può essere più conveniente esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione in modo diverso (§4.5).

Negli *strumenti digitali* (Fig. 3.5, a destra) il valore centrale  $X_0$  è dato direttamente dal valore che compare sul visualizzatore. La risoluzione  $\Delta X$  e l'incertezza  $\delta X$  sono date rispettivamente dal valore unitario della cifra meno significativa (LSD) e dalla sua metà.

*Esempio:* Si misura un intervallo di tempo  $\tau$  con un cronometro digitale. Sul visualizzatore si legge 34.27 s. Il valore unitario della LSD è 0.01 s, cioè un centesimo di secondo. La misura andrà espressa come  $\tau = (34.27 \pm 0.005)$  s.

Negli *strumenti analogici* la valutazione del valore centrale  $X_0$  può essere diversa a seconda che l'estremo dell'oggetto da misurare (ovvero l'indice mobile su un visualizzatore) sia in prossimità di una incisione sulla scala graduata oppure cada all'incirca a metà tra due incisioni. Le due situazioni sono esemplificate nella Fig. 3.6. Nel primo caso il valore  $X_0$  verrà letto direttamente sulla scala graduata; nel secondo caso si potrà attribuire a  $X_0$  un valore intermedio rispetto ai valori delle due incisioni contigue.

Non è comunque prudente considerare una risoluzione  $\Delta X$  inferiore alla distanza tra due tacche contigue, anche se quest'operazione potrebbe talora sembrare plausibile. In genere infatti la risoluzione di lettura di uno strumento è già ridotta dal costruttore al valore minimo compatibile con l'accuratezza globale.



**Fig. 3.6** – Misurazione con uno strumento analogico. A sinistra: rappresentazione schematica di una scala graduata, con  $\Delta X = 1$  (le unità di misura dipendono ovviamente dal tipo di grandezza misurata e dalle caratteristiche dello strumento). Nella situazione rappresentata al centro,  $X = 3 \pm 0.5$ . Nella situazione rappresentata a destra,  $X = 3.5 \pm 0.5$ .

*Esempio:* Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. L'estremità del foglio appare equidistante dalle due tacche contigue corrispondenti a 296 e 297 mm. È plausibile considerare come valore centrale  $X_0 = 296.5$  mm, ma può essere imprudente assumere una risoluzione inferiore alla distanza tra incisioni contigue ( $\Delta X = 1$  mm).

Oltre alla risoluzione finita dello strumento, altri fattori possono influenzare il risultato e la qualità di una misurazione. Si tratta di fattori dipendenti dalla struttura dello strumento, dall'accuratezza della sua costruzione, dallo stato di manutenzione, dall'influenza di fattori ambientali, etc. Ne elenchiamo alcuni a titolo di esempio:

- difetti nella taratura (scarsa accuratezza del campione di riferimento, inaccurata procedura di taratura, etc.);
- difetti di calibrazione dello zero (ad es., negli strumenti elettronici lo zero subisce spesso una *deriva* nel tempo);

- attriti o giochi meccanici;
- effetti di grandezze d'influenza diverse dalla grandezza che si vuole misurare, ad es. temperatura, umidità, vibrazioni meccaniche, campi elettrici o magnetici, variazioni della tensione di alimentazione.

In genere, gli effetti di questi diversi fattori sulle prestazioni di uno strumento vengono divisi in due categorie:

- a) Si parla di **errori sistematici** per gli effetti che si riproducono sempre nello stesso modo ogniqualvolta viene ripetuta una misurazione della stessa grandezza fisica.
- b) Si parla di **errori casuali** (o *accidentali*) per gli effetti che si manifestano in modo diverso ed imprevedibile quando la misura di una grandezza fisica viene ripetuta.

Talora è necessario anche considerare la **stabilità**, cioè l'attitudine di uno strumento a fornire risultati poco dispersi in misurazioni ripetute sulla stessa grandezza ad intervalli di tempo lunghi rispetto alla durata di una singola misurazione (ad esempio giorni o settimane).

Con il termine **accuratezza** (in inglese *accuracy*) si fa riferimento alla qualità globale di uno strumento. L'accuratezza di uno strumento dipende dalla risoluzione di lettura, dall'influenza degli errori sistematici e casuali, dalla stabilità a lungo periodo.

L'accuratezza di uno strumento viene generalmente quotata nel manuale d'uso come un valore numerico di *incertezza* della misura, ossia nella forma  $\pm\delta X$ .

Se l'accuratezza non viene esplicitamente indicata sullo strumento o nel manuale d'uso, si sottintende che gli effetti degli errori sistematici e casuali e dell'instabilità a lungo periodo sono trascurabili rispetto alla risoluzione  $\Delta X$ . In tal caso, come abbiamo già visto, si pone generalmente  $\delta X = \Delta X/2$ .

*Esempio:* Nei metri a nastro di uso corrente, con risoluzione di lettura  $\Delta X = 1$  mm, non viene generalmente indicata l'accuratezza. Ciò significa che il costruttore garantisce che gli errori dovuti allo strumento non sono comunque superiori ad 1 mm.

*Esempio:* Nel manuale d'uso di un termometro digitale con risoluzione di lettura  $\Delta T = 0.1^\circ\text{C}$ , l'accuratezza è quotata come  $\delta T = \pm 0.4^\circ\text{C}$  tra  $-25$  e  $+75^\circ\text{C}$ . Evidentemente in questo caso l'incertezza globale  $\delta T$  è maggiore della risoluzione.

In questo paragrafo abbiamo introdotto, in modo piuttosto veloce, alcuni concetti molto importanti per la valutazione dell'accuratezza degli strumenti (effetti di risoluzione, errori casuali, errori sistematici). Come vedremo nel Capitolo 4, l'incertezza di una misura non dipende solo dalle caratteristiche intrinseche degli strumenti utilizzati ma anche da molti altri fattori esterni agli strumenti stessi. Nel Capitolo 4 affronteremo pertanto il problema dell'accuratezza delle misurazioni da un punto di vista più generale, e cercheremo di approfondire in modo sistematico le problematiche introdotte in questo paragrafo.

## 3.5 – Comportamento dinamico degli strumenti

Le *caratteristiche statiche* analizzate nel §3.3 riassumono le prestazioni degli strumenti per misurazioni di grandezze costanti nel tempo.

In questo paragrafo ci occuperemo, a livello puramente introduttivo, del *comportamento dinamico* degli strumenti, cioè della loro efficienza nella misurazione di grandezze variabili nel tempo.

### A) Grandezze variabili nel tempo

La dipendenza dal tempo di una grandezza fisica può essere di varia natura.

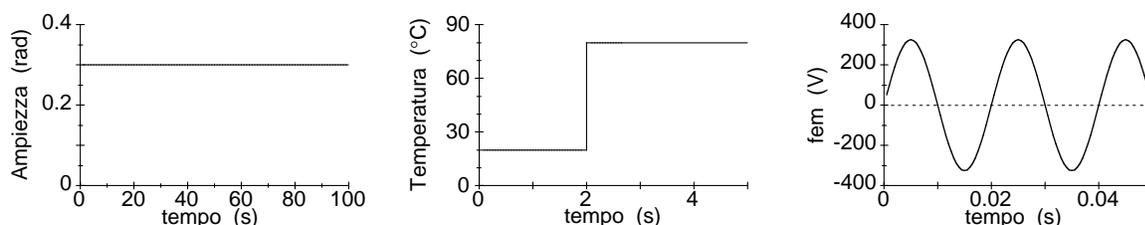
*Esempio 1:* Consideriamo le oscillazioni di un pendolo. L'ampiezza  $\Phi_0$  delle oscillazioni non è costante nel tempo, a causa dello smorzamento dovuto agli attriti; per piccole oscillazioni la sua variazione è

comunque lenta e generalmente  $\Phi_0$  può essere considerata costante per la durata di più periodi di oscillazione (Fig. 3.7, a sinistra).

*Esempio 2:* Un termometro a mercurio, mantenuto inizialmente in aria alla temperatura  $T = 20^\circ\text{C}$ , all'istante  $t = t_0$  viene immerso in un recipiente contenente acqua alla temperatura  $T = 80^\circ\text{C}$ . La temperatura  $T$  dell'ambiente circostante il termometro varia nel tempo secondo una legge a gradino (Fig. 3.7, al centro):

$$T(t) = \begin{cases} 20^\circ\text{C} & \text{per } t < t_0 \\ 80^\circ\text{C} & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

*Esempio 3:* La differenza di potenziale elettrico delle reti di distribuzione europee varia nel tempo in modo sinusoidale secondo la legge  $V(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ , dove  $\omega = 2\pi\nu$  corrisponde ad una frequenza  $\nu = 50$  Hz (Fig. 3.7, a destra).



**Fig. 3.7** – Dipendenza dal tempo del valore  $X(t)$  di una grandezza fisica. Tre andamenti particolarmente importanti: costante (a sinistra), a gradino (al centro), sinusoidale (a destra).

Quando il valore  $X(t)$  della grandezza che si vuole misurare non è costante, è necessario che lo strumento utilizzato sia in grado di seguirne con sufficiente velocità le variazioni nel tempo.

Conoscere il comportamento dinamico di uno strumento significa conoscere come varia nel tempo la grandezza in uscita  $Z(t)$  al variare della grandezza in ingresso  $X(t)$ . Quanto più veloci sono le variazioni di  $X(t)$ , tanto più difficile è ottenere che  $Z(t)$  riesca a seguirle con fedeltà.

Gli esempi considerati sopra (andamento costante, a gradino, sinusoidale) sono relativamente semplici. Nella realtà si possono incontrare dipendenze dal tempo anche molto più complicate. Esistono tuttavia tecniche matematiche che consentono di ricondurre qualsiasi funzione periodica o non periodica rispettivamente a una serie (la serie di Fourier) o a un integrale (l'integrale di Fourier) di funzioni sinusoidali di diverse frequenze. Conoscere la relazione tra  $X(t)$  e  $Z(t)$  per segnali sinusoidali di qualsiasi frequenza significa conoscere la *funzione di risposta* di uno strumento. Lo studio della funzione di risposta di uno strumento consente quindi in linea di principio di conoscerne il comportamento dinamico per qualsiasi tipo di dipendenza dal tempo della grandezza  $X(t)$ .

## B) Modelli matematici per gli strumenti

Per studiare la relazione tra il valore  $X(t)$  in ingresso ad uno strumento e il valore  $Z(t)$  in uscita si cerca in genere di costruire un *modello matematico*.

Gli strumenti più semplici sono gli **strumenti di ordine 0**, nei quali la relazione tra  $X(t)$  e  $Z(t)$  è di diretta proporzionalità

$$a_0 Z = b_0 X \quad \text{cioe' } \quad Z = \frac{b_0}{a_0} X. \quad (3.5.1)$$

La costante di proporzionalità  $k = b_0/a_0$  non è altro che la sensibilità statica introdotta al §3.3.

L'eq. (3.5.1) presuppone una risposta istantanea dei valori  $Z(t)$  alle variazioni, comunque veloci, dei valori d'ingresso  $X(t)$ . Lo strumento di ordine zero è evidentemente un modello ideale; può costituire comunque una buona approssimazione per strumenti molto veloci rispetto alle variazioni di  $X(t)$ .

Negli **strumenti di ordine 1** la relazione tra il valore  $X(t)$  della grandezza in ingresso e il valore  $Z(t)$  della grandezza in uscita obbedisce ad un'equazione differenziale del primo ordine:

$$a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (3.5.2)$$

La presenza del termine  $a_1 (dZ/dt)$  nell'eq. (3.5.2) implica che le variazioni dei valori in ingresso  $X$  non possono venire seguite istantaneamente dai valori in uscita  $Z$ . Le variazioni di  $X$  si riflettono inizialmente nel termine  $a_1 (dZ/dt)$ ; quanto più piccolo è il coefficiente  $a_1$ , tanto più grande è la derivata  $(dZ/dt)$  e tanto più velocemente il valore  $Z$  si adeguerà alle variazioni di  $X$ .

Negli **strumenti di ordine 2** la relazione tra  $X(t)$  e  $Z(t)$  è data da un'equazione differenziale del secondo ordine

$$a_2 \frac{d^2 Z}{dt^2} + a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (3.5.3)$$

L'eq. (3.5.3) è l'equazione del moto di un oscillatore armonico smorzato e forzato.

Generalizzando, si può dire che in molti casi di interesse pratico il modello di uno strumento è descrivibile mediante un'**equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**; a primo membro dell'equazione compaiono le derivate rispetto al tempo del valore in uscita  $Z(t)$ , a secondo membro compare il valore in ingresso  $X(t)$ :

$$a_n \frac{d^n Z}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Z}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (3.5.4)$$

L'ordine dell'equazione differenziale (3.5.4) individua l'*ordine dello strumento*.

**Esempio 1:** Il **termometro a mercurio** è descrivibile con un *modello matematico di ordine 1*. Indichiamo con  $T$  la temperatura letta sul termometro (grandezza in uscita), con  $T_{in}$  la temperatura del fluido in cui il termometro è immerso (grandezza in ingresso). La differenza tra la temperatura  $T$  del bulbo del termometro e la temperatura  $T_{in}$  del fluido provoca un flusso di calore  $Q$  dal fluido al bulbo secondo la legge

$$\frac{dQ}{dt} = -k \frac{S}{d} (T - T_{in}) \quad (3.5.5)$$

dove:  $t$  è il tempo,  $k$  è la conducibilità termica del vetro del termometro,  $S$  è l'area della superficie del bulbo,  $d$  è lo spessore del vetro. L'assorbimento o cessione di calore da parte del bulbo del termometro provoca una variazione di temperatura secondo la legge

$$dQ = C dT \quad (3.5.6)$$

dove  $C$  è la capacità termica del mercurio nel bulbo.

Eliminando la quantità di calore  $Q$  dalle eq. (3.5.5) e (3.5.6) si ottiene l'equazione differenziale del 1° ordine che lega la grandezza in ingresso  $T_{in}$  alla grandezza in uscita  $T$ :

$$C \frac{dT}{dt} + k \frac{S}{d} T = k \frac{S}{d} T_{in}. \quad (3.5.7)$$

**Esempio 2:** Il **dinamometro a molla** per la misurazione delle forze è descrivibile con un *modello matematico di ordine 2*. La grandezza in ingresso è la forza  $\mathcal{F}$  che si vuole misurare, la grandezza in uscita è lo spostamento  $Z$  dell'estremità della molla cui viene applicata la forza. Il modello dello strumento è basato sull'equazione del moto  $\sum f_i = m (d^2 Z/dt^2)$ . Le forze agenti sono, oltre a  $\mathcal{F}$ , la forza elastica della molla  $F_e = -kZ$  e la forza di attrito viscoso  $F_a = -\eta(dZ/dt)$ . L'equazione differenziale che collega la grandezza in ingresso  $\mathcal{F}$  alla grandezza in uscita  $Z$  è del 2° ordine:

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} + \eta \frac{dZ}{dt} + k Z = \mathcal{F}. \quad (3.5.8)$$

*Esempio 3:* Lo **strumento a bobina mobile** per la misurazione delle correnti elettriche è descrivibile con un *modello matematico di ordine 2*. La grandezza in ingresso è la corrente elettrica  $J$ , la grandezza in uscita è l'angolo  $\phi$  di deviazione dell'indice. Schematicamente lo strumento è costituito da una bobina che può ruotare intorno al suo asse di simmetria, con momento d'inerzia  $\mathcal{I}$ . La bobina è immersa in un campo d'induzione magnetica radiale  $B$  generato dai due poli di un magnete permanente. Quando la bobina è percorsa da una corrente  $J$ , risente di un momento di forza proporzionale al prodotto della corrente per il campo d'induzione magnetica,  $\tau_e = cBJ$ , cui si oppone un momento di forza elastica proporzionale all'angolo di rotazione,  $\tau_e = -k\phi$ . Se si tiene conto anche di un momento di forza di smorzamento viscoso,  $\tau_v = -\eta(d\phi/dt)$ , si ottiene infine l'equazione differenziale del 2° ordine che collega la corrente in ingresso  $J$  all'angolo di rotazione in uscita  $\phi$ :

$$\mathcal{I} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \eta \frac{d\phi}{dt} + k\phi = (cB)J. \quad (3.5.9)$$

### C) Strumenti di 1° e 2° ordine

Una volta nota la dipendenza dal tempo della grandezza in ingresso  $X(t)$ , l'andamento  $Z(t)$  della grandezza in uscita può essere calcolato risolvendo l'equazione differenziale che descrive lo strumento.

Alcune nozioni di base sulla soluzione (o *integrazione*) delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di 1° e 2° ordine, del tipo (3.5.2) e (3.5.3), sono riportati in Appendice C.1. Richiamiamo qui di seguito alcuni concetti fondamentali.

Le eq. (3.5.2) e (3.5.3) sono dette *equazioni non omogenee*, in quanto la funzione  $X(t)$  a secondo membro è diversa da zero. Uguagliando a zero il secondo membro nelle eq. (3.5.2) e (3.5.3) si ottengono le corrispondenti *equazioni omogenee*.

In generale la soluzione  $Z(t)$  di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è la somma di due funzioni:

$$Z(t) = Z_{\text{tr}}(t) + Z_{\text{st}}(t), \quad (3.5.10)$$

dove  $Z_{\text{tr}}(t)$  è la soluzione generale dell'equazione omogenea;

$Z_{\text{st}}(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

(Gli indici "tr" e "st" stanno, rispettivamente, per "transitorio" e "stazionario".)

Le funzioni  $Z_{\text{tr}}(t)$ , soluzioni delle **equazioni omogenee**, dipendono solo dalla natura dello strumento e non dalla grandezza in ingresso  $X(t)$ .

Per l'equazione **omogenea del primo ordine**:

$$\frac{dZ}{dt} + \gamma Z = 0; \quad (\gamma = a_0/a_1) \quad (3.5.11)$$

è facile verificare che

$$Z_{\text{tr}}(t) = Z_0 e^{-\gamma t}. \quad (3.5.12)$$

L'equazione **omogenea del secondo ordine** può essere scritta nella forma

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 = 0; \quad (2\gamma = a_1/a_2; \quad \omega_0^2 = a_0/a_2). \quad (3.5.13)$$

Si tratta dell'equazione del moto dell'oscillatore armonico non forzato:  $\omega_0$  è la frequenza angolare propria,  $\gamma$  è il fattore di smorzamento.

Si hanno tre soluzioni, a seconda che  $\gamma$  è minore, uguale o maggiore di  $\omega_0$ :

$$\text{se } \gamma < \omega_0, \quad Z_{\text{tr}}(t) = Z_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi) \quad (\omega_s^2 = \omega_0^2 - \gamma^2) \quad (3.5.14)$$

$$\text{se } \gamma = \omega_0, \quad Z_{\text{tr}}(t) = (Z_1 + Z_2 t) e^{-\gamma t} \quad (3.5.15)$$

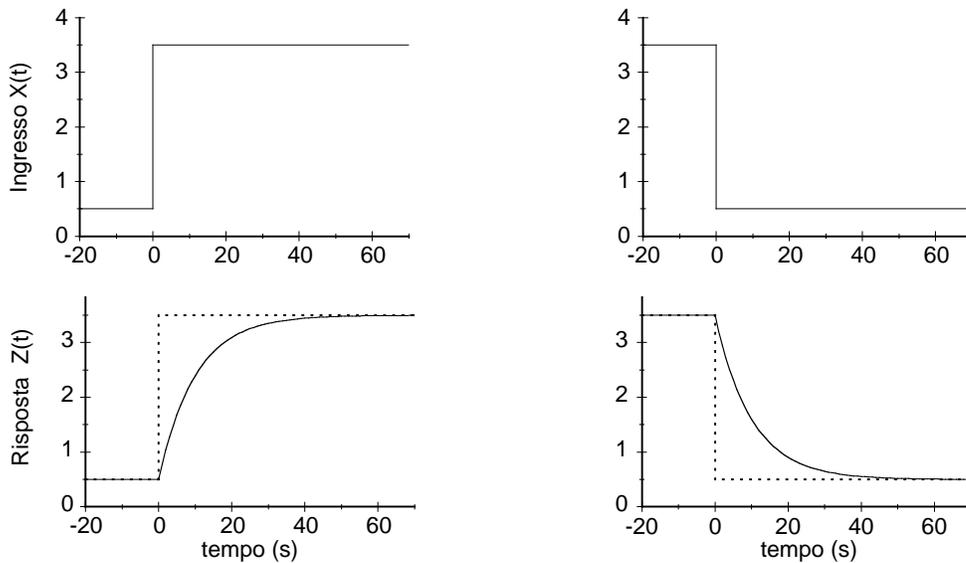
$$\text{se } \gamma > \omega_0, \quad Z_{\text{tr}}(t) = Z_1 e^{-(\gamma-\delta)t} + Z_2 e^{-(\gamma+\delta)t} \quad (\delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \quad (3.5.16)$$

I parametri  $\gamma$  e  $\omega_0$  dipendono dalle caratteristiche dello strumento. I parametri  $Z_0, Z_1, Z_2$  dipendono dalle condizioni iniziali.

Le soluzioni  $Z_{\text{tr}}(t)$  contengono sempre un fattore esponenziale negativo di smorzamento, del tipo  $\exp(-\gamma t)$ . Per  $t \rightarrow \infty$  le funzioni  $Z_{\text{tr}}(t) \rightarrow 0$ , e  $Z(t) \rightarrow Z_{\text{st}}(t)$ : le soluzioni delle equazioni omogenee hanno perciò un carattere *transitorio*.

Il parametro  $\gamma$  misura la *prontezza* dello strumento, cioè la velocità con cui la soluzione transitoria si spegne e lo strumento si adegua alle variazioni della grandezza in ingresso. L'inverso di  $\gamma$ , cioè  $\tau = 1/\gamma$ , ha le dimensioni di un tempo ed è chiamato *costante di tempo* dello strumento. Il fattore di smorzamento esponenziale viene spesso espresso nella forma:  $\exp(-t/\tau)$ .

Le soluzioni particolari  $Z_{\text{st}}$  delle **equazioni non omogenee** (3.5.3) e (3.5.4) dipendono dalla forma della funzione  $X(t)$  in ingresso. Le soluzioni  $Z_{\text{st}}$  descrivono l'andamento *stazionario*, asintotico per  $t \rightarrow \infty$ .



**Fig. 3.8** – Risposta di uno strumento del 1° ordine ad un ingresso a gradino. In alto due possibili ingressi. In basso le corrispondenti risposte (linea continua).

## D) Risposta ad un ingresso a gradino

Consideriamo a titolo di esempio il caso in cui la grandezza da misurare ha una dipendenza dal tempo descritta da una funzione a gradino (Fig. 3.5, al centro):

$$X(t) = \begin{cases} X_0 & \text{per } t < 0 \\ X_1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (3.5.17)$$

e supponiamo che per  $t < 0$  lo strumento abbia avuto il tempo di stabilizzarsi alla risposta stazionaria  $Z = (b_0/a_0) X_0$ .

*Esempio 1:* Un termometro a mercurio, inizialmente in equilibrio in un ambiente alla temperatura  $T_0$ , all'istante  $t = 0$  viene immerso in un fluido alla temperatura  $T_1$ .

*Esempio 2:* Ad un dinamometro disposto in verticale, inizialmente scarico, viene appesa all'istante  $t = 0$  una massa  $m$ .

*Esempio 3:* All'istante  $t = 0$  i morsetti d'ingresso di un voltmetro a bobina mobile vengono collegati ad una sorgente di forza elettromotrice costante.

Studiamo cosa succede per  $t > 0$ . Se lasciamo passare un tempo sufficientemente lungo, al limite per  $t \rightarrow \infty$ , la soluzione transitoria  $Z_{tr}(t)$  si spegne e rimane la soluzione stazionaria

$$Z_{st} = \frac{b_0}{a_0} X_1 \quad (3.5.18)$$

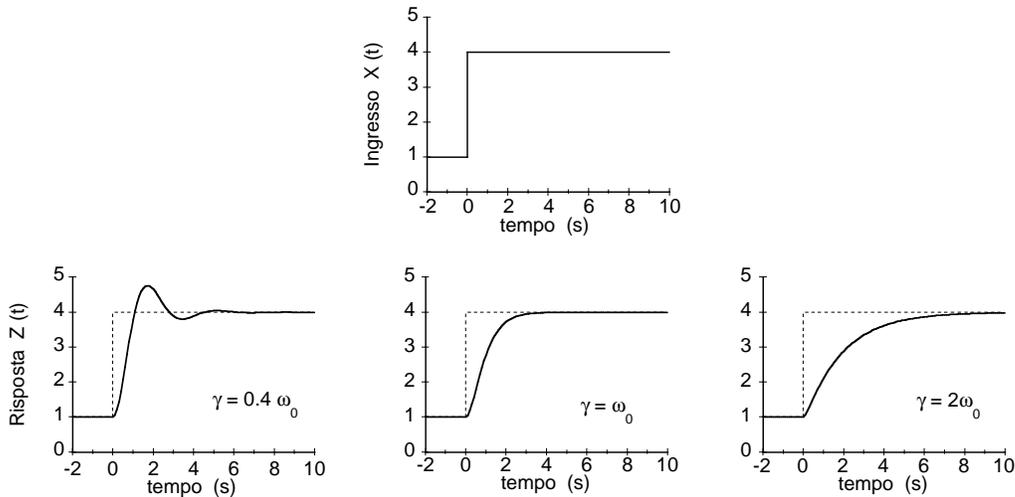
uguale per gli strumenti del 1° e del 2° ordine.

Sommiamo ora le due soluzioni transitoria e stazionaria.

Per gli **strumenti del 1° ordine** la soluzione transitoria  $Z_{tr}(t)$  (eq. 3.5.12) contiene la costante  $Z_0$  dipendente dalle condizioni iniziali. La costante  $Z_0$  può essere determinata studiando il comportamento di  $Z(t)$  in corrispondenza del gradino in ingresso per  $t = 0$  (vedi Appendice C.1):

$$Z(t) = \frac{b_0}{a_0} (X_0 - X_1) e^{-t/\tau} + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (3.5.19)$$

Il valore in uscita  $Z(t)$  si avvicina con andamento esponenziale al valore stazionario (Fig. 3.8).



**Fig. 3.9** – Risposta di uno strumento del 2° ordine ad un ingresso a gradino. In alto l'ingresso  $X(t)$ . Per semplicità si è posta la sensibilità statica  $(b_0/a_0) = 1$ . In basso le risposte  $Z(t)$  per  $\gamma = 0.4\omega_0$  (a sinistra),  $\gamma = \omega_0$  (al centro),  $\gamma = 2\omega_0$  (a destra). Se  $\gamma = \omega_0$  si parla di smorzamento critico.

Per gli **strumenti del 2° ordine** le soluzioni transitorie  $Z_{tr}(t)$  (eq. 3.5.13,14,15) contengono due costanti ( $Z_0$  e  $\phi$  oppure  $Z_1$  e  $Z_2$ ), che possono venire determinate studiando il comportamento sia di  $Z(t)$  che della sua derivata prima  $dZ/dt$  in corrispondenza del gradino in ingresso per  $t = 0$  (vedi Appendice C.1). Si hanno tre tipi di comportamento, a seconda che  $\gamma < \omega_0$ ,  $\gamma = \omega_0$  oppure  $\gamma > \omega_0$  (Fig. 3.9).

Per  $\gamma < \omega_0$  la risposta  $Z(t)$  oscilla intorno al valore asintotico  $Z_{st}(t)$ ; le oscillazioni si smorzano tanto più velocemente quanto più  $\gamma$  è vicino a  $\omega_0$ .

Per  $\gamma > \omega_0$  la risposta  $Z(t)$  si avvicina esponenzialmente al valore asintotico  $Z_{st}(t)$  senza mai oltrepassarlo; l'avvicinamento è tanto più veloce quanto più  $\gamma$  è vicino a  $\omega_0$ .

Per  $\gamma = \omega_0$  si ha la condizione ideale, detta di *smorzamento critico*: la risposta  $Z(t)$  si avvicina al valore asintotico  $Z_{st}(t)$  nel modo più veloce, senza però oltrepassarlo.

## 3.6 – Dispositivi di conteggio

Nei paragrafi precedenti di questo Capitolo ci siamo occupati degli strumenti per la misurazione diretta di

grandezze fisiche (lunghezze, intervalli di tempo, masse, differenze di potenziale elettrico, etc.) A questo tipo di strumenti si fa ricorso anche per grandezze non misurabili direttamente, come la temperatura, sfruttando relazioni analitiche che le legano a grandezze misurabili direttamente.

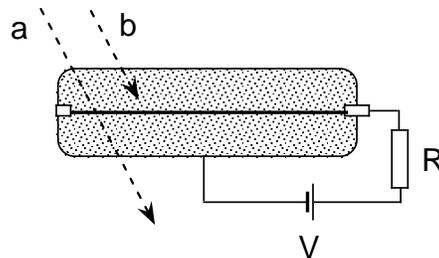
Gli strumenti di cui ci siamo finora occupati non esauriscono però le esigenze dei laboratori di Fisica. Come abbiamo già osservato al § 1.5, esistono fenomeni fisici che si manifestano come eventi distribuiti casualmente nello spazio e/o nel tempo (si riveda la Fig. 1.3, a destra). Esempi tipici sono i decadimenti di isotopi radioattivi o le collisioni tra particelle elementari.

Sempre al § 1.5 abbiamo anche osservato che, a dispetto dell'assoluta casualità di questi fenomeni (o forse, come vedremo più avanti, sarebbe meglio dire proprio in ragione dell'assoluta casualità), se si osserva un numero sufficientemente elevato di eventi, è comunque possibile estrarre delle proprietà medie regolari e significative. Queste proprietà medie rappresentano delle grandezze fisiche, di fondamentale importanza in molti campi della Fisica moderna. Un esempio tipico di tali grandezze è la costante di disintegrazione di un particolare tipo di isotopo radioattivo.

È naturale quindi che si siano sviluppati strumenti specificamente destinati alla misura delle grandezze fisiche legate agli eventi casuali. Tali strumenti si basano evidentemente sul conteggio degli eventi casuali, e presentano principi di funzionamento e specifiche di prestazione peculiari.

*Esempio:* Un tipico esempio è rappresentato dal *contatore Geiger*, utilizzato per il conteggio di particelle di alta energia (ad esempio raggi cosmici o prodotti di decadimenti radioattivi). Il dispositivo è costituito (Fig. 3.10) da un recipiente metallico riempito di gas e contenente un filamento di tungsteno. Recipiente e filamento vengono mantenuti a potenziale elettrico diverso. Una particella di alta energia può colpire e ionizzare una o più molecole del gas, provocando una reazione a valanga di ionizzazioni secondarie. Gli elettroni così prodotti vengono raccolti dal filamento (anodo) e danno luogo ad un segnale impulsivo, sotto forma di una differenza di potenziale ai capi del resistore  $R$ .

**Fig. 3.10** – Rappresentazione schematica di un contatore Geiger. Recipiente e filamento centrale sono mantenuti ad una differenza di potenziale  $V$ . Le tracce  $a$  e  $b$  rappresentano le traiettorie di due particelle di alta energia.



Uno strumento di conteggio (come il contatore Geiger dell'esempio precedente) trasforma ogni evento casuale in un segnale elettrico impulsivo. Il numero di segnali elettrici viene poi contato, mediante opportuni circuiti elettronici, per un prefissato intervallo di tempo.

È dal numero di conteggi per unità di tempo che si possono ricavare i valori delle grandezze fisiche rilevanti per il fenomeno che si sta studiando. Allo scopo, avendo a che fare con fenomeni di natura casuale, sono necessarie peculiari metodologie di tipo probabilistico, che verranno introdotte più avanti; in particolare, i fenomeni di conteggio verranno trattati in dettaglio al § 6.4, in connessione con lo studio della distribuzione di Poisson. Anche le grandezze fisiche estratte dal conteggio di fenomeni casuali sono affette da incertezza. L'incertezza di natura puramente statistica, dovuta all'aleatorietà dei fenomeni, verrà pure studiata al § 6.4.

Qui ci limitiamo ad osservare che anche i dispositivi di conteggio possono introdurre distorsioni, e quindi incertezze. Senza entrare in troppi dettagli tecnici, ricordiamo che non tutti gli eventi casuali vengono trasformati in segnali impulsivi in uscita dallo strumento.

- a) Alcuni eventi possono sfuggire del tutto alla rivelazione (nel caso del contatore Geiger, una particella può casualmente attraversare indisturbata il dispositivo, e quindi non venire rilevata).
- b) Due o più eventi si possono presentare contemporaneamente al dispositivo, ed essere conteggiati come un unico evento.

- c) Dopo la rilevazione di un evento casuale, il dispositivo richiede un intervallo di tempo (detto *tempo morto*) prima di essere in grado di rilevare un nuovo evento. Eventi separati da un intervallo di tempo inferiore al tempo morto non vengono distinti.

Si definisce come *efficienza di rivelazione* il rapporto tra il numero medio di eventi rilevati dal dispositivo di conteggio e il numero medio di eventi che si sono comunque verificati:

$$\text{efficienza di rivelazione} = \frac{\text{eventi contati}}{\text{eventi avvenuti}}.$$

# Capitolo 4

## Incertezza delle misure

Abbiamo visto fin dal Capitolo 1 che il risultato della misurazione di una grandezza fisica non è mai un ben definito valore numerico, bensì sempre un *intervallo di valori*. Ciò significa che la misura è sempre affetta da *incertezza* (o *indeterminazione*, in inglese *uncertainty*). In questo Capitolo studieremo approfonditamente le origini dell'incertezza di misura e le modalità per il suo trattamento nelle situazioni più frequentemente incontrate in laboratorio.

Inizieremo individuando varie possibili cause di incertezza nelle *misurazioni dirette* (§ 4.1). Introdurremo le diverse tecniche usate per valutare ed esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione di misura (§ 4.2), l'incertezza dovuta agli errori casuali (§ 4.3) e l'incertezza connessa con gli errori sistematici (§ 4.4). Mostreremo infine come è possibile confrontare in modo coerente le incertezze dovute a cause diverse, ed eventualmente sommarle (§ 4.5).

Ci occuperemo poi della valutazione dell'incertezza nelle *misurazioni indirette*, ossia della propagazione dell'incertezza dalle misure dirette alle misure indirette (§ 4.7).

Affronteremo infine, a livello introduttivo, il problema della *correlazione tra grandezze fisiche*, soffermandoci sul caso in cui due grandezze siano possibilmente legate da una relazione lineare; studieremo come calcolare i parametri della relazione lineare a partire dai dati sperimentali tenendo nel debito conto le loro incertezze di misura (§ 4.8).

Alcune tecniche di trattamento dei dati sperimentali verranno introdotte in questo Capitolo 4 in modo puramente fenomenologico. Una loro giustificazione più rigorosa verrà affrontata al Capitolo 7.

### 4.1 – Cause di incertezza

Al §3.4 abbiamo collegato l'incertezza  $\delta X$  di una misura alla risoluzione di lettura  $\Delta X$  dello strumento utilizzato. Abbiamo inoltre osservato che l'incertezza può essere influenzata anche da altre cause attribuibili allo strumento, di natura sia sistematica che casuale.

Le caratteristiche dello strumento di misura non sono però le uniche cause che influenzano il risultato di una misurazione. In generale, il risultato di una misurazione (e di conseguenza la sua incertezza  $\delta X$ ) può dipendere da diversi fattori:

- difficoltà di definizione della grandezza da misurare;
- caratteristiche operative dello strumento (già discusse nel Cap. 3);
- interazione tra lo strumento e l'oggetto della misurazione;
- interazione tra lo strumento e il soggetto sperimentatore;
- metodologia della misurazione;
- ambiente in cui viene fatta la misurazione.

*Esempio:* Se si misura lo spessore di una lamina con un micrometro centesimale (risoluzione  $\Delta X = 0.01$

mm) il risultato della misurazione può essere influenzato dalla presenza di corpi estranei, ad esempio polvere, tra gli steli del micrometro e l'oggetto (*interazione tra strumento ed oggetto*). Utilizzare un micrometro in acciaio tarato alla temperatura di 20°C per eseguire misurazioni a temperature molto più basse o molto più alte può causare errori di misura non trascurabili (*influenza dell'ambiente*). Lo spessore stesso della lamina può variare a seconda della zona in cui viene misurato (*difficoltà di definizione della grandezza fisica*).

*Esempio:* Si vuol misurare il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro centesimale (risoluzione  $\Delta t = 0.01$  s) comandato manualmente. Il risultato della misurazione dipenderà dalla prontezza di riflessi dello sperimentatore (*interazione tra strumento e sperimentatore*). Il risultato potrà inoltre essere diverso se viene misurata la durata di un singolo periodo oppure la durata di 10 periodi, dividendo poi il risultato per 10 (*metodologia della misurazione*).

Generalizzando i concetti già introdotti al §3.4, i diversi fattori che di volta in volta influenzano una misura e ne determinano l'incertezza possono essere classificati in tre gruppi:

- **risoluzione della misura,**
- **errori casuali,**
- **errori sistematici.**

Nei tre paragrafi seguenti impareremo separatamente a valutare l'incertezza dovuta a ciascuno di questi tre gruppi di fattori. Nel §4.5 introdurremo una procedura unificata per esprimere in modo consistente e confrontabile le incertezze dovute a cause diverse.

*Nota:* Come vedremo, i termini *errore casuale* ed *errore sistematico* hanno un ben definito significato nel contesto delle misurazioni fisiche. Essi non vanno confusi con i comuni *sbagli*, o *errori parassiti*, dovuti a distrazione o imperizia (ad es., lo scambio di una massa da 50 g per una da 100 g durante una pesata, l'errata lettura del visualizzatore di uno strumento, un errore di calcolo in una misurazione indiretta). Quantunque potenzialmente influenti, gli errori parassiti non sono suscettibili di una trattazione formale, e non verranno quindi presi in considerazione nel seguito. La loro presenza dev'essere comunque evitata preparando con cura gli esperimenti e lavorando con la massima attenzione.

## 4.2 – Risoluzione della misura

### A) Risoluzione dello strumento e risoluzione della misura

Nel § 3.4 ci siamo occupati a livello introduttivo dell'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura dello strumento,  $\Delta X_s$ , considerando alcuni esempi relativi all'uso di strumenti analogici e digitali. Volendo ora approfondire l'argomento, è bene introdurre il concetto più generale di *risoluzione della misura*,  $\Delta X_m$ .

In realtà, la risoluzione della misura coincide spesso con la risoluzione di lettura dello strumento.

*Esempio 1:* Si misura il diametro di un tubo con un calibro ventesimale. La risoluzione della misura coincide con la risoluzione di lettura dello strumento:  $\Delta X_m = \Delta X_s = 0.05$  mm.

*Esempio 2:* Si misura la durata del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale. Anche in questo caso la risoluzione della misura è uguale alla risoluzione di lettura dello strumento,  $\Delta X_m = \Delta X_s = 0.01$  s.

Talora però la risoluzione di misura può essere ridotta, rispetto alla risoluzione di lettura dello strumento, adottando opportune *metodologie di misurazione*. Tipicamente, anziché misurare direttamente la grandezza  $X$ , se ne misura un multiplo  $nX$ . La risoluzione di lettura  $\Delta X_s$  dello strumento va pertanto riferita al valore globale di misura  $nX$ ; la risoluzione della misura  $X$  è quindi  $n$  volte inferiore a quella dello strumento:  $\Delta X_m = \Delta X_s/n$ .

*Esempio 3:* Si vuole misurare il periodo di oscillazione  $\mathcal{T}$  di un pendolo con un cronometro centesimale (la risoluzione dello strumento è quindi  $\Delta t_s = 0.01$  s). Allo scopo, si misura la durata complessiva

$\Delta T$  di  $n = 10$  oscillazioni consecutive, per cui il periodo si ricava come  $\mathcal{T} = \Delta T/10$ . La risoluzione della misura del periodo  $\mathcal{T}$  è pertanto  $n=10$  volte inferiore della risoluzione dello strumento:  $\Delta t_m = \Delta t_s/n = \Delta t_s/10 = 0.001$  s.

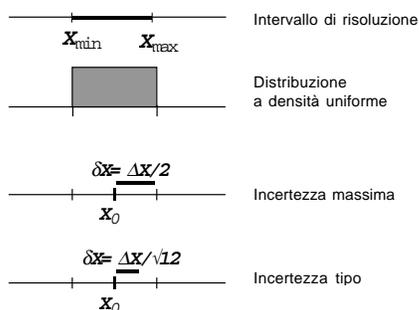
*Esempio 4:* Si vuole misurare lo spessore medio delle pagine di un libro usando una riga millimetrata ( $\Delta X_s = 1$  mm). Allo scopo si misura lo spessore complessivo di  $n=100$  pagine, ottenendo  $nX = 12$  mm, per cui  $X = 0.12$  mm. La risoluzione di misura è  $\Delta X_m = \Delta X_s/100 = 0.01$  mm.

## B) Incertezza dovuta alla risoluzione

Il risultato della misurazione di una grandezza fisica è un intervallo di valori di estensione corrispondente alla risoluzione di misura  $\Delta X$ , compreso tra due valori  $X_{\min}$  e  $X_{\max}$ :

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max}. \quad (4.2.1)$$

Tutti i valori all'interno dell'intervallo sono equivalenti, in quanto la misurazione non è in grado di distinguerli. Possiamo anche dire che tutti i valori di  $X$  compresi nell'intervallo sono *equiprobabili*, ovvero che i valori sono distribuiti all'interno dell'intervallo con *densità di probabilità uniforme*. La rappresentazione grafica della densità uniforme è un rettangolo di larghezza  $\Delta X$  ed area unitaria (Fig. 4.1). (I concetti di probabilità e distribuzione di probabilità, introdotti qui in modo intuitivo, verranno affrontati in modo più rigoroso e sistematico nei Capitoli 5 e 6).



**Fig. 4.1** – Rappresentazione grafica del collegamento tra intervallo di risoluzione e distribuzione a densità uniforme, nonché della differenza tra *incertezza massima* e *incertezza tipo*.

Come abbiamo già visto al § 3.4, il risultato della misurazione viene espresso nella forma

$$X = X_0 \pm \delta X, \quad (4.2.2)$$

dove (si riveda sempre il § 3.4):

- $X_0$  è il valore centrale dell'intervallo di risoluzione;
- $\delta X$  rappresenta l'*incertezza* della misura.

Una scelta ragionevole per esprimere l'incertezza  $\delta X$  della misura è rappresentata dalla la semi-larghezza dell'intervallo di risoluzione (Fig. 4.1):

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / 2. \quad (4.2.3)$$

Poiché l'incertezza  $\delta X$  definita dall'eq. (4.2.3) abbraccia tutti i possibili valori  $X$  compresi nell'intervallo di risoluzione, la chiameremo **incertezza massima** (inglese *maximum uncertainty*).

Al §4.5 riprenderemo in considerazione il modo di esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione. Mostriamo allora che, per garantire un confronto consistente con l'incertezza dovuta agli errori casuali, in molti casi è preferibile una scelta convenzionale, diversa dall'eq. (4.2.3), e precisamente (Fig. 4.1)

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / \sqrt{12}. \quad (4.2.4)$$

Poiché la definizione di incertezza rappresentata dall'eq. (4.2.4) fa riferimento ad esigenze di consistenza e confrontabilità con altre forme di incertezza, parleremo in questo caso di **incertezza tipo** (in inglese *standard uncertainty*).

Incertezza massima ed incertezza tipo hanno significati diversi, ed i loro valori numerici sono diversi. È quindi necessario specificare sempre esplicitamente se il valore  $\delta X$  corrisponde a incertezza massima o incertezza tipo.

*Esempio 1:* Si misura l'altezza di un tavolo con un metro da falegname. La risoluzione è  $\Delta X = 1$  mm. Ponendo l'estremità del metro sul pavimento, il piano del tavolo risulta situato tra le tacche corrispondenti a 827 e 828 mm. Il risultato della misurazione sarà espresso come  $X = (827.5 \pm 0.5)$  mm se si usa l'eq. (4.2.3), come  $X = (827.5 \pm 0.3)$  mm se si usa l'eq. (4.2.4).

*Esempio 2:* Si misura la durata del periodo di oscillazione  $\mathcal{T}$  di un pendolo con un cronometro digitale centesimale. La risoluzione è  $\Delta t = 0.01$  s. Sul visualizzatore compare il valore 1.75 s. Il risultato della misurazione sarà espresso come  $\mathcal{T} = (1.75 \pm 0.005)$  s se si usa l'eq. (4.2.3), come  $\mathcal{T} = (1.75 \pm 0.003)$  s se si usa l'eq. (4.2.4).

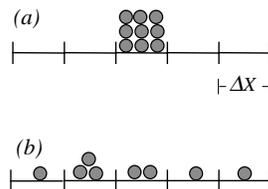
Come si può facilmente verificare, in entrambi gli esempi l'incertezza calcolata secondo l'eq. (4.2.4) è stata espressa in modo arrotondato. *Non ha infatti significato esprimere l'incertezza di misura con più di una o due cifre significative.* Una trattazione dettagliata sull'uso delle cifre significative e degli arrotondamenti, in particolare nell'espressione delle misure, è fatta in Appendice A.1.

## 4.3 – Errori casuali

### A) Misurazioni ripetute

Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una stessa grandezza fisica costante nel tempo. Si possono presentare due casi:

- (a) misure successive cadono nello stesso intervallo di risoluzione;
- (b) misure successive cadono in modo casuale e imprevedibile in intervalli di risoluzione differenti.



*Esempio 1:* Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. La risoluzione è  $\Delta X = 1$  mm. Ripetendo più volte la misurazione si ottengono valori compresi sempre entro lo stesso intervallo di risoluzione (caso a).

*Esempio 2:* Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale azionato manualmente. La risoluzione è  $\Delta t = 0.01$  s. Ripetendo la misurazione si ottengono valori di volta in volta diversi, che cadono in diversi intervalli di risoluzione (caso b).

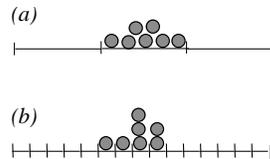
Nel caso (a) l'incertezza  $\delta X$  del valore di misura è legata direttamente alla risoluzione  $\Delta X$ ; come abbiamo visto al §4.2 si porrà, a seconda dei casi,  $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/2$  (incertezza massima), oppure  $\delta X = \Delta X_{\text{ris}}/\sqrt{12}$  (incertezza tipo).

Nel caso (b) le discrepanze tra misurazioni diverse della stessa grandezza sono da attribuire all'azione simultanea e casuale di molti piccoli fattori, ciascuno dei quali influisce in modo diverso su ogni singola misura. Ad esempio:

- errori di lettura: carenza di potere separatore dell'occhio, errori di parallasse, errori di interpolazione, errori di sincronizzazione, etc.;
- rumore di fondo, cioè l'effetto di variazioni molto piccole e casuali delle grandezze d'influenza (temperatura, pressione, umidità, vibrazioni, etc.);
- errori d'inversione (differenza tra misure eseguite mentre il valore della grandezza sta crescendo oppure sta diminuendo).

Si dice in questo caso che le misure sono affette da **errori casuali** (ingl. *random errors*), che provocano un'incertezza superiore a quella dovuta alla risoluzione.

In realtà, si può assumere che gli errori casuali siano sempre presenti in una misurazione. Il loro effetto però non appare se è globalmente inferiore alla risoluzione della misura (caso *a*). Se tuttavia la risoluzione viene convenientemente ridotta, utilizzando uno strumento con risoluzione inferiore o modificando la metodologia della misurazione, l'effetto degli errori casuali diviene comunque evidente



(caso *b*). Nel resto di questo paragrafo 4.3 ci occuperemo solo di casi in cui l'effetto degli errori casuali prevale sulla risoluzione della misura, ed affronteremo il seguente problema: come si può valutare quantitativamente l'incertezza dovuta agli errori casuali, in modo da poter ancora esprimere il risultato di una misurazione nella forma  $X_0 \pm \delta X$  ?

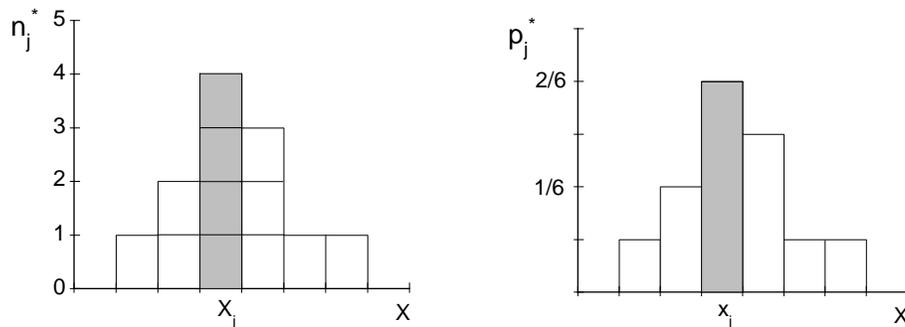
A questo scopo, dovremo prima imparare alcune tecniche per la visualizzazione ed il trattamento dei dati sperimentali (istogrammi e loro parametri statistici, §§ B e C) e quindi introdurre il concetto fondamentale di distribuzione limite (§§ D ed E).

## B) Iistogrammi

Supponiamo di avere misurato  $N$  volte la stessa grandezza fisica  $X$ . Il risultato di ogni misurazione sarà individuato da un indice  $i$  ( $i = 1 \dots N$ ) e da un valore  $x_i$  che rappresenta il centro dell'intervallo di risoluzione corrispondente alla misura  $i$ -ma.

Può succedere che misure diverse (valori diversi dell'indice  $i$ ) cadano nello stesso intervallo di risoluzione. Per rappresentare convenientemente questa situazione si disegna in genere un **istogramma** (vedi Fig. 4.2, ulteriori informazioni sugli istogrammi si possono trovare nell'Appendice A.4). Ogni colonna dell'istogramma ha una base di larghezza  $\Delta X$  pari alla risoluzione delle misure. Individueremo le colonne dell'istogramma con un indice  $j$ . L'altezza della colonna  $j$ -ma sarà proporzionale al numero  $n_j^*$  di valori di misura caduti nell'intervallo  $j$ -mo (Fig. 4.2, a sinistra). Se indichiamo con  $\mathcal{N}$  il numero di colonne dell'istogramma, è evidente che

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j^* = N. \quad (4.3.1)$$



**Fig. 4.2** – A sinistra: un istogramma relativo a  $N=12$  misure; l'altezza della colonna  $j$ -ma rappresenta il numero  $n_j^*$  di misure con valore  $x_j$ . A destra: il corrispondente istogramma normalizzato in altezza; l'altezza della colonna  $j$ -ma rappresenta la frequenza campionaria  $p_j^* = n_j^*/N$

L'altezza delle colonne di un istogramma dipende dal numero totale  $N$  di misure. Per confrontare istogrammi relativi a numeri  $N$  di misure diversi è conveniente normalizzarli in altezza. In un **istogramma normalizzato in altezza** (Fig. 4.2, a destra) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *frequenza campionaria*

$$p_j^* = n_j^*/N. \quad (4.3.2)$$

È facile verificare che, qualunque sia il numero  $N$  di misure,

$$\sum_{j=1}^N p_j^* = 1. \quad (4.3.3)$$

Talvolta può essere necessario confrontare due insiemi di misurazioni della stessa grandezza eseguiti con risoluzioni diverse. I due istogrammi hanno colonne con basi  $\Delta X$  diverse. È allora necessario ricorrere alla normalizzazione in area. In un **istogramma normalizzato in area** (Fig. 4.3) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *densità campionaria*

$$f_j^* = \frac{n_j^*}{N \Delta X_j}. \quad (4.3.4)$$

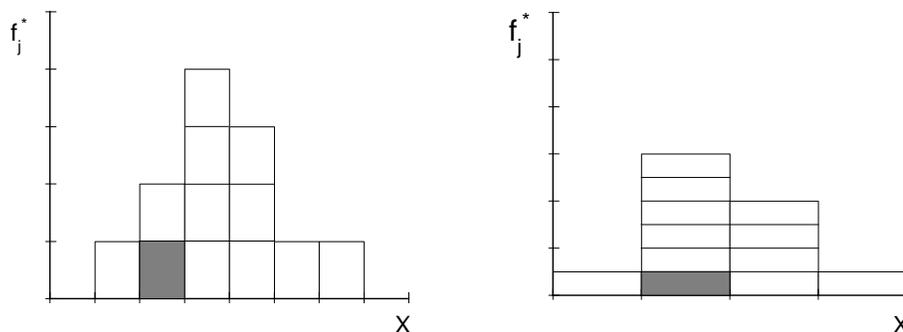
È facile verificare che, qualunque sia il numero  $N$  di misure, l'area totale delle colonne è sempre unitaria:

$$\sum_{j=1}^N f_j^* \Delta X_j = 1. \quad (4.3.5)$$

*Nota 1:* Il significato dell'aggettivo *campionario* sarà chiarito più avanti in questo stesso paragrafo.

Notiamo comunque fin d'ora che in questo testo l'asterisco (\*) indica sempre, per convenzione, quantità campinarie.

*Nota 2:* La frequenza campionaria  $p^*$  è sempre una quantità adimensionale. La densità campionaria  $f^*$ , definita dall' Eq. (4.3.4), ha invece sempre le dimensioni dell'inverso della grandezza  $X$ .



**Fig. 4.3** – Confronto tra due istogrammi normalizzati in area. I due istogrammi si riferiscono allo stesso insieme di misure: nell'istogramma di destra le misure sono state raggruppate in colonne di larghezza doppia rispetto alle colonne dell'istogramma di sinistra.

### C) Parametri statistici di un istogramma

Un istogramma contiene tutta l'informazione ottenibile da un insieme di  $N$  misurazioni di una grandezza fisica. In molti casi, ad esempio per esprimere il risultato di una misurazione affetta da errori casuali, è sufficiente sintetizzare le principali caratteristiche di un istogramma per mezzo di pochi parametri numerici. Ci limiteremo qui a considerare due soli parametri: il primo individua la **posizione media** dell'istogramma sull'asse dei valori  $x$  della grandezza fisica, il secondo descrive la **dispersione** dei valori misurati.

### Parametro di posizione

La **posizione** dell'istogramma (Fig. 4.4, a sinistra) è individuata dal **valor medio campionario**  $m^*$  (in inglese *sample mean*), calcolato come la media aritmetica degli  $N$  valori  $x_i$  misurati:

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.3.6)$$

Alternativamente possiamo eseguire la somma, anziché su tutti gli  $N$  valori misurati, sulle  $\mathcal{N}$  colonne dell'istogramma, caratterizzate dalle frequenze campionarie  $p_j^*$ :

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j n_j^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j \frac{n_j^*}{N} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j p_j^*. \quad (4.3.7)$$

*Nota:* Esistono vari modi alternativi per indicare simbolicamente il valor medio di un insieme di valori  $x_i$ . Nel seguito considereremo equivalenti le seguenti scritte:

$$m^* \equiv m_x^* \equiv \langle x \rangle \equiv \mathbf{m}^*[x]$$

e di volta in volta utilizzeremo quella che garantisce la migliore chiarezza di lettura delle formule.

### Parametri di dispersione

Per misurare la **dispersione** dell'istogramma è utile definire, per ogni valore misurato  $x_i$ , il suo *scarto*  $s_i$  (in inglese *deviation*) rispetto al valor medio campionario:

$$s_i = x_i - m^*. \quad (4.3.8)$$

Il valor medio degli scarti  $s_i$  non serve per misurare la dispersione di un istogramma, in quanto, come è facile verificare, il suo valore è identicamente nullo:

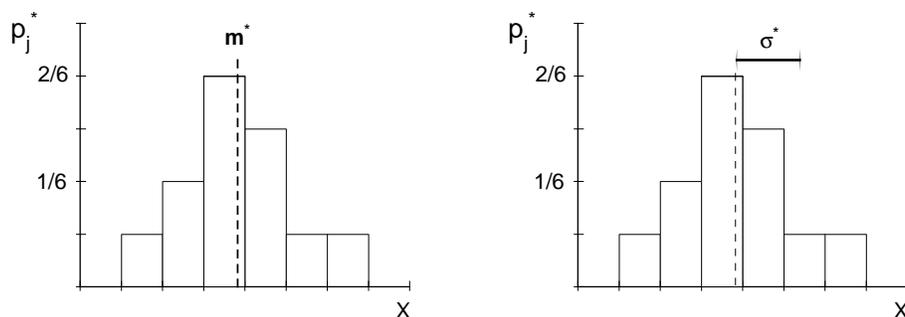
$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} N m^* = 0. \quad (4.3.9)$$

Una misura convenzionale della dispersione di un istogramma è data dalla **varianza campionaria**  $D^*$  (ingl. *sample variance*), definita come il valor medio dei quadrati degli scarti  $s_i^2$ . Come il valor medio campionario, anche la varianza campionaria può essere calcolata sommando su tutti gli  $N$  valori misurati oppure sulle  $\mathcal{N}$  colonne dell'istogramma:

$$D^* = \langle (x_i - m^*)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 p_j^*. \quad (4.3.10)$$

La varianza campionaria  $D^*$  ha le dimensioni del quadrato della grandezza misurata  $X$ . Per visualizzare direttamente la dispersione di un istogramma è utile una quantità che abbia le stesse dimensioni della grandezza  $X$ . Si introduce pertanto lo **scarto quadratico medio campionario** o anche **scarto tipo campionario** (in inglese *sample standard deviation*)  $\sigma^*$ , definito come la radice quadrata della varianza (Fig. 4.4, a destra):

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 p_j^*}. \quad (4.3.11)$$



**Fig. 4.4** – Valor medio (a sinistra) e scarto quadratico medio (a destra) di un istogramma.

*Esempio:* Vengono eseguite  $N = 20$  misurazioni del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale, cioè con risoluzione di lettura  $\Delta T = 0.01$  s. I risultati sono riassunti nella seguente tabella.

| $T_j$ [s] | $n_j^*$ | $p_j^*$ | $f_j^*$ [ $s^{-1}$ ] |
|-----------|---------|---------|----------------------|
| 1.22      | 1       | 0.05    | 5                    |
| 1.23      | 2       | 0.1     | 10                   |
| 1.24      | 4       | 0.2     | 20                   |
| 1.25      | 6       | 0.3     | 30                   |
| 1.26      | 3       | 0.15    | 15                   |
| 1.27      | 3       | 0.15    | 15                   |
| 1.28      | 1       | 0.05    | 5                    |
| $\Sigma$  | 20      | 1.00    | 100                  |

Il valor medio campionario, la varianza campionaria e lo scarto quadratico medio campionario sono rispettivamente:  $m^* = 1.25$  s,  $D^* = 2.25 \times 10^{-4}$  s<sup>2</sup>,  $\sigma^* = 1.5 \times 10^{-2}$  s.

È facile vedere che la varianza  $D^*$  è la differenza tra il valor medio dei valori  $x_i^2$  ed il quadrato del valor medio dei valori  $x_i$ . Infatti

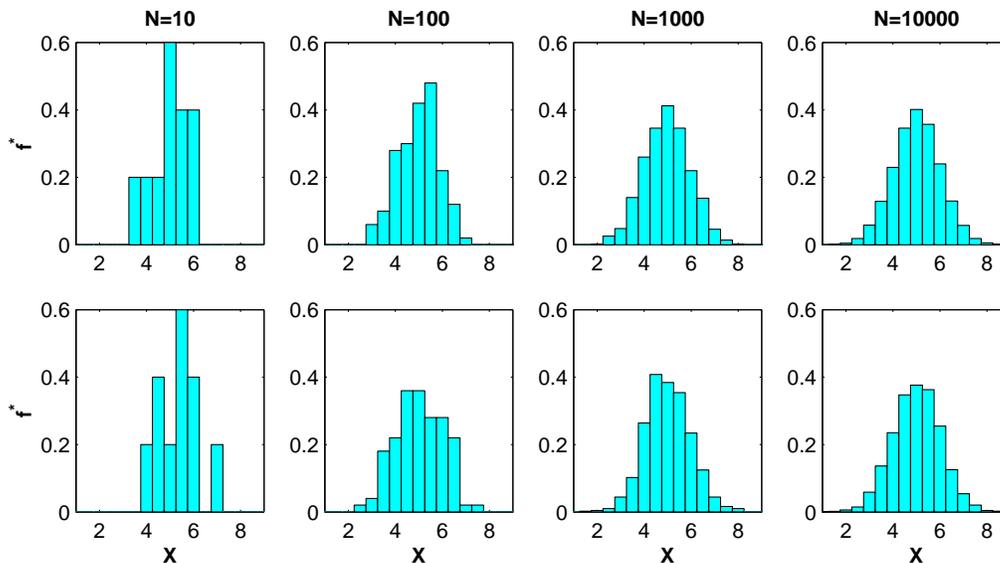
$$\begin{aligned}
 D^* &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^2 - 2x_i \langle x \rangle + \langle x \rangle^2] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2
 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

L'uso dell'espressione (4.3.12) in alternativa all'espressione (4.3.10) può talvolta rendere più veloci i calcoli della varianza  $D^*$  e quindi dello scarto quadratico medio  $\sigma^*$ .

## D) Distribuzione limite

Come abbiamo visto, il risultato di  $N$  misurazioni affette da errori casuali può essere rappresentato da un istogramma oppure, in modo meno completo ma più sintetico, dai due parametri  $m^*$  e  $\sigma^*$  che ne rappresentano rispettivamente la posizione media e la dispersione rispetto all'asse dei valori  $x$ .

Supponiamo ora di eseguire un nuovo insieme di  $N$  misurazioni della stessa grandezza  $X$ ; ci aspettiamo di ottenere un istogramma diverso dal precedente, con valori  $m^*$  e  $\sigma^*$  pure diversi. Eseguendo altri insiemi di  $N$  misurazioni otterremo istogrammi ancora diversi e valori diversi di  $m^*$  e  $\sigma^*$ . Possiamo dire che l'istogramma relativo a  $N$  misurazioni ed i suoi parametri statistici  $m^*$  e  $\sigma^*$  hanno carattere aleatorio, cioè casuale.



**Fig. 4.5** – Otto istogrammi, normalizzati in area, relativi a diverse misurazioni di una stessa grandezza fisica. I due istogrammi a sinistra, relativi entrambi a  $N=10$  misure indipendenti, sono notevolmente diversi. Al crescere del numero  $N$  di misure per istogramma (andando cioè da sinistra verso destra) gli istogrammi perdono progressivamente le caratteristiche aleatorie e tendono ad assumere una forma ben definita.

Si verifica però sperimentalmente che, al crescere del numero  $N$  di misure per ogni istogramma, gli istogrammi relativi a insiemi diversi di misurazioni tendono ad assumere forma simile (Fig. 4.5); corrispondentemente, le differenze tra i valori di  $m^*$  e di  $\sigma^*$  relativi a istogrammi diversi tendono a ridursi. Queste osservazioni hanno portato ad introdurre il concetto di **istogramma limite**, a cui tendono ad assomigliare i singoli istogrammi sperimentali al crescere del numero di misure  $N$ . In termini asintotici, si dice che un istogramma sperimentale tende all'istogramma limite per  $N \rightarrow \infty$ .

L'istogramma limite è evidentemente un'astrazione. La sua esistenza non può essere verificata (il numero  $N$  di misurazioni è comunque necessariamente finito). Postulare l'esistenza di un istogramma limite equivale, in ultima analisi, a postulare l'esistenza di una regolarità del mondo naturale che consente di estrarre leggi di carattere generale a partire da un numero limitato di osservazioni.

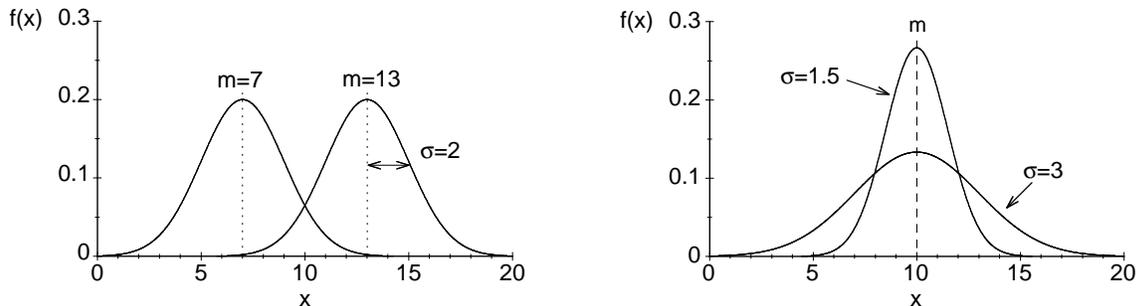
Spesso (ma non sempre) l'istogramma di misure affette da errori casuali tende, al crescere di  $N$ , ad assumere una forma simmetrica “a campana” (Fig. 4.5, a destra). Anche l'istogramma limite avrà allora una forma a campana.

È utile cercare di descrivere questo andamento a campana dell'istogramma limite per mezzo di un modello matematico. Un modello matematico risulta però più agevole da trattare se espresso in termini di funzioni continue. Conviene pertanto fare un'ulteriore passaggio al limite, restringendo indefinitamente la larghezza delle colonne dell'istogramma:  $\Delta x \rightarrow 0$ . In questo modo l'istogramma limite viene sostituito da una *distribuzione limite*, esprimibile sotto forma di una funzione di variabile continua  $f(X)$ .

Osservazioni sperimentali e considerazioni teoriche hanno portato a concludere che il modello di funzione più adatto a descrivere l'andamento simmetrico a campana della distribuzione limite è dato dalla *distribuzione normale* o *distribuzione di Gauss*:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.3.13)$$

I due parametri  $m$  e  $\sigma$  dell'eq. (4.3.13) hanno le stesse dimensioni dei valori della variabile  $x$ . La funzione  $f(x)$  che compare nell'eq. (4.3.13) è dimensionalmente omogenea alla densità campionaria  $f_j^*$  definita dall'eq. (4.3.4). La distribuzione gaussiana può pertanto essere considerata come il limite di un



**Fig. 4.6** – Distribuzione normale di Gauss, eq. (4.3.13). A sinistra due distribuzioni con uguale scarto quadratico medio  $\sigma$  e diversi valori medi  $m$ . A destra due distribuzioni con uguale valor medio  $m$  e diversi scarti quadratici medi  $\sigma$ .

istogramma normalizzato in area (Fig. 4.5) non solo per  $N \rightarrow \infty$  (numero di misurazioni tendente ad infinito) ma anche per  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$  (numero di colonne tendente ad infinito, cioè  $\Delta x_j \rightarrow 0$ ).

È facile verificare che il parametro  $m$  individua la posizione della distribuzione sull'asse  $x$ , mentre  $\sigma$  dipende dalla larghezza della distribuzione (Fig. 4.6).

I parametri  $m$  e  $\sigma$  rappresentano, rispettivamente, i valori asintotici per  $N \rightarrow \infty$  del valor medio campionario  $m^*$  e dello scarto tipo campionario  $\sigma^*$ . Per convincersene, si può partire dalle espressioni della media e della varianza campionarie,  $m^*$  e  $D^*$ , Eq. (4.3.7) e (4.3.10), sostituendo la frequenza campionaria con la densità campionaria:  $p^* = f^* \Delta x$ . Il passaggio al limite per  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$  si fa sostituendo le sommatorie con gli integrali:

$$m^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j f_j^* \Delta x_j \quad \rightarrow \quad m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (4.3.14)$$

$$D^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 f_j^* \Delta x_j \quad \rightarrow \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad (4.3.15)$$

Dalle varianze è immediato passare agli scarti tipo:  $D^* = (\sigma^*)^2$  e  $D = \sigma^2$ . Chiameremo pertanto  $m$  “valor medio” della distribuzione limite, o semplicemente “media limite”, e  $\sigma$  “scarto quadratico medio” o “scarto tipo” (ingl. *standard deviation*) della distribuzione limite.

Il passaggio al limite dalla sommatoria (eq. 4.3.5) all'integrale consente di vedere che anche la distribuzione limite, come l'istogramma normalizzato in area, sottende un'area unitaria:

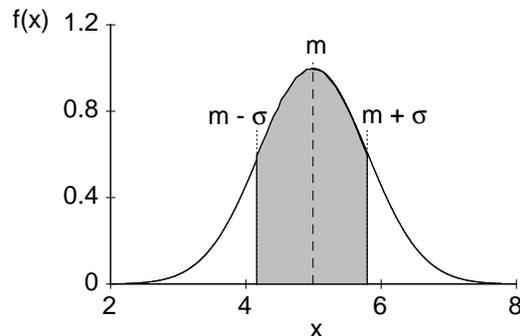
$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j^* \Delta X_j = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Le proprietà della distribuzione normale di Gauss verranno analizzate più dettagliatamente nel Cap. 6. Lì dimostreremo che

|                     |                               |          |        |                                    |
|---------------------|-------------------------------|----------|--------|------------------------------------|
| l'area compresa tra | $m - \sigma$ e $m + \sigma$   | è sempre | 0.683  | (68 % dell'area totale, Fig. 4.7), |
| l'area compresa tra | $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$ | è sempre | 0.954, |                                    |
| l'area compresa tra | $m - 3\sigma$ e $m + 3\sigma$ | è sempre | 0.997. |                                    |

La distribuzione limite, essendo definita come limite di un istogramma sperimentale per  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , è evidentemente un'astrazione, come l'istogramma limite. La distribuzione limite non è pertanto direttamente conoscibile. Potrà solo essere approssimata, con precisione tanto maggiore quanto più grande è il numero  $N$  di misurazioni effettuate. Inoltre, è evidente che il modello gaussiano non può comunque interpretare i dati sperimentali in modo esatto, almeno per quanto riguarda le code della distribuzione: la funzione rappresentata dall'eq. (4.3.13) infatti non si annulla per nessun valore della variabile  $x$ .

**Fig. 4.7** – Esempio di distribuzione normale di Gauss con valor medio  $m=5$  e scarto quadratico medio  $\sigma=0.8$ . L'area sottesa dalla curva tra  $x = m - \sigma$  e  $x = m + \sigma$  rappresenta *sempre* il 68 % dell'area totale, per qualsiasi valore di  $m$  e  $\sigma$ .



Nonostante queste limitazioni, ipotizzare l'esistenza della distribuzione limite rappresenta, come vedremo, uno strumento estremamente utile per stabilire criteri di valutazione quantitativa dei risultati di un insieme finito di misurazioni.

Ogni insieme di  $N$  misure può venire considerato come un **campione** (ingl. *sample*), necessariamente finito, della distribuzione limite, caratterizzato da un valor medio campionario  $m^*$  e da una varianza campionaria  $D^*$ .

Non è ovviamente possibile *determinare con esattezza* i parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Comunque grande sia il numero  $N$  di misure, infatti, i parametri statistici  $m^*$  e  $D^*$  hanno sempre un carattere aleatorio. È però plausibile cercare di **stimare** i parametri  $m$  e  $D = \sigma^2$  della distribuzione limite a partire dai parametri statistici  $m^*$  e  $D^*$  di un campionamento costituito da  $N$  misure. Affronteremo in modo approfondito al Cap. 7 il problema della stima dei parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Qui ci limitiamo ad anticipare i risultati più importanti.

Supponiamo di avere effettuato  $N$  misurazioni di una grandezza fisica e di avere ottenuto  $N$  valori  $x_i$ .

- a) La migliore *stima* del valor medio  $m$  della distribuzione limite, che indicheremo con  $\tilde{m}$ , è il valor medio campionario  $m^*$ :

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.3.16)$$

- b) La migliore *stima* della varianza  $D = \sigma^2$  della distribuzione limite, che indicheremo con  $\tilde{D}$ , *non* è la varianza campionaria  $D^*$ , bensì:

$$\tilde{D} = \frac{N}{N-1} D^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2. \quad (4.3.17)$$

Evidentemente  $D^* < \tilde{D}$ ; la differenza è però tanto più piccola quanto più grande è  $N$ .

La varianza campionaria  $D^*$  sottostima la varianza limite  $D$  perché è basata sugli scarti rispetto alla media campionaria  $m^*$  anziché sugli scarti rispetto alla media limite  $m$ .

A partire dall'eq. (4.3.17) si può anche considerare la migliore stima  $\tilde{\sigma}$  dello scarto quadratico medio limite:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.3.18)$$

Il valore  $\tilde{\sigma}$  dell'Eq. (4.3.18) è detto **scarto tipo stimato** o *scarto tipo sperimentale* (ingl. *experimental standard deviation*).

*Esempio 1:* Per avere un'idea intuitiva della differenza tra  $\sigma^*$  e  $\tilde{\sigma}$ , costruiamo tre insiemi costituiti, rispettivamente, da  $N = 6, 4$  e  $2$  valori  $x_i$ , con uguali valor medio  $m^*$  e scarto tipo  $\sigma^*$ . È facile verificare che lo scarto tipo stimato  $\tilde{\sigma}$ , calcolato mediante l'eq. (4.3.18), cresce al diminuire di  $N$ , allontanandosi dal valore  $\sigma^*=1$ .

| $N$ | $x_i$       | $m^*$ | $\sigma^*$ | $\tilde{\sigma}$ |
|-----|-------------|-------|------------|------------------|
| 6   | 4,4,4,6,6,6 | 5     | 1          | 1.095            |
| 4   | 4,4,6,6     | 5     | 1          | 1.155            |
| 2   | 4,6         | 5     | 1          | 1.410            |

*Esempio 2:* Se si esegue una sola misurazione, cioè se  $N=1$ , si ottiene un solo valore  $x_1$ . In tal caso  $m^* = x_1$  e  $\sigma^* = 0$ : lo scarto tipo campionario è nullo. L'eq. (4.3.18) mostra che per  $N=1$  lo scarto tipo stimato  $\tilde{\sigma}$  è indeterminato. Ciò corrisponde al fatto che con una sola misura non è possibile alcuna stima della dispersione della distribuzione limite.

## E) Distribuzione dei valori medi

La distribuzione limite introdotta nella precedente Sezione 4.3.D descrive la dispersione dei valori delle singole misure di una grandezza  $X$  a seguito delle fluttuazioni dovute agli errori casuali.

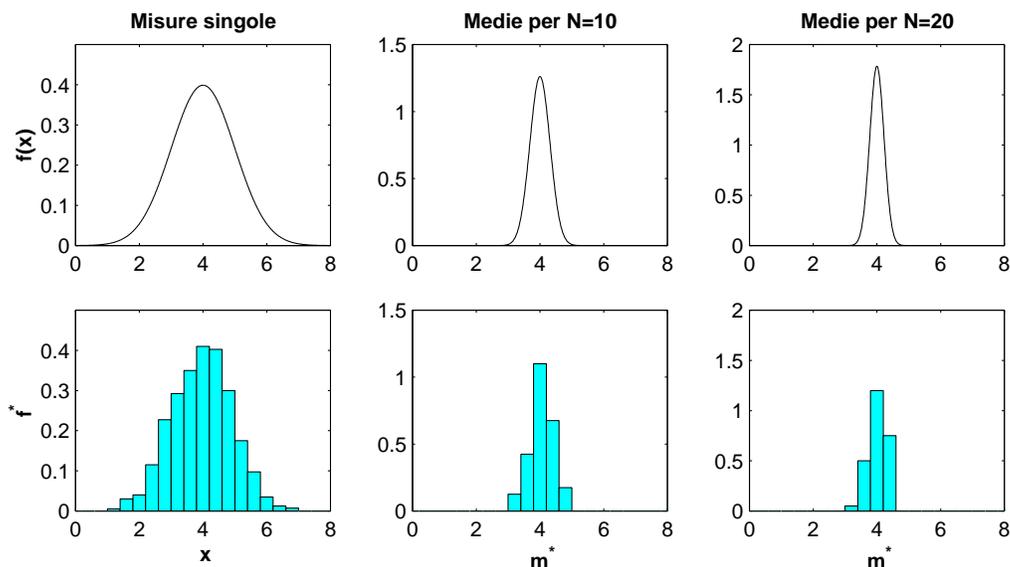
Consideriamo ora  $M$  distinti campionamenti, ciascuno costituito da  $N$  misurazioni. I valori medi campionari  $m^*$  per ciascuno degli  $M$  campionamenti

$$m_1^*, m_2^*, m_3^*, \dots, m_M^*$$

possono essere raggruppati in un istogramma (istogramma dei valori medi campionari).

Al crescere del numero  $M$  di campionamenti l'istogramma dei valori medi campionari tende ad assumere una forma sempre più regolare. Per  $M \rightarrow \infty$  potremo parlare di un istogramma limite dei valori medi campionari e quindi, passando al continuo, di una *distribuzione limite  $g(m^*)$  dei valori medi campionari*.

È ragionevole aspettarsi che la distribuzione limite  $g(m^*)$  delle medie campionarie sia più stretta della distribuzione limite  $f(x)$  dei singoli valori di misura. Di più, ci aspettiamo che la distribuzione delle medie campionarie sia tanto più stretta quanto più grande è il numero  $N$  di misurazioni su cui si basa il calcolo di ogni singola media campionaria (Fig. 4.8).



**Fig. 4.8** – In alto a sinistra: distribuzione limite gaussiana di valori di misura singola, con  $m=4$  e  $\sigma=1$  (in unità di misura arbitrarie). Sempre in alto, al centro e a destra sono mostrate le corrispondenti distribuzioni limite delle medie campionarie  $m^*$ , basate rispettivamente su  $N=10$  e  $N=20$  misure. In basso a sinistra: un campionamento sperimentale costituito da  $N=1000$  misure singole  $x$ . Sempre in basso, al centro e a destra: campionamenti rispettivamente di  $M=100$  valori medi  $m^*$  basati su  $N=10$  misure e  $M=50$  valori medi  $m^*$  basati su  $N=20$  misure.

Nel Capitolo 6 mostreremo che

- a) qualunque sia la forma della distribuzione limite  $f(x)$  dei valori di misura singola (quindi anche non gaussiana), la distribuzione  $g(m^*)$  delle medie campionarie può comunque essere assunta gaussiana se il numero  $N$  di misure che concorrono a formare la singola media  $m^*$  è sufficientemente grande.

Nel Capitolo 7 dimostreremo inoltre che:

- b) il *valor medio*  $\mathbf{m}[m^*]$  della distribuzione limite delle medie campionarie coincide con il valor medio  $m$  della distribuzione limite delle singole misure:

$$\mathbf{m}[m^*] = m; \quad (4.3.19)$$

- c) la *varianza*  $\mathbf{D}[m^*]$  e lo *scarto quadratico medio*  $\sigma[m^*]$  della distribuzione limite delle medie campionarie sono legati rispettivamente alla varianza  $D$  e allo scarto quadratico medio  $\sigma$  della distribuzione limite delle singole misure dalle relazioni:

$$\mathbf{D}[m^*] = \frac{1}{N} D; \quad \sigma[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma, \quad (4.3.20)$$

dove  $N$  è il numero di misurazioni per ogni campionamento.

## F) Incertezza dovuta agli errori casuali

Siamo ora finalmente in grado di risolvere il problema che ci eravamo posti all'inizio del § 4.3: stabilire le modalità per esprimere nella forma  $X_0 \pm \delta X$  il risultato di  $N$  misurazioni ripetute affette da errori casuali.

Se la distribuzione limite  $f(x)$  delle singole misure fosse perfettamente nota, potremmo assumere come *valore vero* della grandezza fisica misurata il valor medio della distribuzione limite:  $X_0 = m$ . L'incertezza dovuta agli errori casuali sarebbe perciò nulla,  $\delta X_{\text{cas}} = 0$ .

Nella realtà, la distribuzione limite non è mai nota. Se ne può al più postulare l'esistenza, e considerare le  $N$  misurazioni effettuate come un suo campionamento limitato.

Come abbiamo visto sopra, la media campionaria  $m^*$  delle  $N$  misure rappresenta comunque la migliore stima del valor medio  $m$  della distribuzione limite. È perciò ragionevole assumere come **valore centrale**  $X_0$  della misura la media campionaria  $m^*$ :

$$X_0 = m^*. \quad (4.3.21)$$

D'altra parte, la media campionaria  $m^*$  è una variabile aleatoria, il cui valore cambierebbe in modo casuale se ripetessimo il campionamento. L'**incertezza**  $\delta X_{\text{cas}}$  della misura dipende dall'aleatorietà della media campionaria  $m^*$ . È naturale pertanto collegare l'incertezza della misura alla larghezza della distribuzione limite delle medie campionarie.

Nel caso dell'incertezza dovuta alla risoluzione, considerato al § 4.2, abbiamo avuto a che fare con una distribuzione a rettangolo, definita da due valori minimo e massimo della grandezza  $X$ . È stato quindi possibile introdurre un'incertezza massima  $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/2$ .

Al contrario, la distribuzione limite delle medie campionarie è con buona approssimazione gaussiana, e non è limitata tra due valori massimo e minimo della variabile  $m^*$ . Non è pertanto possibile definire un'incertezza massima. La larghezza della distribuzione delle medie campionarie può essere espressa in termini di scarto tipo  $\sigma[m^*]$ , per cui, nel caso degli errori casuali, si può definire solo un'incertezza tipo (*standard uncertainty*):

$$\delta X_{\text{cas}} \propto \sigma[m^*]. \quad (4.3.22)$$

Per convenzione si assume l'incertezza tipo  $\delta X_{\text{cas}}$  dovuta agli errori casuali proprio uguale allo scarto tipo  $\sigma[m^*]$ ,

$$\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*]. \quad (4.3.23)$$

## G) Valutazione sperimentale dell'incertezza

Vediamo ora come è possibile, nella pratica, valutare l'incertezza dovuta agli errori casuali a partire da un insieme finito di misure, cioè da un campionamento finito della distribuzione limite.

La procedura da seguire si basa sulla seguente sequenza logica.

- L'incertezza dovuta agli errori casuali è, per convenzione, data dallo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie:  $\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*]$ .
- Lo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie,  $\sigma[m^*]$ , è legato allo scarto tipo  $\sigma$  della distribuzione limite delle singole misure dalla relazione  $\sigma[m^*] = \sigma/\sqrt{N}$  (eq. 4.3.20).
- Lo scarto tipo  $\sigma$  della distribuzione limite delle singole misure non è calcolabile con esattezza a partire da un numero finito di misurazioni; può però essere *stimato* mediante l'eq. (4.3.18).

Combinando insieme questi tre passi, avremo in definitiva:

$$\delta X_{\text{cas}} = \tilde{\sigma}[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.3.24)$$

L'ultima uguaglianza nell'eq. (4.3.24) dà la formula pratica per stimare l'incertezza dovuta agli errori casuali a partire da un insieme di misure ripetute.

Il valore  $\tilde{\sigma}[m^*]$  calcolato mediante l'eq. (4.3.24) è chiamato **scarto tipo stimato della media** (in inglese, *experimental standard deviation of the mean*).

È evidente che per valutare  $\delta X_{\text{cas}}$  è necessario avere a disposizione almeno due misure ( $N > 1$ ).

Cerchiamo ora di approfondire il significato dell'eq. (4.3.23). Che cosa significa che l'incertezza dovuta agli errori casuali è convenzionalmente misurata dallo scarto tipo della distribuzione delle medie ?

Abbiamo visto in precedenza, quando abbiamo introdotto la distribuzione normale di Gauss, che l'area sottesa dalla curva della funzione gaussiana tra i valori  $m - \sigma$  e  $m + \sigma$  è pari a 0.68. Pertanto, nell'ipotesi astratta di conoscere *a priori* la distribuzione gaussiana delle medie campionarie, centrata in  $m$  e con scarto tipo  $\sigma[m^*]$ , potremmo dire che la media  $m^*$  di un qualsiasi campionamento ha la probabilità del 68 % di cadere nell'intervallo  $m^* \pm \sigma[m^*]$ .

Consideriamo ora invece un caso concreto, in cui si conoscono i valori campionari  $m^*$  e  $\sigma^*$ , e si cerca di risalire alla migliore stima del valor vero  $m$ . Possiamo ancora dire che c'è la probabilità del 68 % che il valor vero  $m$  si trovi nell'intervallo  $m^* \pm \delta X_{\text{cas}}$ , con  $\delta X_{\text{cas}}$  stimato mediante l'eq. (4.3.24) ?

Se il campionamento è consistente ( $N$  grande), la risposta è, con buona approssimazione, sì. Si tratta però solo di un'approssimazione, dovuta al fatto che lo scarto tipo della distribuzione delle medie non è noto esattamente (eq. 4.3.23), bensì solo stimato a partire dai dati sperimentali (eq. 4.3.24). La conseguenza di questo fatto può essere rilevante per campionamenti di limitate dimensioni ( $N$  piccolo): la probabilità che  $m$  si trovi nell'intervallo  $m^* \pm \delta X$  è infatti del 68 % solo al limite per  $N \rightarrow \infty$ ; per valori di  $N$  piccoli la probabilità può essere significativamente inferiore al 68 %.

Ritorniamo in modo più approfondito su questo problema ai §7.3 e 7.4. Per il momento, ci limitiamo a ricordare che è sempre buona norma, nell'esprimere l'incertezza dovuta agli errori casuali, indicare il numero  $N$  di misurazioni effettuate.

*Nota:* In questo paragrafo 4.3 abbiamo adottato la seguente convenzione di nomenclatura, che sarà mantenuta anche in seguito: con  $m, D, \sigma$  sono indicati i parametri relativi a distribuzioni limite, con  $m^*, D^*, \sigma^*$  i parametri relativi a campionamenti, con  $\tilde{m}, \tilde{D}, \tilde{\sigma}$  eventuali stime dei parametri.

## 4.4 – Errori sistematici

Nel §3.4, analizzando le prestazioni degli strumenti di misura, abbiamo preso in considerazione gli *errori sistematici*, cioè gli errori che si manifestano in modo regolare con la stessa entità ogni volta che la misura viene ripetuta.

*Esempio:* Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro che ritarda. Tutte le misure, comunque ripetute, sono errate per difetto (errore sistematico dovuto alla taratura difettosa dello strumento).

Le caratteristiche dello strumento di misura non sono le uniche possibili cause di errore sistematico. Anche le modalità con cui lo strumento viene utilizzato possono contribuire ad introdurre errori sistematici (si riveda l'analisi fatta al §4.1 sull'origine dell'incertezza).

*Esempio:* Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro azionato manualmente. Il valore della misura dipende anche dalla differenza tra i tempi di reazione dello sperimentatore all'avvio e all'arresto del cronometro. La differenza tra i tempi di reazione può avere sia una componente casuale sia una componente sistematica; la componente casuale dà origine alla dispersione dei valori di misura; la componente sistematica dà origine ad una variazione fissa del valore di misura.

La varietà delle situazioni da cui possono avere origine gli errori sistematici rende pressoché impossibile una trattazione formale esauriente. La ricerca e l'eliminazione o compensazione degli errori sistematici è un aspetto particolarmente difficile e delicato della fisica sperimentale. Nel seguito di questo paragrafo esamineremo e commenteremo alcuni casi particolarmente rilevanti, senza alcuna pretesa di esaurire l'argomento.

### A) Misurazioni ripetute in condizioni fisse.

Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una grandezza fisica sempre nelle stesse condizioni, cioè mantenendo invariati l'osservatore, la procedura, lo strumento ed eseguendo tutte le misurazioni nello stesso sito ed entro un intervallo di tempo limitato. Ogni misura è in genere affetta sia da errori *casuali* sia da errori *sistematici*.

Come abbiamo visto al §4.3, gli *errori casuali* non possono venire del tutto eliminati, ma è sempre possibile, ripetendo più volte la misurazione, stimarne l'entità ed esprimerla sotto forma di un'incertezza  $\delta X_{\text{cas}}$ .

Gli *errori sistematici*, invece, non vengono comunque messi in luce da misurazioni ripetute nelle stesse condizioni sperimentali; essi possono venire individuati solo mediante un'analisi accurata delle prestazioni dello strumento e della metodologia della misurazione. Proviamo a chiarire le idee con alcuni esempi significativi.

- 1) Talora l'analisi metodologica può portare a individuare un errore sistematico dovuto alla procedura di misura. In tal caso, l'errore può venire eliminato modificando opportunamente la metodologia di misura, oppure compensato da un'opportuna correzione alla misura. L'eventuale correzione può essere comunque affetta da un'incertezza  $\delta X_{\text{sis}}$ , che contribuirà all'incertezza globale della misura (§4.5.D).

*Esempio:* Si misura l'accelerazione di gravità  $g$  sfruttando la relazione  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  che lega il periodo di oscillazione  $T$  e la lunghezza  $\ell$  di un pendolo semplice nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. Il pendolo a disposizione è un cilindretto metallico appeso ad un punto fisso mediante un filo: si misurano direttamente lunghezza  $\ell$  e periodo  $T$  e quindi si calcola  $g = (2\pi/T)^2\ell$ . Un'analisi più accurata mostra che il periodo dipende anche dall'ampiezza di oscillazione e dalla distribuzione della massa del cilindretto. La relazione di partenza  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  è approssimata, quindi crea un errore

sistemato nella misura di  $g$ ; una relazione più accurata, seppure ancora approssimata, è la seguente:  $\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{I/mg\ell} [1 + (1/4) \sin^2(\theta_0/2)]$ , dove  $I$  è il momento d'inerzia del cilindretto rispetto all'asse di oscillazione e  $\theta_0$  l'ampiezza di oscillazione.

- 2) In altri casi, l'analisi della procedura di misurazione porta ad individuare le maggiori cause di errore sistematico senza però consentire di calcolarne e correggerne gli effetti con esattezza. In tali casi si cerca di stimare l'entità dei possibili errori sistematici e di esprimerla ancora sotto forma di un'incertezza  $\delta X_{\text{sis}}$ , che contribuirà all'incertezza globale della misura (§4.5.D).

*Esempio:* Si vuole misurare l'intensità di corrente  $I$  che scorre in un ramo di un circuito elettrico. Allo scopo si inserisce in serie nel ramo del circuito un amperometro a bobina mobile. Lo strumento di misura ha una resistenza interna  $R_i$  non nulla ed introduce una perturbazione nel regime di funzionamento del circuito. L'intensità di corrente misurata dallo strumento è  $I_m < I$ . La differenza  $I_m - I$  rappresenta un *errore sistematico* della misura. In linea di principio, se la resistenza interna  $R_i$  dello strumento e le caratteristiche del circuito sono note, l'errore sistematico può essere valutato e corretto. Nella pratica, le caratteristiche del circuito non sono in genere note con sufficiente dettaglio; è però possibile stimare almeno l'entità massima dell'errore sistematico.

- 3) Può anche succedere che l'errore sistematico sia riferibile ad una insufficiente definizione della grandezza da misurare.

*Esempio:* Si vuole misurare la dipendenza del periodo di oscillazione  $\mathcal{T}$  di un pendolo dall'ampiezza  $\theta_0$ . Allo scopo, si misurano coppie di valori  $(\theta_0, \mathcal{T})$  per diversi valori di  $\theta_0$ . È ben noto, tuttavia, che l'ampiezza  $\theta_0$  si riduce progressivamente nel tempo, per effetto principalmente della resistenza dell'aria. Per grandi valori di  $\theta_0$  la riduzione può essere non trascurabile anche durante l'intervallo di tempo corrispondente ad un periodo  $\mathcal{T}$ . Non è perciò ben definito cosa si intenda per ampiezza relativa ad una data oscillazione. Possiamo affrontare questa situazione considerando la misura effettiva di ampiezza come se fosse affetta da un errore sistematico dovuto allo smorzamento, ed attribuirle una opportuna incertezza. L'incertezza può essere stimata valutando l'entità della riduzione di  $\theta_0$  durante un'oscillazione.

## B) Misurazioni ripetute in condizioni diverse: discrepanza

La ricerca degli errori sistematici e la loro eliminazione, o quantomeno la stima della loro entità, possono essere facilitate dal confronto tra misurazioni effettuate in condizioni diverse (diversi osservatori, diverse procedure, diversi strumenti, diversi siti, etc.) Per semplicità ci limiteremo inizialmente al confronto di due sole misurazioni eseguite in condizioni diverse, che chiameremo  $A$  e  $B$ .

*Esempio:* Due operatori,  $A$  e  $B$ , misurano il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro azionato manualmente. La componente sistematica dei tempi di reazione può essere diversa per i due operatori.

*Esempio:* La costante elastica  $K$  di una molla viene misurata in due modi. La procedura  $A$  (statica) consiste nel misurare il rapporto tra forza applicata  $F$  e deformazione  $x$ , sfruttando la relazione:  $F = Kx$ . La procedura  $B$  (dinamica) consiste nel collegare alla molla una massa e misurare la relazione tra massa  $m$  e periodo di oscillazione  $\mathcal{T}$ , sfruttando la relazione  $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{m/K}$ . Si noti che in questo esempio le due procedure si riferiscono entrambe ad una misurazione *indiretta* della costante elastica  $K$ ; la valutazione dell'incertezza nelle misure indirette verrà affrontata al §4.6.

I risultati delle misurazioni effettuate utilizzando le due procedure saranno espressi nella forma

$$X_A \pm \delta X_A; \quad X_B \pm \delta X_B, \quad (4.4.1)$$

dove le incertezze  $\delta X_A$  e  $\delta X_B$  dipenderanno, a seconda dei casi, dalla risoluzione di misura (§4.2) o dalla dispersione dovuta agli errori casuali (§4.3), e potranno anche contenere contributi dovuti ad errori sistematici già riconosciuti.

Un caso frequente, soprattutto nella pratica dei laboratori didattici, è quello in cui una delle due incertezze è molto maggiore dell'altra,  $\delta X_A \gg \delta X_B$ ; ciò accade ad esempio se  $X_A$  è misurata con semplice

strumentazione didattica mentre  $X_B$  è un valore di riferimento, quotato in pubblicazioni specializzate. In tal caso si potrà porre  $\delta X_B=0$ , e le considerazioni seguenti risulteranno semplificate.

Chiamiamo **discrepanza** il valore assoluto della differenza tra le due misure:  $|X_A - X_B|$ .

Si può pensare che la discrepanza sia dovuta all'influenza di errori sistematici in almeno una delle due misurazioni. In realtà, prima di trarre delle conclusioni in tal senso, è necessario confrontare la discrepanza con le incertezze delle due misure. Una trattazione esaustiva dell'argomento è pressoché impossibile, in considerazione della varietà di situazioni che si possono incontrare. Proviamo allora a chiarire le idee con alcuni esempi significativi.

- 1) Le incertezze su  $X_A$  e  $X_B$  sono entrambe dovute alla risoluzione di misura, e quindi descritte da distribuzioni a rettangolo, di larghezze rispettivamente  $\Delta X_A$  e  $\Delta X_B$ . Se la discrepanza è confrontabile o inferiore alla somma delle *incertezze massime*, cioè alla semisomma delle risoluzioni, (Fig. 4.9, in alto a sinistra),

$$|X_A - X_B| \leq \frac{\Delta X_A + \Delta X_B}{2} \quad (4.4.2)$$

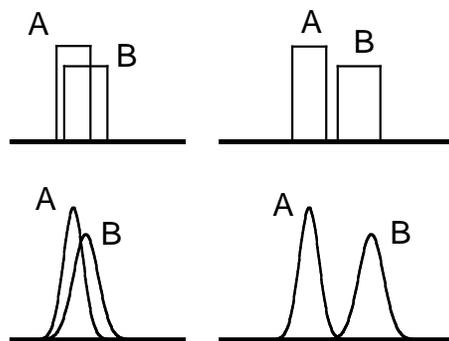
i due valori  $X_A$  e  $X_B$  si considerano **consistenti** (o *compatibili*). La discrepanza  $|X_B - X_A|$  può essere attribuita alle incertezze dei singoli valori, e non ci può essere di alcun aiuto per valutare ulteriori contributi all'incertezza dovuti agli errori sistematici.

- 2) Le incertezze su  $X_A$  e  $X_B$  sono ancora entrambe dovute alla risoluzione di misura, ma questa volta la discrepanza è maggiore della somma delle *incertezze massime*, cioè della semisomma delle risoluzioni (Fig. 4.9, in alto a destra),

$$|X_A - X_B| > \frac{\Delta X_A + \Delta X_B}{2}. \quad (4.4.3)$$

I due valori  $X_A$  e  $X_B$  si considerano **inconsistenti** (o *incompatibili*), e la discrepanza può generalmente essere attribuita all'effetto di errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

**Fig. 4.9** – Rappresentazione schematica del confronto tra misure di una grandezza  $X$  ottenute con due procedure diverse,  $A$  e  $B$ . In alto le incertezze sono dovute alla risoluzione (distribuzioni a rettangolo), in basso sono dovute agli errori casuali (distribuzioni normali). A sinistra sono mostrati casi di consistenza, a destra casi di inconsistenza.



- 3) Le incertezze su  $X_A$  e  $X_B$  sono entrambe dovute agli errori casuali, e quindi descritte da distribuzioni gaussiane. Non esiste in questo caso un'incertezza massima. Ricordiamo però che la probabilità di trovare valori al di fuori dell'intervallo  $\pm 3\sigma$  centrato sul valor medio è trascurabile. Pertanto, se la discrepanza è maggiore della somma dei due intervalli "3 $\sigma$ " (Fig. 4.9, in basso a destra),

$$|X_A - X_B| > 3\sigma_A + 3\sigma_B \quad (4.4.4)$$

potremo ancora considerare le misure  $X_A$  e  $X_B$  come **inconsistenti** (o *incompatibili*), e attribuire la discrepanza all'effetto di errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

- 4) Le incertezze su  $X_A$  e  $X_B$  sono ancora entrambe dovute agli errori casuali, ma questa volta la discrepanza è inferiore della somma dei due intervalli “ $3\sigma$ ” (Fig. 4.9, in basso a sinistra),

$$|X_A - X_B| < 3\sigma_A + 3\sigma_B. \quad (4.4.5)$$

In questo caso, una decisione sulla consistenza dei due valori  $X_A$  e  $X_B$  è meno immediata che nel caso delle distribuzioni a rettangolo. A rigore, si possono fare solo considerazioni di natura probabilistica, basate sul confronto tra discrepanza e larghezze delle gaussiane (approfondiremo l’argomento più avanti, al §7.4). La decisione dipende in buona misura dalla valutazione soggettiva dello sperimentatore.

Nel caso di misure inconsistenti, prima di trarre conclusioni definitive circa l’incertezza, è buona norma, se possibile, riesaminare con cura entrambe le procedure  $A$  e  $B$ , per cercare di individuare ed eventualmente eliminare gli errori sistematici. Allo scopo, sempre se possibile, si ricorre ad ulteriori misurazioni di riscontro basate su procedure alternative o affidate a operatori diversi.

*Esempio:* Riprendiamo ancora l’esempio della misurazione della costante elastica di una molla. Un’eventuale inconsistenza tra i risultati delle due procedure di misurazione, statica e dinamica, può portare a riconsiderare la procedura della misurazione dinamica. Nella relazione  $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{m/K}$ , la massa  $m$  misura l’inerzia del corpo collegato alla molla, ma non tiene conto dell’inerzia della molla stessa. Una relazione più corretta è  $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{M/K}$ , con  $M = m + m_e$ , dove  $m_e$  è una *massa efficace* che tiene conto dell’inerzia della molla.

### C) Media pesata

Prima di considerare più in dettaglio la trattazione degli errori sistematici nel caso di misure inconsistenti, vogliamo introdurre una procedura, la cosiddetta *media pesata*, che consente di sintetizzare comunque in un unico valore  $X_0$  i risultati di due o più misurazioni ripetute in condizioni diverse.

Per semplicità di notazione, ci limitiamo inizialmente al caso di due sole misure

$$X_A \pm \delta X_A; \quad X_B \pm \delta X_B, \quad (4.4.6)$$

Nel calcolo del valor medio  $X_0$  è ragionevole tener conto dell’eventuale differenza tra le incertezze  $\delta X_A$  e  $\delta X_B$ : la misura che ha l’incertezza più bassa dovrà contribuire in modo più significativo alla media, e viceversa. Allo scopo, si introducono i *pesi* dei valori  $X_A$  e  $X_B$ , definiti come

$$w_A = \frac{1}{(\delta X_A)^2}; \quad w_B = \frac{1}{(\delta X_B)^2}. \quad (4.4.7)$$

Il valore  $X_0 \pm \delta X$  viene quindi calcolato mediante la procedura della *media pesata*:

$$X_0 = X_w = \frac{X_A w_A + X_B w_B}{w_A + w_B}. \quad (4.4.8)$$

Una giustificazione formale della procedura della media pesata, ed in particolare della scelta dei pesi secondo l’eq. (4.4.7), verrà data al § 7.3.C in base a considerazioni di tipo probabilistico.

Come vedremo al Cap. 7, la media pesata secondo l’eq. (4.4.8) è a rigore ben fondata solo nel caso in cui l’incertezza sia esprimibile come scarto tipo di una distribuzione normale di Gauss (caso degli errori casuali). Nel caso di altri tipi di distribuzione (ad esempio la distribuzione a rettangolo che descrive la risoluzione di misura) la procedura di media pesata dell’eq. (4.4.8) è ancora utilizzabile, seppure in modo meno rigoroso, purché l’incertezza sia espressa dallo scarto tipo della distribuzione.

Vogliamo ora determinare l’incertezza  $\delta X_w$  sul valore della media pesata. Se i due valori  $X_A$  e  $X_B$  sono *consistenti*, l’incertezza sulla media pesata è interamente riconducibile alle loro incertezze, e può essere espressa così:

$$\delta X_w = \frac{1}{\sqrt{w_A + w_B}}. \quad (4.4.9)$$

L'espressione dell'incertezza sulla media pesata contenuta nell'Eq. (4.4.9) verrà giustificata al § 4.6.B come applicazione particolare delle regole generali per la propagazione dell'incertezza.

*Esempio:* La costante elastica  $K$  di una molla viene misurata sia staticamente che dinamicamente (vedi esempio precedente). I corrispondenti risultati sono:  $K_A=10.40\pm 0.04$  kg/s<sup>2</sup> e  $K_B=10.37\pm 0.08$  kg/s<sup>2</sup>.

I pesi dei due risultati sono rispettivamente:  $w_A = 625$  s<sup>4</sup>/kg<sup>2</sup>,  $w_B = 156$  s<sup>4</sup>/kg<sup>2</sup>. La media pesata è  $K=10.39\pm 0.03$  kg/s<sup>2</sup>.

La procedura di media pesata può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di misure:

$$X_w = \frac{\sum_i X_i w_i}{\sum_i w_i}, \quad \text{con} \quad w_i = \frac{1}{(\delta X_i)^2}, \quad (4.4.10)$$

e l'incertezza, per misure tra di loro consistenti, è espressa da:

$$\delta X_w = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}. \quad (4.4.11)$$

## D) Incertezza dovuta agli errori sistematici

Torniamo a fissare l'attenzione sul caso in cui le due misure  $X_A$  e  $X_B$  dell'eq. (4.4.1) sono **inconsistenti**, a causa della presenza di rilevanti errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

Un *valore medio* delle due misure potrà sempre essere calcolato mediante la procedura di media pesata, eq. (4.4.8), che attribuisce maggior peso alla misura con minore incertezza.

La discrepanza tra le due misure sarà considerata sotto forma di incertezza. L'*incertezza standard* dovuta agli errori sistematici potrà in questo caso essere espressa mediante la stessa procedura usata per gli errori casuali, eq. (4.3.24), cioè come lo scarto quadratico medio stimato della distribuzione delle medie. Per due misure  $X_A$  e  $X_B$  pertanto è facile verificare, applicando l'eq. (4.3.24), che

$$\delta X_{\text{sis}} \simeq \frac{|X_A - X_B|}{2} \quad (4.4.12)$$

Questa procedura può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di misure inconsistenti  $X_A, X_B, X_C, \dots$ , ottenute in condizioni diverse. La *distribuzione* dei valori  $X_A, X_B, X_C, \dots$  è dovuta alla differente influenza degli errori sistematici in ogni singolo esperimento.

Il valore medio  $X_0$  potrà essere ancora calcolato mediante la formula della media pesata, eq. (4.4.10). L'incertezza sulla media pesata  $\delta X_w$ , calcolata con l'eq. (4.4.11), può tener conto solo delle incertezze nelle singole misure  $X_A, X_B, X_C, \dots$  di partenza. L'incertezza  $\delta X_{\text{sis}}$  dovuta agli errori sistematici potrà invece essere valutata in analogia con l'eq. (4.4.12) a partire dalla distribuzione dei valori, utilizzando la formula (4.3.24), già introdotta per gli errori casuali.

In altri termini, in questo caso gli errori sistematici incogniti delle singole misurazioni vengono trattati formalmente come errori casuali. Si può anche pensare che, per un insieme grande di misurazioni effettuate in condizioni differenti, gli errori sistematici delle singoli misure possano essere visti nel complesso come errori casuali (questa prospettiva è detta talora in inglese *randomization of systematic errors*.)

*Esempio:* In un laboratorio didattico  $N$  gruppi di lavoro determinano indipendentemente l'accelerazione di gravità  $g$  misurando periodo  $\mathcal{T}$  e lunghezza  $\ell$  di un pendolo e usando la relazione  $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ . Indichiamo con  $g_k \pm \delta g_k$  il risultato del  $k$ -mo gruppo ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Se i risultati dei diversi gruppi sono tra loro inconsistenti, le discrepanze vanno attribuite agli errori sistematici. La natura e l'entità dell'errore sistematico di un singolo gruppo è incognita. Tuttavia, se il numero di gruppi  $N$  è sufficientemente grande, si trova che la distribuzione dei valori tende ad assomigliare ad una distribuzione di tipo casuale. L'errore sistematico medio può essere stimato come scarto tipo della distribuzione delle medie dei valori  $g_k$ .

*Nota:* La consistenza o inconsistenza di due o più misure ottenute in condizioni diverse può essere valutata a posteriori confrontando l'incertezza sulla media pesata,  $\delta X_w$ , con l'incertezza calcolata a partire

dalla dispersione dei valori; se quest'ultima prevale, significa che le misure non sono consistenti, a causa dell'influenza di errori sistematici (oppure per la sottovalutazione delle incertezze sulle singole misure).

## 4.5 – Incertezza: riepilogo e confronti

Nei paragrafi precedenti abbiamo distinto ed esaminato separatamente tre diverse possibili cause di incertezza nelle misure delle grandezze fisiche:

- la risoluzione della misura (§ 4.2);
- la dispersione dei valori di misura dovuta agli errori casuali (§ 4.3);
- la stima degli errori sistematici (§ 4.4).

Quando si usano strumenti di misura, gli effetti degli errori sistematici e casuali sono spesso valutati dal costruttore, per cui si potrà avere a che fare anche con

- l'incertezza quotata nel manuale d'uso dello strumento (§3.4).

Come abbiamo più volte rilevato, *l'incertezza fa parte integrante della misura*, e deve sempre essere espressa esplicitamente, ad esempio nella forma  $X_0 \pm \delta X$ .

Nei casi esaminati nei precedenti paragrafi l'incertezza  $\delta X$  è stata definita in modo convenzionale. Ad esempio, nel caso degli errori casuali l'incertezza è stata assunta uguale allo scarto tipo della distribuzione delle medie,  $\delta X = \sigma[m^*]$ . Sarebbe stato altrettanto lecito assumere, come pure talora viene fatto,  $\delta X = 2\sigma[m^*]$  oppure  $\delta X = 3\sigma[m^*]$ . Il significato stesso di incertezza può variare da caso a caso. Ad esempio, per gli errori casuali l'incertezza è legata allo scarto tipo di una distribuzione normale, per la risoluzione è legata alla larghezza di una distribuzione a rettangolo. In questo secondo caso, è stato possibile distinguere tra un'incertezza massima ( $\Delta X/2$ ) ed un'incertezza tipo ( $\Delta X/\sqrt{12}$ ).

La mancanza di uniformità nella valutazione ed espressione dell'incertezza può creare difficoltà non trascurabili, tipicamente nelle seguenti situazioni:

- a) l'incertezza di una misura è dovuta all'effetto composto di cause differenti (ad es. errori casuali ed errori sistematici);
- b) si deve esprimere l'incertezza  $\delta Q$  di una grandezza  $Q(X, Y, \dots)$  misurata indirettamente a partire dalle incertezze  $\delta X, \delta Y, \dots$ , generalmente di diversa origine, delle grandezze  $X, Y, \dots$  misurate direttamente;
- c) si vogliono confrontare misure di una stessa grandezza provenienti da laboratori diversi, che hanno utilizzato differenti convenzioni per quotare le incertezze.

A seguito di un'iniziativa del B.I.P.M. (*Bureau International des Poids et Mesures*), nel 1995 l'I.S.O. (*International Organisation for Standardisation*) ha redatto una *Guida per l'espressione dell'incertezza di misura*, che stabilisce regole generali per uniformare a livello internazionale i metodi di valutazione ed espressione dell'incertezza. La versione italiana della guida è stata realizzata nel 1997 dall'U.N.I. (*Ente Nazionale per l'Unificazione*)

In questo paragrafo confronteremo i diversi tipi di incertezza introdotti nei paragrafi precedenti e vedremo come è possibile impostare una descrizione unificata in base alle raccomandazioni dell'I.S.O.

### A) Incertezza statistica e non

Secondo l'impostazione dell'I.S.O., le incertezze vengono classificate in relazione al modo con cui vengono calcolate, anziché in relazione alle loro cause. Vengono pertanto distinte due Categorie di incertezze:

**Categoria A** (ingl. *Type A*): incertezze valutate per mezzo di metodi statistici.

**Categoria B** (ingl. *Type B*): incertezze valutate per mezzo di metodi non statistici.

*Esempio 1:* L'incertezza  $\delta X_{\text{cas}}$  dovuta agli *errori casuali* è di Categoria A, in quanto la sua valutazione si basa sul trattamento statistico di un insieme di  $N$  misurazioni ripetute. L'incertezza  $\delta X_{\text{cas}}$  è

misurata a partire dalla larghezza della distribuzione delle medie campionarie; la distribuzione ha forma normale e la sua larghezza si riduce al crescere del numero  $N$  di misurazioni.

*Esempio 2:* L'incertezza  $\delta X_{\text{ris}}$  dovuta alla *risoluzione* è di Categoria B, in quanto la sua valutazione non fa riferimento a metodi statistici basati sulla ripetizione delle misurazioni. L'incertezza  $\delta X_{\text{ris}}$  è misurata a partire dalla conoscenza dell'intervallo di risoluzione  $\Delta X$ . All'intervallo di risoluzione può essere associata una distribuzione a rettangolo (distribuzione a densità uniforme).

*Esempio 3:* L'incertezza  $\delta X_{\text{sis}}$  dovuta alla *stima degli errori sistematici* è generalmente considerata di Categoria B, cioè di origine non statistica. In taluni casi però, ad esempio quando la stima si basa sul confronto tra misure inconsistenti secondo la procedura del § 4.4.D, l'incertezza  $\delta X_{\text{sis}}$  va attribuita alla Categoria A. È in ogni caso conveniente associare all'errore sistematico una distribuzione modello (normale, a rettangolo, a triangolo, etc.), costruita di volta in volta in base alle informazioni disponibili.

## B) Espressione unificata dell'incertezza

L'unificazione dei criteri per l'espressione dell'incertezza di misura si basa sulle seguenti convenzioni:

- Ad ogni causa di incertezza è associata una opportuna **distribuzione**, che può essere di origine statistica (Categoria A) oppure costruita a priori in base alle informazioni comunque disponibili (Categoria B).
- L'incertezza  $\delta X$  è assunta uguale allo **scarto tipo** (o *scarto quadratico medio*, in inglese *standard deviation*) della distribuzione. L'incertezza così definita è detta **incertezza tipo** (o *incertezza standard*, in inglese *standard uncertainty*).

*Esempio 1:* Come abbiamo visto al §4.3, l'incertezza  $\delta X_{\text{cas}}$  dovuta agli *errori casuali* è assunta uguale allo scarto tipo della distribuzione limite dei valori medi (Eq. 4.3.21):

$$\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*] \quad (4.5.1)$$

e può essere *stimata* a partire dai dati sperimentali usando l'Eq. (4.3.24):

$$\delta X_{\text{cas}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.5.2)$$

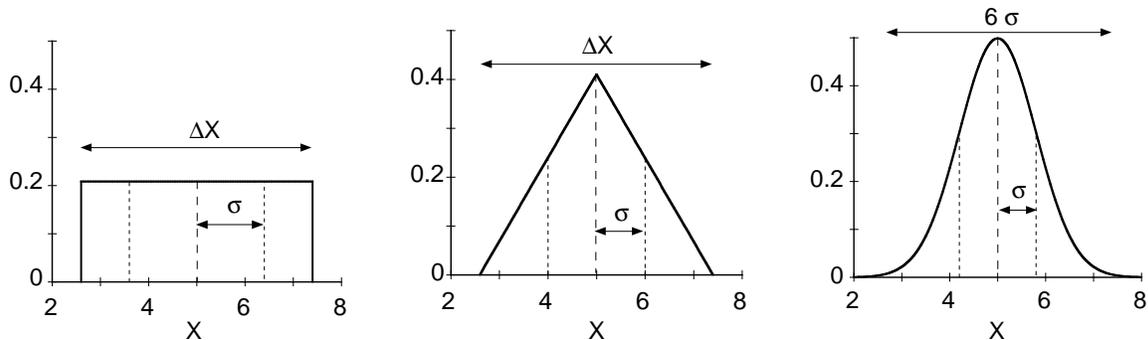
La distribuzione delle medie è con buona approssimazione normale (Fig. 4.10 a destra); l'intervallo tra  $X_0 - \sigma[m^*]$  e  $X_0 + \sigma[m^*]$  rappresenta il 68 % dei valori possibili.

*Esempio 2:* L'incertezza  $\delta X_{\text{ris}}$  dovuta alla *risoluzione* è associata ad una distribuzione a rettangolo di base  $\Delta X$  e altezza  $1/\Delta X$  (Fig. 4.10 a sinistra). Come dimostreremo al Cap. 6, per la distribuzione a rettangolo lo scarto tipo è  $\sigma = \Delta X/\sqrt{12}$ , per cui

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / \sqrt{12}. \quad (4.5.3)$$

L'intervallo tra  $X_0 - \delta X$  e  $X_0 + \delta X$  rappresenta il 58 % dell'area del rettangolo.

*Esempio 3:* Nel caso degli *errori sistematici* la distribuzione viene ipotizzata in base alle conoscenze disponibili. Supponiamo ad esempio di poter stabilire che il valore della grandezza  $X$  non può comunque essere inferiore a  $X_{\text{min}}$  o superiore a  $X_{\text{max}}$ . In assenza di ulteriori informazioni è ragionevole assumere una distribuzione a rettangolo (Fig. 4.10 a sinistra). Se però si ritiene plausibile che i valori centrali siano più probabili dei valori vicini ai limiti  $X_{\text{min}}$  e  $X_{\text{max}}$ , allora è più ragionevole assumere una distribuzione a triangolo o una distribuzione normale (Fig. 4.10, al centro e a destra). Una volta fatta una scelta della distribuzione se ne calcolerà lo scarto tipo, secondo le procedure che saranno introdotte al Cap. 6, per determinare  $\delta X_{\text{sis}}$ .



**Fig. 4.10** – Distribuzioni a rettangolo (a sinistra), a triangolo (al centro) e normale di Gauss (a destra). Le distribuzioni sono normalizzate ad area unitaria. Per comodità di confronto le tre distribuzioni hanno uguale valor medio  $m=5$  e larghezza simile. Lo scarto tipo è  $\sigma = \Delta X/\sqrt{12}$  per la distribuzione a rettangolo,  $\sigma = \Delta X/\sqrt{24}$  per la distribuzione a triangolo; per la distribuzione normale l'intervallo di larghezza  $6\sigma$  centrato sul valor medio racchiude il 99.74 % dell'intera distribuzione. La percentuale d'area compresa tra  $X = m - \sigma$  e  $X = m + \sigma$  è rispettivamente il 58, il 65 e il 68 % per le distribuzioni a rettangolo, a triangolo e normale.

La scelta di identificare sempre l'incertezza, qualunque ne sia l'origine, con lo scarto tipo di una distribuzione offre molti vantaggi. In particolare è possibile confrontare ed eventualmente comporre in modo coerente incertezze di diversa origine.

Inoltre, come vedremo in particolare nei Capitoli 6 e 7, molti formalismi per l'analisi statistica dei dati si basano sulle peculiari proprietà della distribuzione normale e dei suoi parametri  $m$  e  $\sigma$  (uno di questi formalismi, il metodo della media pesata, è già stato introdotto al §4.4). Identificando sempre l'incertezza con uno scarto tipo, è possibile applicare con buona approssimazione i formalismi sviluppati per le distribuzioni normali anche alle incertezze di origine non statistica.

*Nota:* L'intervallo individuato dallo scarto tipo intorno al valore centrale  $X_0$  rappresenta una parte dei possibili valori di misura (circa il 68 % per la distribuzione normale, circa il 58 % per la distribuzione a rettangolo). In talune applicazioni è preferibile esprimere l'incertezza come un intervallo di valori entro cui la misura cada con probabilità vicina a 1; si usa allora l'*incertezza estesa*, ottenuta moltiplicando lo scarto tipo (cioè l'incertezza tipo) per un opportuno *fattore di copertura*, tipicamente 2 oppure 3 nel caso di distribuzioni normali. Torneremo più diffusamente su questo problema al §7.4. Le deroghe dall'espressione standard dell'incertezza devono comunque essere sempre indicate esplicitamente.

### C) Confronto tra le diverse cause di incertezza

Le incertezze dovute alla *risoluzione* della misura o alla presenza di *errori casuali* in genere si escludono mutuamente, nel senso che si deve tenere conto esclusivamente dell'una oppure dell'altra. Più precisamente, è opportuno tenere conto della maggiore delle due incertezze.

Supponiamo, ad esempio, di misurare una grandezza  $X$  con una risoluzione  $\Delta X$ , corrispondente ad un'incertezza  $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/\sqrt{12}$ .

Supponiamo anche che gli errori casuali diano luogo ad una dispersione di valori descritta da una distribuzione gaussiana, con scarto quadratico medio  $\sigma_x$ . Come abbiamo visto al §4.3, l'incertezza dovuta agli errori casuali è  $\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*] = \sigma_x/\sqrt{N}$ , dove  $N$  è il numero di misurazioni.

Al crescere di  $N$ , l'incertezza  $\delta X_{\text{cas}}$  diminuisce proporzionalmente a  $1/\sqrt{N}$ . Sarebbe pertanto possibile ridurre a piacere l'incertezza della misura aumentando convenientemente il numero  $N$  di misurazioni. In realtà l'incertezza della misura può essere identificata con quella dovuta agli errori casuali,  $\delta X = \delta X_{\text{cas}}$ , solo fintantoché

$$\delta X_{\text{cas}} > \delta X_{\text{ris}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} > \frac{\Delta X}{\sqrt{12}}. \quad (4.5.4)$$

Tra le due cause di incertezza (risoluzione ed errori casuali) prevale sempre quella che dà il contributo maggiore. Di conseguenza, è inutile aumentare indiscriminatamente il numero  $N$  di misurazioni per ridurre l'incertezza  $\delta X_{\text{cas}}$ . Dalla disequazione (4.5.4) è immediato determinare un limite superiore al numero  $N$  di misurazioni:

$$N \leq \frac{12 \sigma_x^2}{(\Delta X)^2}. \quad (4.5.5)$$

La risoluzione della misura rappresenta un limite inferiore all'incertezza  $\delta X$ . Come abbiamo visto al §4.2, è spesso possibile, mediante opportune tecniche, ridurre anche l'incertezza dovuta alla risoluzione,  $\delta X_{\text{ris}}$ .

La relativa facilità con cui si possono valutare ed eventualmente ridurre le incertezze dovute a risoluzione o errori casuali non deve mai far dimenticare la terza fonte di incertezza delle misure, cioè la presenza di *errori sistematici* non riconosciuti e quindi non corretti.

Valutare l'incertezza  $\delta X_{\text{sis}}$  dovuta agli errori sistematici non è generalmente facile. È frequente il caso di misure in cui  $\delta X_{\text{sis}}$  è sottostimata o addirittura trascurata del tutto.

Abbiamo comunque già visto, al § 4.4.D, che misure ripetute in condizioni differenti consentono talora di valutare in termini statistici l'influenza degli errori sistematici. Incontreremo più avanti altre analoghe situazioni.

## D) Composizione di incertezze

L'incertezza dovuta alla stima degli errori sistematici è indipendente dall'incertezza da risoluzione o da errori casuali. Nel quotare l'incertezza di una misura, è in genere utile distinguere esplicitamente i due tipi di contributi ( $\delta X_{\text{sis}}$  da un lato,  $\delta X_{\text{cas}}$  o  $\delta X_{\text{ris}}$  dall'altro).

In alcuni casi si possono distinguere più sorgenti indipendenti di errori sistematici, e può essere utile quotare separatamente le rispettive incertezze.

Talora però si presenta la necessità di quotare in modo sintetico un'incertezza complessiva della misura,  $\delta X_{\text{tot}}$ , che tenga opportunamente in conto il contributo dei diversi tipi di incertezza valutati (ad esempio  $\delta X_{\text{sis}}$  e  $\delta X_{\text{cas}}$ , oppure  $\delta X_{\text{sis}}$  e  $\delta X_{\text{ris}}$ ).

In questi casi, se si è avuto cura di esprimere tutte le incertezze in termini di scarto tipo di un'opportuna distribuzione, l'incertezza complessiva della misura andrà espressa come *somma quadratica* delle diverse incertezze componenti.

Ad esempio:

$$\delta X_{\text{tot}} = \sqrt{(\delta X_{\text{cas}})^2 + (\delta X_{\text{sis}})^2}, \quad (4.5.6)$$

o più in generale, indicando con  $\delta X_i$  le diverse cause di incertezza,

$$\delta X_{\text{tot}} = \sqrt{\sum_i (\delta X_i)^2}. \quad (4.5.7)$$

La motivazione di questa procedura di somma quadratica sarà chiarita nel § 4.6.B.

## E) Espressioni dell'incertezza

Nell'espressione dei risultati di misura nella forma  $X = X_0 \pm \delta X$ ,  $\delta X$  è spesso chiamata **incertezza assoluta**. L'incertezza assoluta ha le stesse dimensioni del valore centrale  $X_0$ .

È bene far presente qui che l'incertezza  $\delta X$ , comunque sia stata valutata, va sempre espressa mediante una o al massimo due cifre significative, e che il valore centrale  $X_0$  va espresso con un numero di cifre significative consistente con l'incertezza (per maggiori dettagli sull'uso delle cifre significative si rimanda all'Appendice A.1).

Talora viene utilizzato, per esprimere l'incertezza assoluta, un modo alternativo rispetto alla forma  $X = X_0 \pm \delta X$ . Le cifre significative che esprimono l'incertezza  $\delta X$  vengono scritte tra parentesi immediatamente dopo il valore centrale  $X_0$ ; si sottintende che l'incertezza va applicata alle corrispondenti ultime cifre significative del valore centrale  $X_0$ . Ad esempio, per una misura di lunghezza espressa in metri,

$$\ell = 2.357(25) \text{ m} \quad \text{sta per} \quad \ell = (2.357 \pm 0.025) \text{ m}$$

Questo modo di indicare l'incertezza è frequentemente utilizzato quando le incertezze sono molto piccole rispetto ai valori centrali. È il caso, tipicamente, delle costanti fondamentali della Fisica, alcune delle quali sono riportate in Appendice D.2. Ad esempio, il valore della massa dell'elettrone è quotato come

$$m_e = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg},$$

che equivale a

$$m_e = (9.109\,381\,88 \pm 0.000\,000\,72) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

## F) Incertezza relativa

La qualità di una misura non è individuata dal solo valore dell'incertezza assoluta  $\delta X$ , bensì dal rapporto tra incertezza assoluta  $\delta X$  e valore centrale  $X_0$ . Ad esempio, è evidente che un'incertezza  $\delta X = 1 \text{ mm}$  ha diverso significato se riferita ad una lunghezza  $X_0 = 1 \text{ cm}$  o a una lunghezza  $X_0 = 10 \text{ m}$ .

Il rapporto

$$\frac{\delta X}{|X_0|} \quad (4.5.8)$$

è detto **incertezza relativa** della misura. Quanto più piccola è l'incertezza relativa, tanto migliore è considerata la qualità della misura.

L'uso del modulo  $|X_0|$  nell'eq. (4.5.8) serve ad avere un valore sempre positivo di incertezza relativa, anche quando il valore  $X_0$  è negativo. L'incertezza relativa, essendo il rapporto tra due grandezze che hanno le stesse dimensioni, è sempre una quantità adimensionale.

L'incertezza relativa può assumere valori molto minori di 1. Per evitare l'uso di numeri decimali troppo piccoli, si usa spesso moltiplicare per 100 l'incertezza relativa, ottenendo così l'**incertezza percentuale**, che si indica con il simbolo %.

Se l'incertezza assoluta è molti ordini di grandezza minore del valore centrale, come succede per le misure molto accurate delle costanti fondamentali della Fisica (vedi Tabella D.2), si usa moltiplicare l'incertezza relativa per il fattore  $10^6$ , ottenendo l'incertezza espressa in **parti per milione** (ppm).

*Esempio 1:* La lunghezza di un pendolo,  $\ell = 1.25 \text{ m}$ , e la deformazione di una molla,  $x = 1.2 \text{ cm}$ , vengono misurati con la stessa incertezza assoluta  $\delta\ell = \delta x = 1 \text{ mm}$ . L'incertezza relativa della misura del pendolo,  $\delta\ell/\ell = 8 \times 10^{-4} = 0.08 \%$ , è molto più piccola dell'incertezza relativa nella misura della deformazione della molla,  $\delta x/x = 8 \times 10^{-2} = 8 \%$ .

*Esempio 2:* La massa dell'elettrone  $m_e = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg}$  ha un'incertezza relativa  $\delta m/m = 8 \times 10^{-8}$ , pari a 0.08 ppm (parti per milione).

## G) Caratteristiche qualitative delle misure

Finora abbiamo caratterizzato le misure delle grandezze fisiche con un parametro quantitativo, l'**incertezza** (in inglese *uncertainty*). Nella pratica di laboratorio vengono spesso usati vari altri termini per qualificare e confrontare le proprietà delle misure.

La **ripetibilità** (in inglese *repeatability*) di una misura indica qualitativamente il grado di accordo tra i risultati di misurazioni diverse eseguite nelle stesse condizioni (stessa procedura, stesso osservatore, stessi strumenti, stesso luogo) e ripetute a breve distanza di tempo. Il concetto di ripetibilità è legato all'influenza degli errori casuali.

La **riproducibilità** (in inglese *reproducibility*) di una misura indica qualitativamente il grado di accordo tra i risultati di misurazioni eseguite in condizioni differenti (ad esempio, differenti procedure, differenti osservatori, differenti strumenti, differenti luoghi, tempi significativamente diversi).

Il termine **accuratezza** (in inglese *accuracy*) viene utilizzato per caratterizzare il grado di concordanza di una data misura con un *valor vero* della grandezza. Per *valor vero* si intende qui un valore accettato, a volte per convenzione, come avente un'incertezza adatta ad un determinato scopo. Si possono ad esempio considerare *valori veri* delle costanti fondamentali della Fisica quelli periodicamente pubblicati dal Comitato internazionale CODATA (vedi Appendice D.2).

I termini introdotti sopra (ripetibilità, riproducibilità, accuratezza) hanno significato puramente qualitativo. Ad essi non è pertanto corretto associare valori numerici.

*Nota:* Il termine **precisione** veniva utilizzato in passato nell'accezione oggi attribuita al termine *accuratezza*. Nel mondo anglosassone invece il termine *precision* veniva utilizzato nell'accezione che oggi si attribuisce al termine *repeatability*. Per evitare equivoci interpretativi, in particolare nel confronto tra documenti redatti in lingue diverse, i termini *precisione* e *precision* non dovrebbero più essere utilizzati.

## 4.6 – Incertezza nelle misure indirette

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato le cause di incertezza nelle misurazioni *dirette*, ed abbiamo imparato ad esprimere la misura di una grandezza fisica nella forma  $X_0 \pm \delta X$ . Il valore centrale  $X_0$  e l'incertezza  $\delta X$  sono stati ricondotti, rispettivamente, al valor medio e allo scarto tipo di una opportuna distribuzione.

Nella pratica sperimentale accade spesso che una grandezza fisica sia misurata *indirettamente*, sfruttando relazioni analitiche che la collegano ad altre grandezze misurate direttamente (§1.3.B).

*Esempio:* Si misurano direttamente la lunghezza  $\ell$  e il periodo di oscillazione  $T$  di un pendolo semplice. L'accelerazione di gravità  $g$  viene misurata indirettamente sfruttando la relazione  $g = 4\pi^2\ell/T^2$ .

Per generalizzare, chiameremo  $X, Y, Z, \dots$  le grandezze misurate direttamente,  $Q$  la grandezza misurata indirettamente e  $Q = f(X, Y, Z, \dots)$  la relazione analitica che lega il valore di  $Q$  ai valori di  $X, Y, Z, \dots$ ; ad esempio  $Q = X + Y$ , oppure  $Q = XY/Z$ .

Poiché le grandezze  $X, Y, Z, \dots$  sono affette da incertezza, ci si aspetta che anche la grandezza  $Q$  sia affetta da incertezza, e vada espressa nella forma  $Q_0 \pm \delta Q$ , con  $Q_0$  e  $\delta Q$  riconducibili rispettivamente al valor medio e allo scarto tipo di una opportuna distribuzione.

In questo paragrafo impareremo a determinare il valore centrale  $Q_0$  e valutare l'incertezza  $\delta Q$  a partire dai valori  $X_0, Y_0, Z_0, \dots$  e dalle incertezze  $\delta X, \delta Y, \delta Z, \dots$ . L'incertezza  $\delta Q$  è detta *incertezza composta* (ingl. *combined uncertainty*).

Questo problema, che va sotto il nome di *propagazione dell'incertezza*, è piuttosto complesso, e pertanto lo affronteremo in modo graduale. Chiariremo innanzitutto il concetto fondamentale di indipendenza statistica delle misure. Poi studieremo la propagazione nei casi più semplici, in cui  $Q$  dipende linearmente da  $X, Y, Z, \dots$ . Infine studieremo relazioni funzionali più complesse, per arrivare a formulare una regola approssimata di applicazione generale. Una giustificazione più approfondita di molti dei concetti presentati in questo paragrafo verrà fornita nel Cap. 7.

### A) Indipendenza statistica delle misure dirette

Fissiamo l'attenzione su due grandezze,  $X$  e  $Y$ , misurate direttamente, e supponiamo di conoscere con buona approssimazione le rispettive distribuzioni limite ed i loro valori medi  $X_0$  e  $Y_0$ .

Se ora consideriamo due singole misure,  $x$  e  $y$ , possiamo calcolare i loro scarti rispetto ai valori medi:  $x - X_0$  e  $y - Y_0$ . Le misure delle due grandezze  $X$  e  $Y$  sono dette *statisticamente indipendenti* se gli scarti  $x - X_0$  e  $y - Y_0$  sono tra di loro scorrelati; in altri termini, se la conoscenza dello scarto  $x - X_0$  non consente di fare alcuna previsione sul valore dello scarto  $y - Y_0$ , e viceversa. Il concetto di indipendenza statistica è immediatamente generalizzabile ad un numero qualsiasi di grandezze fisiche.

L'indipendenza statistica delle misure di due o più grandezze fisiche non va confusa con l'eventuale correlazione tra le due grandezze stesse, di cui ci occuperemo al §4.7.

*Esempio 1:* Si misurano lunghezza e periodo di oscillazione di un pendolo semplice. È facile rendersi conto che le due grandezze sono tra di loro *correlate*: aumentando la lunghezza del pendolo aumenta regolarmente anche il periodo. Le misure di lunghezza e periodo sono tuttavia *statisticamente*

*indipendenti.*

*Esempio 2:* Si vuole misurare il perimetro  $P$  di un poligono con un metro a nastro. Allo scopo si misurano direttamente i singoli lati  $a, b, c, \dots$  del poligono e si calcola poi il perimetro come somma dei lati:  $P = a + b + c + \dots$ . Supponiamo che la causa maggiore di incertezza nella misura sia da attribuire a scarsa fiducia nella calibrazione del metro; si ha quindi motivo di ritenere che tutte le misure siano errate nello stesso senso (per difetto o per eccesso), e quindi non siano statisticamente indipendenti.

Nei prossimi tre paragrafi (§ 4.6.B, 4.6.C, 4.6.D) considereremo la propagazione dell'incertezza a partire da misure dirette statisticamente indipendenti. Il caso di misure non indipendenti è più complesso; ce ne occuperemo in modo non esaustivo al § 4.6.E.

## B) Dipendenza lineare di $Q$ da $X, Y, \dots$

La propagazione dell'incertezza è particolarmente semplice se la relazione che lega la grandezza  $Q$  alle grandezze  $X, Y, Z, \dots$  (misurate direttamente) è di tipo lineare, cioè esprimibile nella forma generale

$$Q = a + bX + cY + dZ \dots \quad (4.6.1)$$

dove  $a, b, c, d, \dots$  sono coefficienti costanti.

Alla forma generale (4.6.1) sono riconducibili i casi notevoli

$$\begin{aligned} Q &= X + Y && \text{(addizione),} \\ Q &= X - Y && \text{(sottrazione),} \\ Q &= bX && \text{(diretta proporzionalità).} \end{aligned}$$

Se la relazione che lega  $Q$  a  $X, Y, Z, \dots$  è lineare, la media e lo scarto tipo dei valori di  $Q$  sono facilmente ricavabili a partire dalle medie e dagli scarti tipo dei valori di  $X, Y, Z, \dots$  sfruttando alcune proprietà generali delle distribuzioni di probabilità.

Un teorema della teoria delle probabilità afferma infatti che, se vale l'eq. (4.6.1), allora il valor medio  $\mathbf{m}[Q]$  è legato alle medie di  $X, Y, Z, \dots$  dalla relazione

$$\mathbf{m}[Q] = a + b\mathbf{m}[X] + c\mathbf{m}[Y] + d\mathbf{m}[Z] + \dots \quad (4.6.2)$$

Se inoltre le misure di  $X, Y, Z, \dots$  sono *statisticamente indipendenti*, un ulteriore teorema afferma che la varianza  $\mathbf{D}[Q]$  è legata alle varianze di  $X, Y, Z, \dots$  dalla relazione

$$\mathbf{D}[Q] = b^2 \mathbf{D}[X] + c^2 \mathbf{D}[Y] + d^2 \mathbf{D}[Z] + \dots \quad (4.6.3)$$

da cui si ricava la relazione relativa allo scarto tipo  $\sigma[Q]$ :

$$\sigma[Q] = \sqrt{b^2 \mathbf{D}[X] + c^2 \mathbf{D}[Y] + d^2 \mathbf{D}[Z] + \dots} \quad (4.6.4)$$

Pertanto, ricordando che il valore centrale di una misura è espresso dalla media della corrispondente distribuzione, dall'eq. (4.6.2) si ricava

$$Q_0 = a + bX_0 + cY_0 + dZ_0 + \dots \quad (4.6.5)$$

Dalle eq. (4.6.3) e (4.6.4), ricordando che l'incertezza di una misura è espressa dallo scarto tipo della corrispondente distribuzione, si ricava

$$(\delta Q)^2 = b^2 (\delta X)^2 + c^2 (\delta Y)^2 + \dots \quad \delta Q = \sqrt{b^2 (\delta X)^2 + c^2 (\delta Y)^2 + \dots} \quad (4.6.6)$$

In altri termini, l'incertezza  $\delta Q$  si calcola *sommando quadraticamente* le incertezze  $\delta X, \delta Y, \dots$  pesate dai rispettivi coefficienti  $b^2, c^2, \dots$

*Nota:* È facile rendersi conto che la *somma quadratica* di due numeri è sempre minore della loro *somma diretta*:  $\sqrt{s^2 + t^2} < s + t$ . Basta considerare un triangolo rettangolo di cateti  $s$  e  $t$ : la somma dei cateti  $s + t$  è sempre maggiore dell'ipotenusa  $\sqrt{s^2 + t^2}$ .

*Esempio:* Al § 4.5.H, eq. (4.5.12), abbiamo introdotto la **media pesata**:

$$X_w = \frac{\sum_i X_i w_i}{\sum_i w_i}, \quad \delta X_w = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}, \quad \text{con} \quad w_i = \frac{1}{(\delta X_i)^2}.$$

Siamo ora in grado di dare una giustificazione per l'espressione dell'incertezza  $\delta X_w$ . È facile rendersi conto che l'espressione della media pesata  $X_w$  è una combinazione lineare dei valori  $X_i$ , con coefficienti  $w_i/\sum w_i$ , riconducibile alla forma dell'eq. (4.6.1), con  $Q \equiv X_w$ . Applicando l'eq. (4.6.6) e ricordando che  $w_i = 1/(\delta X_i)^2$ , si ottiene

$$(\delta X_w)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i^2 (\delta X_i)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i = \frac{1}{\sum w_i}.$$

Vediamo ora in concreto l'applicazione delle eq. (4.6.5) e (4.6.6) ad alcuni casi notevoli particolarmente semplici.

**Addizione di grandezze:**  $Q = X + Y$

Nel caso di un'addizione,  $Q = X + Y$ , le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = X_0 + Y_0 \quad (\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 \quad (4.6.7)$$

È immediata la generalizzazione delle eq. (4.6.7) al caso di addizione di più di due grandezze.

*Esempio 1:* Si vuole misurare la pressione  $P$  di un gas contenuto in un recipiente a tenuta. Allo scopo si hanno a disposizione due strumenti: un manometro che consente di misurare la pressione relativa del gas rispetto all'atmosfera,  $P_{\text{rel}}$ , ed un barometro che consente di misurare la pressione atmosferica,  $P_{\text{atm}}$ . Le due misure sono statisticamente indipendenti, ed i relativi valori sono:  $P_{\text{rel}} = (0.475 \pm 0.004)$  bar e  $P_{\text{atm}} = (0.988 \pm 0.002)$  bar. La pressione del gas è  $P = P_{\text{rel}} + P_{\text{atm}}$ . Usando le eq. (4.6.7) si ottiene  $P_0 = (0.475 + 0.998) = 1.473$  bar,  $\delta P = [(\delta P_{\text{rel}})^2 + (\delta P_{\text{atm}})^2]^{1/2} = 0.0044$  bar.

*Esempio 2:* Al §4.5.D abbiamo suggerito di addizionare quadraticamente le incertezze di una stessa misura dovute a cause diverse (eq. 4.5.6). Questa procedura è giustificata, se le cause di incertezza sono statisticamente indipendenti, dalla seconda delle eq. (4.6.7). Supponiamo di avere una misura  $X_0 \pm \delta X_a$ ; tenere conto di un'ulteriore incertezza indipendente  $\delta X_b$  equivale formalmente ad addizionare a  $X_0 \pm \delta X_a$  la quantità  $0 \pm \delta X_b$ .

**Sottrazione di due grandezze:**  $Q = X - Y$

Nel caso di sottrazione,  $Q = X - Y$ , le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = X_0 - Y_0 \quad (\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 \quad (4.6.8)$$

In altri termini, i valori centrali si sottraggono, ma le incertezze si sommano quadraticamente come nel caso dell'addizione.

*Esempio:* Si vuole misurare la massa d'acqua  $m$  contenuta in un calorimetro. Allo scopo si pesa preventivamente il calorimetro vuoto, ottenendo un valore di massa  $m_c = (257.3 \pm 0.1)$  g; successivamente si pesa il calorimetro con l'acqua, ottenendo un valore di massa totale  $m_t = (298.5 \pm 0.1)$  g. La massa netta dell'acqua è  $m_0 = 298.5 - 257.3 = 41.2$  g. L'incertezza è  $\delta m = [(0.1)^2 + (0.1)^2]^{1/2} = 0.14$  g.

Si faccia attenzione alla sottrazione tra valori  $X_0$  e  $Y_0$  molto simili: la differenza può essere confrontabile o inferiore all'incertezza. Ad esempio,  $(251 \pm 1) - (250 \pm 1) = 1 \pm 1.4$ .

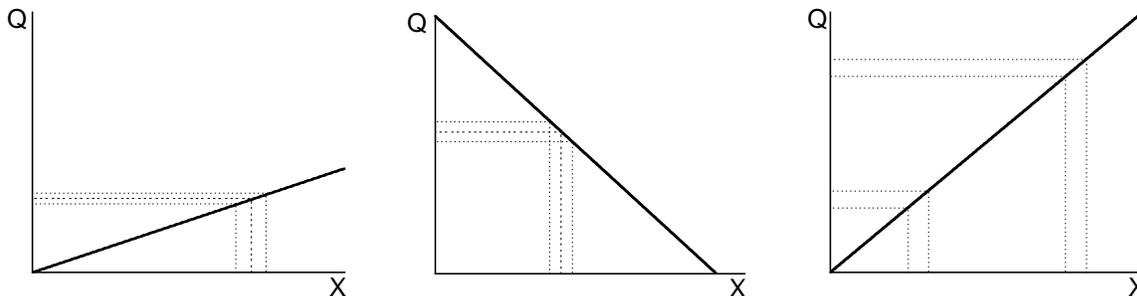
**Diretta proporzionalità:**  $Q = bX$

Nel caso di diretta proporzionalità,  $Q = bX$ , le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = bX_0 \quad \delta Q = |b| \delta X \quad (4.6.9)$$

*Esempio:* La lunghezza d'onda  $\lambda$  ed il periodo  $\mathcal{T}$  di un'onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto sono legati dalla relazione  $\lambda = c\mathcal{T}$ , dove  $c$ , la velocità della luce nel vuoto, è una costante esatta. L'incertezza  $\delta\mathcal{T}$  sul periodo si propaga alla lunghezza d'onda come  $\delta\lambda = c\delta\mathcal{T}$ .

Cerchiamo di approfondire il significato dell'eq. (4.6.9). Nel caso di diretta proporzionalità,  $Q = bX$ , il coefficiente  $b$  è la derivata di  $Q$  rispetto ad  $X$ :  $b = dQ/dX$ , costante per tutti i valori di  $X$ . Graficamente (Fig. 4.11)  $b$  è la pendenza della retta che rappresenta la funzione  $Q = bX$ . La propagazione dell'incertezza da  $X$  a  $Q$  dipende dalla pendenza della retta, cioè dal coefficiente di proporzionalità.



**Fig. 4.11** – Illustrazione grafica della propagazione dell'incertezza nel caso della diretta proporzionalità:  $Q = bX$ . L'incertezza  $\delta Q$  dipende dall'incertezza  $\delta X$  e dalla pendenza  $b$  della retta:  $\delta Q = |a|\delta X$  (a sinistra e al centro). L'incertezza  $\delta Q$  non dipende invece, nel caso di diretta linearità, dal valore  $X_0$  (a destra).

### C) $Q$ funzione non lineare di una sola variabile $X$

Se la relazione che lega  $Q$  a  $X, Y, Z, \dots$  non è lineare, cioè non è riconducibile all'eq. (4.6.1), il problema del calcolo del valore centrale  $Q_0$  e dell'incertezza  $\delta Q$  è molto più complesso, e può essere risolto solo in maniera approssimata.

Per meglio comprendere la natura delle difficoltà e la filosofia della soluzione, consideriamo il caso più semplice possibile, cioè una relazione non lineare  $Q = f(X)$  tra  $Q$  ed una sola grandezza  $X$  misurata direttamente. Supponiamo di conoscere, per misurazione diretta,  $X_0 \pm \delta X$ . Vogliamo esprimere anche il valore di  $Q$  nella forma  $Q_0 \pm \delta Q$ . Possiamo porre semplicemente  $Q_0 = f(X_0)$ ? E come si calcola  $\delta Q$  a partire da  $\delta X$ ?

Per chiarire le idee, consideriamo prima il caso particolare  $Q = \beta X^2$ .

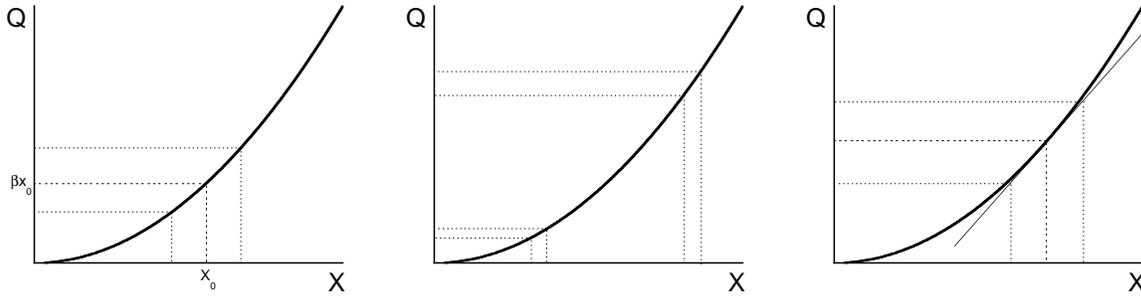
*Esempio:* Si misura direttamente il diametro  $2R$  di un cilindro e si ricava il valore del raggio  $R_0 \pm \delta R$ . A questo punto si può misurare indirettamente la sezione  $S$  del cilindro, mediante la relazione  $S = \pi R^2$ . Come si esprimerà il valore della sezione nella forma standard  $S_0 \pm \delta S$ ?

Il grafico della funzione  $Q = \beta X^2$  è una parabola (Fig. 4.12). Consideriamo un generico valore  $X_0$  e l'intervallo di incertezza di valore  $2\delta X$  centrato su  $X_0$ . È facile costruire graficamente l'intervallo di incertezza  $2\delta Q$ ; il suo calcolo analitico è invece piuttosto brigosio. È facile anche verificare che il valore  $Q_0$ , centro dell'intervallo di incertezza  $2\delta Q$ , non corrisponde ad  $\beta X_0^2$  (Fig. 4.12, a sinistra). Infine, la medesima incertezza  $\delta X$  corrisponde ad incertezze  $\delta Q$  diverse al variare di  $X_0$  (Fig. 4.12, al centro).

Torniamo ora al caso generico  $Q = f(X)$ .

Il calcolo di  $Q_0$  e dell'incertezza  $\delta Q$  viene notevolmente semplificato se si opera in *approssimazione di linearità locale*, ovvero se si sostituisce la funzione  $f(X)$ , nell'intervallo di incertezza  $2\delta X$ , con una retta  $Q = a + BX$  tangente alla curva della funzione  $f(X)$  nel punto di ascissa  $X_0$  (Fig. 4.12, a destra):

$$Q = f(X) \quad \rightarrow \quad Q = a + bX. \quad (4.6.10)$$



**Fig. 4.12** – Illustrazione grafica della propagazione dell'incertezza nel caso  $Q = \beta X^2$ . A sinistra: il centro  $Q_0$  dell'intervallo di incertezza  $2\delta Q$  non corrisponde ad  $\beta X_0^2$ . Al centro: a parità di  $\delta X$ ,  $\delta Q$  varia al variare di  $X_0$ . A destra: linearizzazione locale della funzione  $Q = \beta X^2$ .

In questo modo ci si può ricondurre, seppure localmente ed in forma approssimata, al caso della diretta proporzionalità, eq. (4.6.9). Più precisamente, il valore centrale  $Q_0$  sarà dato da  $f(X_0)$ , e l'incertezza  $\delta Q$  da  $|b| \delta X$ , dove ora  $b$  è la derivata prima di  $Q$  rispetto a  $X$ , calcolata in  $X_0$ :

$$Q_0 \simeq f(X_0) \quad \delta Q \simeq \left| \frac{dQ}{dX} \right|_0 \delta X. \quad (4.6.11)$$

(L'indice 0 indica, in modo sintetico, che la derivata prima va calcolata in corrispondenza di  $X = X_0$ ).

*Esempio:* Riprendiamo l'esempio precedente del raggio e della sezione di un cilindro. Supponiamo di avere misurato, con la stessa incertezza  $\delta R = 0.01$  mm, il raggio di due cilindri diversi.

Il primo cilindro ha un raggio  $R = (0.5 \pm 0.01)$  mm. Applicando le eq. (4.6.11) si trova che la sezione è  $S = \pi R^2 = (0.78 \pm 0.03)$  mm<sup>2</sup>.

Il secondo cilindro ha un raggio  $R = (5 \pm 0.01)$  mm. Applicando le eq. (4.6.11) si trova che la sezione è  $S = \pi R^2 = (78.5 \pm 0.3)$  mm<sup>2</sup>.

Nonostante le incertezze su  $R$  siano uguali, l'incertezza assoluta  $\delta S$  sulla sezione è dieci volte maggiore nel secondo caso che nel primo (l'incertezza relativa è invece dieci volte inferiore !)

L'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto più piccola è l'incertezza  $\delta X$  rispetto al valore centrale  $X_0$ .

**Elevamento a potenza:**  $Q = X^n$

Consideriamo il caso particolare che la funzione  $Q = f(x)$  sia un elevamento a potenza:  $Q = X^n$ . In questo caso, applicando le regole date nelle equazioni (4.6.11), si trova

$$Q_0 \simeq X_0^n \quad \delta Q \simeq n |X_0^{n-1}| \delta X, \quad \text{cioè} \quad \frac{\delta Q}{|Q_0|} \simeq n \frac{\delta X}{|X_0|}. \quad (4.6.12)$$

In altri termini, l'incertezza relativa della grandezza  $Q$  è  $n$  volte l'incertezza relativa della grandezza  $X$ .

## D) Formula generale per la propagazione dell'incertezza

Siamo ora in grado di affrontare il problema del calcolo del valore centrale  $Q_0$  e dell'incertezza  $\delta Q$  nel caso generale  $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ .

Per semplificare la trattazione senza perdere comunque di generalità, consideriamo il caso di due sole grandezze misurate direttamente:  $Q = f(X, Y)$ . Ad esempio,  $Q = XY$  oppure  $Q = X/Y$ .

*Esempio 1:* Si misura la lunghezza di due lati,  $a$  e  $b$ , di un rettangolo e si calcola la superficie  $S = ab$ .

*Esempio 2:* Si misurano direttamente la differenza di potenziale elettrico  $V$  applicata ad un resistore e la corrente elettrica  $I$  che lo percorre. Il valore della resistenza  $R$  può essere ricavato dalla legge di Ohm:  $R = V/I$ .

Anche in questo caso, come nel caso più semplice di una sola variabile  $Q = f(X)$ , la soluzione approssimata al problema del calcolo di  $Q_0$  e  $\delta Q$  si basa sulla *linearizzazione locale* della funzione  $f(X, Y)$  in un intorno dei valori centrali  $X_0$  e  $Y_0$ , in modo da sostituire localmente la superficie  $f(X, Y)$  con il piano tangente alla superficie nel punto di coordinate  $(X_0, Y_0)$ :

$$Q = f(X, Y) \quad \rightarrow \quad Q = a + bX + cY. \quad (4.6.13)$$

I coefficienti  $b$  e  $c$  dell'eq. (4.6.13) corrispondono alle *derivate parziali prime* di  $Q$  rispetto a  $X$  e  $Y$ , calcolate per  $X = X_0$  e  $Y = Y_0$ :

$$b = \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0 \quad c = \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0; \quad (4.6.14)$$

*Nota:* Data una funzione di più variabili  $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ , la derivata parziale prima di  $Q$  rispetto ad una qualsiasi variabile, ad es.  $X$ , si calcola come una normale derivata, considerando le altre variabili come parametri costanti. Nell'eq. (4.6.14) l'indice 0 significa che le derivate vanno calcolate per  $X = X_0$  e  $Y = Y_0$ .

Il problema può ora venire ancora ricondotto, seppure localmente ed in modo approssimato, al caso lineare del § 4.6.B. Se, come abbiamo finora supposto, le grandezze  $X$  e  $Y$  sono *statisticamente indipendenti*, allora

$$Q_0 \simeq f(X_0, Y_0); \quad (\delta Q)^2 \simeq \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2. \quad (4.6.15)$$

In altri termini, l'incertezza  $\delta Q$  si ottiene dalla somma quadratica delle incertezze  $\delta X$  e  $\delta Y$ , ciascuna pesata per la corrispondente derivata parziale.

La generalizzazione al caso di più di due grandezze misurate direttamente,  $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ , è immediata:

$$(\delta Q)^2 \simeq \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Z} \right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots \quad (4.6.16)$$

Ancora possiamo osservare che l'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto più piccole sono le incertezze rispetto ai valori centrali.

Vediamo ora in concreto l'applicazione dell'eq. (4.6.16) ad alcuni casi particolarmente significativi.

#### Moltiplicazione di due grandezze: $Q = XY$

Nel caso di una moltiplicazione,  $Q = XY$ , il valore centrale sarà approssimato da

$$Q_0 \simeq X_0 Y_0. \quad (4.6.17)$$

Per quanto riguarda l'incertezza, applicando l'eq. (4.6.15),

$$(\delta Q)^2 \simeq \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 = Y_0^2 (\delta X)^2 + X_0^2 (\delta Y)^2. \quad (4.6.18)$$

L'eq. (4.6.18) assume una forma più facile da ricordare se si dividono i membri dell'equazione per  $Q_0^2 = X_0^2 Y_0^2$ :

$$\left( \frac{\delta Q}{Q_0} \right)^2 \simeq \left( \frac{\delta X}{X_0} \right)^2 + \left( \frac{\delta Y}{Y_0} \right)^2. \quad (4.6.19)$$

L'*incertezza relativa* su  $Q$  è la somma quadratica delle incertezze relative su  $X$  e  $Y$ .

#### Divisione tra due grandezze: $Q = X/Y$

Nel caso di una divisione,  $Q = X/Y$ , il valore centrale sarà approssimato da

$$Q_0 \simeq X_0/Y_0. \quad (4.6.20)$$

Per quanto riguarda l'incertezza, applicando l'eq. (4.6.15),

$$(\delta Q)^2 \simeq \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 = \frac{1}{Y_0^2} (\delta X)^2 + \frac{X_0^2}{Y_0^4} (\delta Y)^2. \quad (4.6.21)$$

L'eq. (4.6.21) assume una forma più facile da ricordare se si dividono i membri dell'equazione per  $Q_0^2 = X_0^2/Y_0^2$ :

$$\left( \frac{\delta Q}{Q_0} \right)^2 \simeq \left( \frac{\delta X}{X_0} \right)^2 + \left( \frac{\delta Y}{Y_0} \right)^2. \quad (4.6.22)$$

Anche nel caso della divisione, quindi, l'incertezza relativa su  $Q$  è la somma quadratica delle incertezze relative su  $X$  e  $Y$ .

### E) Caso di misure dirette statisticamente non indipendenti

Le procedure di propagazione dell'incertezza che abbiamo finora studiato si riferiscono a misure dirette statisticamente indipendenti. Non sempre però la condizione di indipendenza è verificata.

Per capire quale può essere la differenza, nella procedura di propagazione, tra misure statisticamente indipendenti e non, consideriamo due esempi molto semplici.

*Esempio 1:* Si vuole misurare il perimetro  $P$  di un quadrato. Allo scopo si misura direttamente il lato  $a$ , ottenendo  $a_0 \pm \delta a$ . Consideriamo ora due diverse procedure per calcolare l'incertezza su  $P$ .

La procedura più semplice consiste nel calcolare il perimetro come  $P = 4a$ . Utilizzando l'eq. (4.6.9) si ottiene quindi  $\delta P = 4 \delta a$ .

Una seconda procedura consiste nel calcolare il perimetro come  $P = a+a+a+a$ . Può sembrare logico, a questo punto, applicare la formula (4.6.7) e calcolare l'incertezza su  $P$  mediante somma quadratica:  $(\delta P)^2 = 4 (\delta a)^2$ , per cui  $\delta P = 2 \delta a$ . Una riflessione più attenta mostra che questa seconda procedura è sbagliata: non si può infatti utilizzare l'eq. (4.6.7), in quanto le quattro grandezze che vengono sommate sono *identiche*, e quindi statisticamente *non* indipendenti.

*Esempio 2:* Si vuole misurare l'area della superficie  $S$  di un quadrato. Allo scopo si misura direttamente il lato  $a$ , come nell'esempio precedente, ottenendo  $a_0 \pm \delta a$ . Consideriamo ancora due diverse procedure per calcolare l'incertezza su  $S$ .

La procedura più semplice consiste nel calcolare l'area come  $S = a^2$ . Utilizzando l'eq. (4.6.11) si ottiene quindi  $\delta S = 2a \delta a$ .

Una seconda procedura consiste nel calcolare l'area come  $S = a \cdot a$ . Utilizzando l'eq. (4.6.18) si ottiene  $(\delta S/S)^2 = 2 (\delta a/a)^2$ , per cui  $\delta S = \sqrt{2} a \delta a$ . Anche in questo caso, una riflessione più attenta mostra che la seconda procedura è sbagliata: non si può infatti utilizzare l'eq. (4.6.18), in quanto le due grandezze che vengono moltiplicate tra loro sono *identiche*, e quindi statisticamente *non* indipendenti.

Questi due semplici esempi mostrano che le formule di propagazione dell'incertezza basate sulle somme quadratiche non sono corrette se le misure dirette non sono statisticamente indipendenti.

La propagazione dell'incertezza nel caso in cui le misure dirette non siano statisticamente indipendenti non è tuttavia suscettibile di una trattazione semplice, se non altro perché il grado di dipendenza statistica può variare da caso a caso. Si può comunque dimostrare che esiste un *limite superiore* all'incertezza di una grandezza misurata indirettamente, qualunque sia il grado di dipendenza statistica delle misure dirette. Al § 7.7 dimostreremo che, se  $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ , l'incertezza su  $Q$  non può superare il valore

$$(\delta Q)_{\max} \simeq \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_0 \delta Y + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \right|_0 \delta Z + \dots \quad (4.6.23)$$

## F) Riepilogo

Nei precedenti sotto-paragrafi abbiamo introdotto le regole fondamentali per la propagazione dell'incertezza, partendo dai casi più semplici per arrivare alla fine alla formula più generale.

Vogliamo ora riassumere in modo sintetico i risultati ottenuti.

Innanzitutto è bene ricordare che le considerazioni svolte in questo paragrafo valgono solo se le incertezze sono espresse come scarti tipo di opportune distribuzioni.

Se le misure dirette sono **statisticamente indipendenti**, l'incertezza sulla misura indiretta di  $Q(X, Y, Z, \dots)$  può essere calcolata con la formula generale (4.6.16):

$$\delta Q \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots} \quad (4.6.24)$$

Se la funzione  $Q(X, Y, Z, \dots)$  è *lineare*, cioè  $Q = aX + bY + cZ + \dots$ , allora l'eq. (4.6.24) è esatta; è facile verificare che l'eq. (4.6.24) è in tal caso equivalente alla (4.6.6).

Nei casi particolari di *addizione* e *sottrazione*,  $Q = X + Y$  e  $Q = X - Y$ , la propagazione dell'incertezza si riduce all'addizione quadratica delle incertezze assolute, eq. (4.6.7) e (4.6.8).

Se la funzione  $Q(X, Y, X, \dots)$  è *non lineare*, allora l'eq. (4.6.24) è approssimata: l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccole sono le incertezze  $\delta X, \delta Y, \dots$  rispetto ai valori centrali  $X_0, Y_0, \dots$ .

Nei casi particolari di *moltiplicazione* e *divisione*, la propagazione dell'incertezza si riduce all'addizione quadratica delle incertezze relative, eq. (4.6.19) e (4.6.22).

Nel caso di elevamento a potenza,  $Q = X^n$ , l'incertezza relativa su  $Q$  è  $n$  volte l'incertezza relativa su  $X$ , eq. (4.6.12).

Se le misure dirette sono **statisticamente non indipendenti**, l'eq. (4.6.24) non è più giustificata. Si può dimostrare che l'incertezza su  $Q$  non può comunque superare il valore massimo dato dall'eq. (4.6.23):

$$(\delta Q)_{\max} \simeq \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_0 \delta Y + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \right|_0 \delta Z + \dots \quad (4.6.25)$$

## 4.7 – Correlazione tra grandezze fisiche

La misurazione di *singole grandezze*, di cui ci siamo finora occupati, è molto importante in campo sia scientifico che tecnologico. Per quanto riguarda la Fisica, è incessante lo sforzo per ridurre l'incertezza con cui sono note le cosiddette *costanti fondamentali*: ad es. la massa e la carica elettrica dell'elettrone, il numero di Avogadro, etc. (si veda anche l'Appendice D.2).

La ricerca scientifica richiede però soprattutto la misurazione contemporanea di *due o più grandezze*, alla ricerca di relazioni analitiche tra i loro valori che possano essere assunte come *leggi*.

*Esempio 1:* La misurazione della corrente elettrica  $I$  che scorre in un conduttore metallico al variare della differenza di potenziale  $V$  porta a riconoscere che le due grandezze sono tra di loro proporzionali (legge di Ohm).

*Esempio 2:* Consideriamo un gas rarefatto (buona approssimazione di un *gas ideale*). È possibile misurare il volume  $V$  in funzione della temperatura  $T$  a pressione  $P$  costante; oppure la pressione  $P$  in funzione della temperatura  $T$  a volume  $V$  costante; oppure ancora la pressione  $P$  in funzione del volume  $V$  a temperatura  $T$  costante. In tutti i casi si trovano delle correlazioni tra le grandezze misurate, che possono essere globalmente sintetizzate nella cosiddetta *equazione di stato* dei gas ideali:  $pV = nRT$ , dove  $n$  è il numero di moli, e  $R$  una costante, detta "costante dei gas".

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che qualsiasi misura di una grandezza fisica è affetta da incertezza. È facile rendersi conto che l'incertezza delle misure gioca un ruolo molto importante anche quando si è alla ricerca di correlazioni tra due o più grandezze fisiche e si vuole esprimere una eventuale correlazione sotto forma di una relazione analitica. L'incertezza delle singole misure si riflette necessariamente in un'incertezza nella relazione analitica tra le grandezze.

Questo paragrafo è dedicato all'introduzione di alcune tecniche utili per riconoscere l'esistenza di una correlazione tra due grandezze fisiche ed esprimerla sotto forma di relazione analitica, tenendo conto delle incertezze di misura. Gli argomenti trattati in questo paragrafo verranno approfonditi nel Cap. 7.

## A) Tabelle e grafici: correlazione tra grandezze

Consideriamo due grandezze fisiche  $X$  e  $Y$ . Misuriamo  $\mathcal{N}$  valori *diversi* della grandezza  $X$ , e per ciascun valore valutiamo l'incertezza. In corrispondenza ad ogni valore di  $X$ , misuriamo un valore della grandezza  $Y$ , valutandone l'incertezza. Otterremo così  $\mathcal{N}$  coppie di valori

$$x_i \pm \delta x_i \quad y_i \pm \delta y_i \quad (i = 1 \dots \mathcal{N}).$$

*Esempio 1:* Un gruppo di  $\mathcal{N}$  persone viene sottoposto ad una visita medica. Per ogni persona si misurano sia la statura  $h_i \pm \delta h_i$  che la massa  $m_i \pm \delta m_i$  ( $i = 1 \dots \mathcal{N}$ .)

*Esempio 2:* Abbiamo a disposizione una molla elicoidale fissata per un estremo ad un supporto fisso. Sollecitiamo l'altro estremo della molla con una forza variabile. Per ogni valore  $F_i \pm \delta F_i$  della forza misuriamo la corrispondente deformazione  $y_i \pm \delta y_i$  della molla.

*Esempio 3:* Facciamo oscillare un pendolo variando la sua distanza  $\ell$  dal punto di sospensione. Per ogni valore della lunghezza  $\ell_i \pm \delta \ell_i$  misuriamo il corrispondente valore del periodo di oscillazione  $T_i \pm \delta T_i$ .

Le coppie di valori possono essere elencate in modo sintetico mediante una tabella (vedi Appendice A.2). Un modo più efficiente per identificare e studiare eventuali correlazioni tra i valori delle grandezze  $X$  e  $Y$  è costituito dal grafico. Le coppie di valori  $(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i)$  possono venire rappresentate in un diagramma cartesiano: le coppie di valori centrali  $(x_i, y_i)$  sono rappresentate da punti, le incertezze  $\delta x_i$  e  $\delta y_i$  da barre d'errore, rispettivamente orizzontali e verticali. (Maggiori dettagli sull'uso dei grafici sono forniti in Appendice A.3).

La Fig. 4.13 mostra tre grafici relativi ai tre esempi fatti sopra.

Nel primo caso (masse e stature, grafico di sinistra) i punti sono molto dispersi; è tuttavia possibile riconoscere una vaga correlazione tra massa e statura: al crescere della statura, mediamente cresce anche la massa. Studieremo al § 7.8 una procedura che consente di valutare, in base a considerazioni di natura probabilistica, il grado di correlazione in situazioni di questo tipo.

Negli altri due casi (caso della molla, al centro, e caso del pendolo, a destra) non solo è immediato riconoscere che esiste una correlazione tra le due grandezze rappresentate sugli assi  $x$  e  $y$ , ma è anche ragionevole ipotizzare che le due grandezze siano collegate da una relazione funzionale  $y = f(x)$ , esprimibile in forma analiticamente semplice. Nel caso della molla (grafico di centro) è evidente una relazione di diretta proporzionalità,  $y = Bx$ . Nel seguito di questo paragrafo 4.7 ci occuperemo dei casi di diretta proporzionalità. Nel § 7.5 invece ci occuperemo di relazioni funzionali di tipo più generale (come ad esempio quella del grafico di destra nella Fig. 4.13).

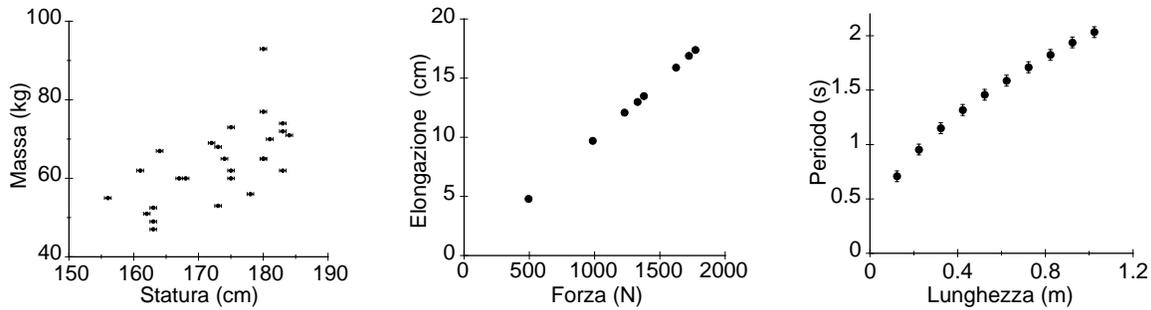
## B) Relazioni lineari

Supponiamo che l'osservazione di un grafico ci porti a ritenere plausibile una relazione lineare tra le due grandezze  $X$  e  $Y$ :

$$Y = A + BX. \quad (4.7.1)$$

È il caso, ad esempio, del grafico centrale della Fig. 4.13. Si presentano allora due problemi:

- a) Determinare i parametri  $A$  e  $B$  della retta  $Y = A + BX$  che meglio interpreta globalmente i punti sperimentali. Affronteremo questo problema in modo grafico già in questo § 4.7.B e in modo analitico nel §§ 4.7.C e 4.7.D.



**Fig. 4.13** – Correlazione tra grandezze fisiche (con riferimento ai tre esempi del testo). A sinistra: massa in funzione della statura di un gruppo di persone. Al centro: elongazione di una molla in funzione della forza applicata. A destra: periodo di oscillazione di un pendolo in funzione della lunghezza. Le barre d'incertezza, quando non compaiono esplicitamente, sono minori delle dimensioni dei simboli.

- b) Valutare il grado di affidabilità dell'ipotesi che i punti sperimentali siano interpretabili mediante una legge lineare. Inizieremo ad affrontare questo problema al § 4.7.F, rimandando al § 7.6 una trattazione più approfondita.

Una valutazione attendibile dei parametri  $A$  e  $B$  della retta  $Y = A + BX$  e dell'ordine di grandezza delle rispettive incertezze  $\delta A$  e  $\delta B$  può spesso essere ottenuta con il seguente *metodo grafico*.

Si traccino le rette di massima e minima pendenza compatibili con le croci di incertezza dei punti sperimentali (Fig. 4.14). Le due rette avranno equazioni

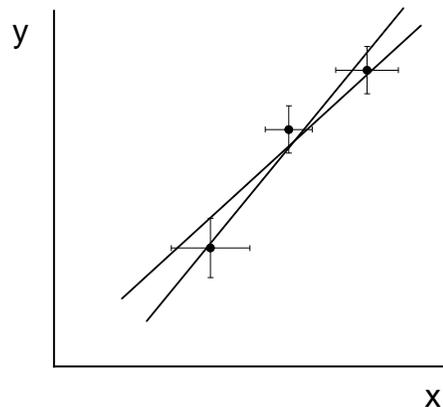
$$Y = A_1 + B_1 X, \quad Y = A_2 + B_2 X. \quad (4.7.2)$$

È plausibile assumere per i parametri  $A$  e  $B$  i valori medi

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad (4.7.3)$$

e valutare le relative incertezze mediante le relazioni approssimate

$$\delta A \simeq \frac{|A_1 - A_2|}{2}, \quad \delta B \simeq \frac{|B_1 - B_2|}{2}. \quad (4.7.4)$$



**Fig. 4.14** – Rette di massima e minima pendenza compatibili con le croci di incertezza.

### C) Regressione lineare

Una procedura efficiente per calcolare *in modo analitico* i coefficienti  $A$  e  $B$  della retta  $A + BX$  è costituita dalla *regressione lineare* basata sul *metodo dei minimi quadrati*. La procedura si basa sulla ricerca dei parametri  $A$  e  $B$  che rendono minima la discrepanza globale tra punti sperimentali  $(x_i, y_i)$  e retta  $Y = A + BX$ , tenendo conto dell'incertezza di ogni singolo punto.

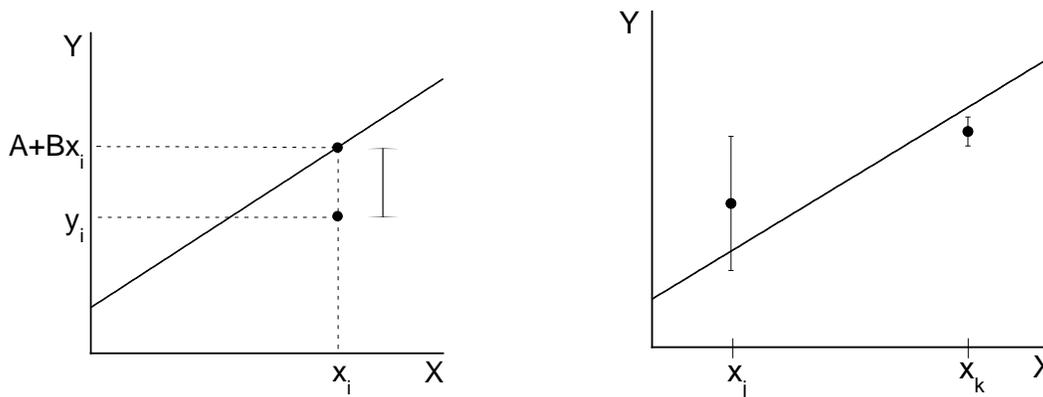
Per ogni punto, la discrepanza viene misurata lungo l'asse  $y$ , considerando il quadrato della differenza tra le ordinate del punto e della retta (Fig. 4.15, a sinistra):

$$(y_i - A - Bx_i)^2. \quad (4.7.5)$$

Il metodo dei minimi quadrati tiene conto solo delle incertezze  $\delta y_i$  sulla variabile  $Y$ . (Supponiamo, per il momento, che le incertezze  $\delta x_i$  siano trascurabili; vedremo più avanti come è possibile tener conto anche delle incertezze  $\delta x_i$ .) Per ogni punto, la discrepanza espressa dall'eq. (4.7.5) viene divisa per l'incertezza  $(\delta y_i)^2$ , ovvero moltiplicata per il *peso*  $w_i = 1/(\delta y_i)^2$ . Ciò che conta, per ogni punto, non è quindi la discrepanza assoluta (4.7.5), bensì la discrepanza commisurata all'incertezza  $\delta y_i$  (Fig. 4.15, a destra). La discrepanza globale tra retta e punti sperimentali è misurata dalla sommatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i [y_i - A - Bx_i]^2. \quad (4.7.6)$$

La sommatoria viene convenzionalmente indicata con il simbolo  $\chi^2$  (leggi *chi quadrato*), cioè con il quadrato della lettera greca  $\chi$  (nomi e simboli di tutte le lettere dell'alfabeto greco sono riportate nella prima tabella dell'Appendice D). Poichè i valori  $x_i, y_i, \delta y_i$  sono noti, la grandezza  $\chi^2$  è funzione solo delle due variabili  $A$  e  $B$ . Si tratta quindi di determinare analiticamente i valori di  $A$  e  $B$  che rendono minima la grandezza  $\chi^2$ .



**Fig. 4.15** – A sinistra: discrepanza tra i valori in ordinata del punto e della retta in corrispondenza dell'ascissa  $x_i$ . A destra: la discrepanza assoluta è maggiore per il punto di ascissa  $x_j$  che per il punto di ascissa  $x_k$ ; la discrepanza commisurata all'incertezza è invece minore per il punto di ascissa  $x_j$  che per il punto di ascissa  $x_k$ .

Affrontiamo prima un caso particolare, quello della **diretta proporzionalità**

$$Y = BX. \quad (4.7.7)$$

In questo caso la discrepanza globale tra retta e punti sperimentali è misurata dalla sommatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i [y_i - Bx_i]^2. \quad (4.7.8)$$

La grandezza  $\chi^2$  è funzione della sola variabile  $B$ . Condizione necessaria affinché  $\chi^2$  sia minimo è che sia nulla la derivata prima rispetto a  $B$ :

$$\frac{d\chi^2}{dB} = 0. \quad (4.7.9)$$

È facile verificare che l'eq. (4.7.9) è soddisfatta per

$$B = \frac{\sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i w_i x_i^2} \quad (4.7.10)$$

e che il valore  $B$  così determinato individua un punto di minimo, e non di massimo o di flesso. Se le incertezze  $\delta y_i$  sono tutte uguali, e quindi sono uguali i pesi  $w_i$ , l'eq. (4.7.10) si semplifica in

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}. \quad (4.7.11)$$

Torniamo ora al **caso generale della linearità**

$$Y = A + B X. \quad (4.7.12)$$

La grandezza  $\chi^2$ , eq. (4.7.6), è ora funzione di *due variabili*,  $A$  e  $B$ . Condizione necessaria perché  $\chi^2$  sia minimo è che siano nulle le sue *derivate parziali prime* rispetto ad  $A$  e  $B$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sum_i w_i) A + (\sum_i w_i x_i) B = \sum_i w_i y_i \\ (\sum_i w_i x_i) A + (\sum_i w_i x_i^2) B = \sum_i w_i x_i y_i \end{cases} \quad (4.7.13)$$

Si ottiene così un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite  $A$  e  $B$ , la cui soluzione dà

$$A = \frac{(\sum_i w_i x_i^2) (\sum_i w_i y_i) - (\sum_i w_i x_i) (\sum_i w_i x_i y_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.14)$$

$$B = \frac{(\sum_i w_i) (\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i y_i) (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.15)$$

$$\text{dove } \Delta_w = \left( \sum_i w_i \right) \left( \sum_i w_i x_i^2 \right) - \left( \sum_i w_i x_i \right)^2. \quad (4.7.16)$$

È facile rendersi conto che i valori  $A$  e  $B$  così determinati individuano un minimo di  $\chi^2$ .

Nel caso in cui le incertezze sulle misure di  $Y$  siano tutte uguali, il peso  $w_i = w$  può essere semplificato nelle eq. (4.7.14-16) e si ottengono le relazioni

$$A = \frac{(\sum_i x_i^2) (\sum_i y_i) - (\sum_i x_i) (\sum_i x_i y_i)}{\Delta} \quad (4.7.17)$$

$$B = \frac{N (\sum_i x_i y_i) - (\sum_i y_i) (\sum_i x_i)}{\Delta} \quad (4.7.18)$$

$$\text{dove } \Delta = N \left( \sum_i x_i^2 \right) - \left( \sum_i x_i \right)^2 \quad (4.7.19)$$

*Nota:* Una giustificazione più approfondita della procedura di regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati verrà fornita al § 7.5.

Vediamo ora come è possibile tener conto, nella procedura di regressione lineare, delle eventuali **incertezze**  $\delta x_i$  **sulla grandezza**  $X$  **in ascissa**. Allo scopo, si può procedere come segue.

- Si determinano valori approssimati  $A'$  e  $B'$  dei parametri della retta, utilizzando il metodo grafico descritto al § 4.7.B oppure le eq. (4.7.17-19).
- Si trasformano le incertezze  $\delta X_{\text{exp}}$  della grandezza  $X$  in contributi  $\delta Y_{\text{tra}}$  alle incertezze sulla grandezza  $Y$  utilizzando le procedure di propagazione descritte al § 4.6.B. Si ottiene così, per ogni punto,

$$\delta Y_{\text{tra}} = |B| \delta X_{\text{exp}}. \quad (4.7.20)$$

- Per ogni punto, si sommano quadraticamente i due contributi all'incertezza su  $Y$ , quello sperimentale e quello trasferito da  $X$ :

$$(\delta Y_{\text{tot}})^2 = (\delta Y_{\text{exp}})^2 + (\delta Y_{\text{tra}})^2. \quad (4.7.21)$$

### D) Incertezza sui parametri della regressione lineare

I parametri  $A$  e  $B$  della retta ottenuti mediante la procedura di regressione lineare dipendono dai valori  $x_i, y_i$  delle coordinate dei punti sperimentali. Poichè i valori  $y_i$  sono affetti da incertezze  $\delta y_i$ , ci si aspetta che le incertezze  $\delta y_i$  si riflettano in incertezze  $\delta A$  e  $\delta B$  sui parametri  $A$  e  $B$  della retta.

Per valutare le incertezze  $\delta A$  e  $\delta B$  ci serviremo delle regole per la propagazione dell'incertezza introdotte al § 4.6.

Consideriamo dapprima il caso più semplice della **diretta proporzionalità**  $Y = BX$ . L'eq. (4.7.10) mostra che il parametro  $B$  è una combinazione lineare dei valori  $y_i$ , del tipo dell'eq. (4.6.1):

$$B = \sum_i \beta_i y_i \quad \text{con} \quad \beta_i = \frac{w_i x_i}{\sum_i w_i x_i^2}. \quad (4.7.22)$$

Possiamo pertanto applicare la regola di propagazione espressa dall'eq. (4.6.6), ricordando che  $(\delta y_i)^2 = 1/w_i$ :

$$(\delta B)^2 = \sum_i \beta_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i^2 x_i^2 / w_i}{(\sum_i w_i x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum_i w_i x_i^2}. \quad (4.7.23)$$

Se le incertezze  $\delta y_i$  sono tutte uguali, l'eq. (4.7.23) si riduce a

$$(\delta B)^2 = \frac{1}{\sum_i x_i^2} (\delta y)^2. \quad (4.7.24)$$

Passiamo ora al **caso generale della linearità**. Entrambi i parametri  $A$  e  $B$ , espressi dalle eq. (4.7.14-16), sono combinazioni lineari dei valori  $y_i$ , del tipo dell'eq. (4.6.1):

$$A = \sum_i \alpha_i y_i, \quad \text{con} \quad \alpha_i = \frac{w_i (\sum_i w_i x_i^2) - w_i x_i (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.25)$$

$$B = \sum_i \beta_i y_i, \quad \text{con} \quad \beta_i = \frac{w_i x_i (\sum_i w_i) - w_i (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.26)$$

Possiamo ancora applicare la regola di propagazione espressa dall'eq. (4.6.6), ricordando sempre che  $(\delta y_i)^2 = 1/w_i$  e tenendo conto che  $\Delta_w$  è dato dall'eq. (4.7.16). Con un po' di pazienza si può verificare che

$$(\delta A)^2 = \sum_i \alpha_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta_w}, \quad (\delta B)^2 = \sum_i \beta_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i}{\Delta_w}. \quad (4.7.27)$$

Se le incertezze  $\delta y_i$  sono tutte uguali, le eq. (4.7.27) si riducono a

$$(\delta A)^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{\Delta} (\delta y)^2, \quad (\delta B)^2 = \frac{\mathcal{N}}{\Delta} (\delta y)^2, \quad (4.7.28)$$

con  $\Delta$  espresso dall'eq. (4.7.19).

### E) Linearizzazione grafica di relazioni non lineari

Riconoscere che  $\mathcal{N}$  punti sperimentali  $(x_i, y_i)$  sono disposti approssimativamente lungo una retta è relativamente semplice. Come abbiamo visto al precedente § 4.7.D, è facile poi determinare i parametri della retta mediante la procedura di regressione lineare.

Riconoscere relazioni funzionali diverse dalla linearità è invece generalmente molto difficile. Si pensi, ad esempio, alla difficoltà di distinguere un andamento parabolico  $Y = \alpha X^2$  da un andamento cubico  $Y = \beta Y^3$ .

Il problema può spesso venire risolto mediante opportune trasformazioni degli assi del grafico, che consentano di ricondurre un generico andamento  $Y = f(X)$  ad una retta  $Y = A + BX$ , alla quale è poi possibile applicare la regressione lineare.

Ad esempio, un andamento parabolico  $Y = \alpha X^2$  può essere trasformato in un andamento lineare rappresentando i valori  $Y$  in funzione di  $Z = X^2$  anziché di  $X$ .

Procedure molto efficaci di linearizzazione si basano sull'uso di grafici logaritmici, per i quali si rimanda all'Appendice A.3.

### F) Test del chi-quadrato

La linearità della relazione tra due variabili  $X$  e  $Y$  viene generalmente valutata in prima approssimazione mediante osservazione diretta del grafico. Una volta determinati i parametri  $A$  e  $B$  della retta attraverso la procedura di regressione lineare, è possibile cercare di valutare in modo quantitativo il grado di affidabilità dell'ipotesi di linearità.

Punto di partenza del metodo che si utilizza generalmente per questo scopo è l'espressione della discrepanza globale tra retta e punti sperimentali, introdotta dall'eq. (4.7.6) e indicata con  $\chi^2$ . Per questa ragione, il metodo si chiama *test del chi quadrato*.

Il test del chi quadrato riveste un'importanza molto importante nella trattazione statistica avanzata dei dati sperimentali, ben al di là del presente caso della regressione lineare. Ce ne occuperemo pertanto in modo approfondito e generalizzato più avanti, nel § 7.6. In questo paragrafo, ci limiteremo ad un'introduzione semplificata e qualitativa ai suoi aspetti più semplici.

Per comprendere la filosofia che sta alla base del test del chi quadrato, è utile partire da un'ipotesi puramente astratta: supponiamo cioè di sapere *a priori* che le grandezze  $X$  e  $Y$  sono sicuramente legate dalla relazione lineare  $Y = A + BX$ . Eseguiamo ora un esperimento, consistente nella misurazione di  $\mathcal{N}$  coppie di punti  $(x_i, y_i \pm \delta y_i)$ . Naturalmente, poiché le misure sono affette da incertezza, non ci si aspetta che i punti sperimentali stiano esattamente sulla retta teorica  $Y = A + BX$ . Se però le incertezze  $\delta y_i$  dei singoli punti sono state valutate correttamente, ci si può ragionevolmente aspettare che la discrepanza tra teoria ed esperimento per ogni punto sia, in media, confrontabile con l'incertezza. Detto altrimenti, ogni termine della sommatoria nell'eq. (4.7.6) dovrebbe essere in media dell'ordine dell'unità, e quindi  $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$ .

In realtà, l'aspettativa  $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$  è ragionevole se gli  $\mathcal{N}$  termini della sommatoria sono tra di loro indipendenti: sarebbe il caso, ad esempio, del confronto tra  $\mathcal{N}$  punti sperimentali e una retta  $Y = A + BX$  determinata dalla teoria in modo completamente indipendente. Nel caso della regressione lineare, invece, i due parametri  $A$  e  $B$  della retta sono determinati a partire dai punti sperimentali, cosicché non tutti i termini della sommatoria sono tra di loro indipendenti.

*Esempio 1:* Nel caso della diretta proporzionalità  $Y = BX$ , se ci fosse un solo punto sperimentale  $(x_1, y_1)$ , e quindi  $\mathcal{N} = 1$ , la retta determinata dalla regressione lineare passerebbe esattamente per il punto  $(x_1, y_1)$ , qualunque fosse la sua incertezza  $\delta y_1$ .

*Esempio 2:* Nel caso della relazione lineare  $A + BX$ , se ci fossero solo due punti sperimentali  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , e quindi  $\mathcal{N} = 2$ , la retta determinata dalla regressione lineare passerebbe esattamente per entrambi i punti, qualunque fossero le loro incertezze  $\delta y_1$  e  $\delta y_2$ .

È ragionevole pertanto aspettarsi, nel caso della diretta proporzionalità  $Y = BX$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \simeq \mathcal{N} - 1, \quad (4.7.29)$$

e nel caso generale della linearità  $Y = A + BX$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \simeq \mathcal{N} - 2. \quad (4.7.30)$$

È bene cercare di chiarire meglio il significato del segno  $\simeq$  delle eq. (4.7.29) e (4.7.30). La discrepanza tra punti sperimentali e retta teorica ha carattere aleatorio, cioè probabilistico. Anche il valore del  $\chi^2$  è pertanto aleatorio: i valori  $\mathcal{N} - 1$  e  $\mathcal{N} - 2$  rappresentano solo le medie delle rispettive distribuzioni probabilistiche del  $\chi^2$ . Uno studio più approfondito consentirà, al § 7.6, di definire le proprietà della distribuzione del  $\chi^2$ . Per il momento ci limitiamo ad anticipare alcune conclusioni approssimate.

Nel caso della diretta proporzionalità  $Y = BX$ , l'Eq. (4.7.29) equivale a dire che è molto probabile che

$$\mathcal{N} - 1 - \sqrt{2\mathcal{N} - 2} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \leq \mathcal{N} - 1 + \sqrt{2\mathcal{N} - 2}, \quad (4.7.31)$$

mentre, nel caso generale della linearità  $Y = A + BX$ , l'Eq. (4.7.30) equivale a dire che è molto probabile che

$$\mathcal{N} - 2 - \sqrt{2\mathcal{N} - 4} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \leq \mathcal{N} + \sqrt{2\mathcal{N} - 4}. \quad (4.7.32)$$

Torniamo ora al problema di partenza. Vogliamo cioè valutare se l'ipotesi di linearità sia accettabile, a partire dai valori sperimentalmente ottenuti per il  $\chi^2$ . Le Eq. (4.7.29) e (4.7.30), o meglio le Eq. (4.7.31) e (4.7.32), costituiscono dei criteri di natura probabilistica, da utilizzare comunque con cautela. Per fissare le idee, consideriamo il caso generale  $Y = A + BX$ .

- a) Se  $\chi^2 \simeq \mathcal{N} - 2$  e se le incertezze  $\delta y_i$  sono state valutate correttamente, allora è plausibile ritenere che la retta  $Y = A + BX$  sia compatibile con i punti sperimentali.
- b) Se  $\chi^2 \ll \mathcal{N} - 2$  è ancora plausibile ritenere la retta  $Y = A + BX$  compatibile con i punti sperimentali; è però anche probabile che le incertezze  $\delta y_i$  siano state mediamente sopravvalutate (ad esempio perché si è sovrastimata la possibile influenza di errori sistematici).
- c) Se  $\chi^2 \gg \mathcal{N} - 2$  è plausibile concludere che la retta  $Y = A + BX$  *non* è compatibile con i punti sperimentali; può tuttavia sorgere anche il dubbio che si siano invece sottovalutate le incertezze  $\delta y_i$ . Affronteremo questo problema nel seguente § 4.7.G.

## G) Valutazione a posteriori dell'incertezza di misura

Può succedere che l'incertezza  $\delta y_i$  sui singoli valori della grandezza  $Y$  sia stata sottostimata. Ad esempio:

- a) ogni valore  $y_i$  rappresenta una singola misura, anziché la media su più misure ripetute; l'incertezza  $\delta y_i$  dipende solo dalla risoluzione, e non può tener conto dell'influenza degli errori casuali;
- b) non si è tenuta in debito conto l'incertezza dovuta all'influenza di errori sistematici non compensati.

In tali casi, se si è convinti della bontà dell'ipotesi di linearità  $Y = A + BX$  (in base ad esempio a considerazioni di natura teorica o all'esito di altri esperimenti), è possibile ribaltare la formula (4.7.30) del  $\chi^2$  per valutare *a posteriori* l'incertezza media  $\delta y$  sui punti sperimentali, imponendo che  $\chi^2 = \mathcal{N} - 2$ :

$$(\delta y)^2 \simeq \frac{1}{\mathcal{N} - 2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [y_i - A - Bx_i]^2 \quad (4.7.33)$$

Analogha procedura può essere seguita con l'Eq. (4.7.29) nel caso della diretta proporzionalità.