

## Esercizi per il Corso di ALGEBRA

### Foglio 4

27 ottobre 2015

1. Si consideri il sottoinsieme  $\mathbb{Z}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  di  $\mathbb{R}$ .
  - (a) **(4 punti)** Si verifichi  $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$  è un sottoanello del campo  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.
  - (b) **(5 punti)** Si verifichi che il sottoinsieme  $I = \{a + b\sqrt{11} \mid a + 5b \text{ è multiplo di } 7\}$  è un ideale di  $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$
  - (c) **(4 punti)** Si verifichi che la funzione  $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{11}] \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ,  $\varphi(a + b\sqrt{11}) = \overline{a + 5b}$ , è un omomorfismo d'anelli e si deduca che  $I$  è un ideale massimale di  $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ .
2. Si consideri l'anello  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ .
  - (a) **(3 punti)** Si calcoli  $\overline{11}^{1760}$  in  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ ;
  - (b) **(3 punti)** Si trovino tutti gli elementi invertibili di  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ ;
  - (c) **(3 punti)** Si calcolino le ordine degli elementi del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}^*$ ;
  - (d) **(3 punti)** Si dimostri che il gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}^*$  è isomorfo al gruppo  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ .
3. **(5 punti)** Si consideri l'anello dei quaternioni, cioè il spazio vettoriale reale  $\mathbb{H}$  di dimensione 4 e base ortonormale  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  con l'operazione lineare  $*$  :  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  tale che

$$\mathbf{1} * h = h * \mathbf{1} = h, \forall h \in \mathbb{H}$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{i} = \mathbf{j} * \mathbf{j} = \mathbf{k} * \mathbf{k} = -\mathbf{1}$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{j} = -\mathbf{j} * \mathbf{i} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} * \mathbf{k} = -\mathbf{k} * \mathbf{j} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} * \mathbf{i} = -\mathbf{i} * \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

Si dimostri che ogni elemento  $\mathbf{q}$  di  $\mathbb{H} \setminus \{0\}$  è invertibile. Un'anello con questa proprietà si chiama **anello di divisione**.

**Consegna: martedì 3 novembre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.**