

ANALISI MATEMATICA A - Ingegneria Edile - Prof. M. Squassina

Secondo Appello, Esame Scritto, 14 Febbraio 2006

Tempo: 3 ore — Tema: A

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Esercizio 1 [Punti 8]. Si studi la funzione f definita da

$$f(x) = \ln(2 + e^{-x}).$$

Esercizio 2 [Punti 6]. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$.

1. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie è convergente.
2. Dedurre il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arctan^2\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Esercizio 3 [Punti 4]. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^2} \right] dx.$$

SUGGERIMENTO. Calcolare il comportamento asintotico per $x = 1$ e per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4 [Punti 5]. Si calcoli il seguente integrale

$$\int \left[\arctan x + \frac{x}{x^2 + 1} \right] dx.$$

Esercizio 5 [Punti 5]. Si consideri la successione a_n definita da

$$a_0 = 2, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

1. Provare per induzione che $a_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, provare che $\sqrt{a_n} \leq a_n$ (cioè che la successione a_n è decrescente e quindi esiste il limite di a_n quando $n \rightarrow +\infty$).
3. Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ in entrambi i membri dell'uguaglianza

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}},$$

si deduca il valore di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Esercizio 6 [Punti 7]. Si enunci e dimostri il teorema di Rolle per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

ANALISI MATEMATICA A - Ingegneria Edile - Prof. M. Squassina

Secondo Appello, Esame Scritto, 14 Febbraio 2006

Tempo: 3 ore — Tema: B

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Esercizio 1 [Punti 8]. Si studi la funzione f definita da

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

Esercizio 2 [Punti 6]. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$.

1. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie è convergente.
2. Dedurre il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Esercizio 3 [Punti 4]. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{(x^4 - 1)^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{x^2} \right] dx.$$

SUGGERIMENTO. Calcolare il comportamento asintotico per $x = 1$ e per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4 [Punti 5]. Si calcoli il seguente integrale

$$\int \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2x}{x^2 + 4} \right] dx.$$

Esercizio 5 [Punti 5]. Si consideri la successione a_n definita da

$$a_0 = 2, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

1. Provare per induzione che $a_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, provare che $\sqrt{a_n} \leq a_n$ (cioè che la successione a_n è decrescente e quindi esiste il limite di a_n quando $n \rightarrow +\infty$).
3. Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ in entrambi i membri dell'uguaglianza

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}},$$

si deduca il valore di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Esercizio 6 [Punti 7]. Si enunci e dimostri il teorema di Rolle per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

ANALISI MATEMATICA A - Ingegneria Edile - Prof. M. Squassina

Secondo Appello, Esame Scritto, 14 Febbraio 2006

Tempo: 3 ore — Tema: C

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Esercizio 1 [Punti 8]. Si studi la funzione f definita da

$$f(x) = \ln(1 + 2e^{-x}).$$

Esercizio 2 [Punti 6]. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$.

1. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie è convergente.
2. Dedurre il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Esercizio 3 [Punti 4]. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{(x^4 - 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^2} \right] dx.$$

SUGGERIMENTO. Calcolare il comportamento asintotico per $x = 1$ e per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4 [Punti 5]. Si calcoli il seguente integrale

$$\int \left[\arctan(2x) + \frac{2x}{4x^2 + 1} \right] dx.$$

Esercizio 5 [Punti 5]. Si consideri la successione a_n definita da

$$a_0 = 2, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

1. Provare per induzione che $a_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, provare che $\sqrt{a_n} \leq a_n$ (cioè che la successione a_n è decrescente e quindi esiste il limite di a_n quando $n \rightarrow +\infty$).
3. Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ in entrambi i membri dell'uguaglianza

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}},$$

si deduca il valore di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Esercizio 6 [Punti 7]. Si enunci e dimostri il teorema di Rolle per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.