TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Programma ufficiale a.a. 2009/10 ****provvisorio****

Prof. Mauro Spera e Dott. Nicola Sansonetto
Dipartimento di Informatica - Università degli Studi di Verona

1. Elementi di algebra multilineare. Spazi duali. Prodotti scalari e Isomorfismi musicali, (teorema della rappresentazione). Omomorfismi duali. Covarianza e contravarianza. k-forme algebriche. Prodotto esterno (wedge). Algebra di Grassmann.

2. Campi vettoriali e forme differenziali su $\mathbf{R}^n$. Calcolo di Cartan: prodotto esterno (wedge), differenziale esterno, pull-back. Forme chiuse e forme esatte. Coomologia di de Rham (prologo). Lemma di Poincare'. Forma angolare. Esempi di forme chiuse non esatte tratti dalla fisica. Cenno alla coomologia a supporto compatto. Funzioni a campana (o cunetta).

3. Teoria delle superficie e calcolo di Cartan. Il metodo del *repère mobile*. Equazioni di struttura di Cartan. Il Theorema Egregium.

4. Elementi di analisi complessa: funzioni olomorfe; equazioni di Cauchy-Riemann. Teoremi di Cauchy e di Morera. Il principio dell'argomento e applicazioni. Il teorema fondamentale dell'algebra.

5. Campi vettoriali planari. Punti critici. Indice di un punto critico. Indice di un campo vettoriale. *Umlaufsatz* di Hopf e teorema di Poincaré-Bendixon.

6. Il teorema di Gauss-Bonnet nell'approccio di Chern. Teorema di Poincaré-Hopf. Teorema di Euler-Poincaré. Teorema di Brouwer.

7. Elementi di teoria di Morse. Funzioni di Morse. Indice di Morse. Incollamento di celle. Cenno al teorema di Milnor.

8. Sottovarieta' di $\mathbf{R}^N$. Rivisitazione della teoria del Dini. Esempi.

9. Le superficie parametrizzate rivisitate. Varietà topologiche. Varietà differenziabili. Esempi: $\mathbf{R}^n$, sfere, spazi proiettivi reali e complessi, Grassmanniane. La sfera di Riemann-Poincaré-Bloch. Struttura topologica degli spazi proiettivi complessi (applicazione della teoria di Morse).

10. Partizioni lisce dell'unità. Vettori tangenti. Fibrato tangente e cotangente. Campi vettoriali e forme differenziali. Diffeomorfismi.

11. Parentesi di Lie di campi vettoriali. Algebre di Lie. Esempi. Flussi di campi vettoriali. Completezza. Lemma di fuga. Derivata di Lie di campi vettoriali ("del pescatore").

12. Gruppi di Lie e loro algebre di Lie. Rappresentazioni aggiunte. Esempi. Digressione: $SU(2)$ e $SO(3)$. Matrici di Pauli. Angoli di Eulero.

13. Analisi tensoriale. Prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Tensori e campi tensoriali. Covarianza e contravarianza. Esempi: tensori metrici. Derivata di Lie di campi tensoriali. Calcolo di Cartan su varietà. Differenziale esterno, contrazione, derivata di Lie. La "formula magica"di Cartan. Esempi vari. Digressione meccanica: varietà simplettiche, campi vettoriali Hamiltoniani; parentesi di Poisson. Integrali del moto. L'oscillatore armonico. Cenno ai sistemi completamente integrabili.

14. Il teoremi della funzione inversa, del rango, della funzione implicita per le varietà. k-fette e carte-fetta (slice charts). Immersioni (immersions), inclusioni (embeddings). Esempi vari. Sottogruppi di gruppi di Lie. Teorema di Frobenius. Reinterpretazione in termini di forme differenziali. Applicazioni alla meccanica.

15. Il teorema della varietà quoziente. Spazi topologici quozienti (richiami). Proiezioni aperte. Condizione di Hausdorff per i quozienti. Esempi e Applicazioni. Azioni di gruppi di Lie. Azioni libere, azioni proprie. Il teorema della varietà quoziente: enunciato e schema della dimostrazione. Spazi omogenei.

16. Il teorema di Stokes Varietà orientabili. Varietà con bordo. Orientamento indotto sul bordo. Integrazione di forme differenziali. Teorema di Stokes.

....programma di massima da precisare........................

17. Omologia e coomologia. Omologia e coomologia singolare. Elementi di algebra omologica. il principio di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham. Applicazioni. Lemma dei cinque. Teorema di de Rham. Applicazione: le variabili di azione in meccanica. Dualità di Poincaré.

18. Elementi di geometria riemanniana. Connessione di Levi-Civita e trasporto parallelo. Tensori di curvatura (di Riemann, sezionale, Ricci, scalare). Simmetrie del tensore di curvatura. Identita' di Bianchi. La curvatura di Riemann e' determinata dalla curvatura sezionale. Gruppi di Lie e loro metriche. Spazi simmetrici. Geodetiche e loro caratterizzazione variazionale. L'applicazione esponenziale e il lemma di Gauss. Calcolo delle variazioni in grande. Punti critici dell'applicazione esponenziale e campi di Jacobi (punti coniugati). Funzionale energia, prima e seconda variazione. Equazione di Jacobi. Forma indice. Cenno al teorema dell'indice di Morse (approccio tramite la teoria di Sturm-Liouville).

19. Teoria di Hodge. Operatore di Hodge. Operatore di Laplace sulle k-forme. Teorema di Hodge (passi salienti della dimostrazione). Applicazioni.

Gruppo fondamentale e spazi di rivestimento (Dott. N. Sansonetto)

Introduzione alla topologia algebrica: omotopia e omotopia relativa, con esempi, equivalenza omotopica e tipo di omotopia. Spazi contraibili. Cammini omotopi relativamente al bordo e cammino prodotto sulla classe dei cammini equivalenti.

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato e sua dipendenza dal punto base. Esempi: il gruppo fondamentale di un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico, il gruppo fondamentale del cerchio e sue applicazioni: il teorema del punto fisso di Brouwer in dimensione 2.

Il teorema fondamentale dell'algebra come applicazione del gruppo fondamentale del cerchio. Il teorema di Borsuk-Ulam in dimensione 2. Morfismi indotti da funzioni continue tra spazi topologici.

Ripasso di teoria dei gruppi, gruppi liberi e prodotti liberi di gruppi. Il teorema di Seifert-Van Kampen e corollari. La somma connessa e il gruppo fondamentale del *bouquet* di due cerchi.

Applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen, il gruppo fondamentale del toro. del piano proiettivo reale, della somma connessa di tori e di piani proiettivi reali. Il teorema di Poincaré in dimensione 2.

Spazi fibrati, trivializzazioni locali, esempi: il fibrato tangente e il nastro di Moebius. I rivestimenti, esempi: le coordinate polari, la mappa esponenziale, le superfici di Riemann, il rivestimento universale di SO(3). Introduzione ai gruppi topologici.

Azioni di gruppi, azioni topologiche, orbita, stabilizzatore e spazio delle orbite. Azioni propriamente discontinue di gruppi discreti. Rivestimenti di Galois o regolari. Omeomorfismi locali e rivestimenti, rialzamento, rialzamento dei cammini e unicita' del rialzamento, rialzamento delle omotopie e fibrazioni di Hurewicz, lemma di monodromia.

Dimostrazione del lemma di monodromia. Il gruppo G(Y, y). Azioni a destra sulla fibra del gruppo fondamentale della base e criterio del rialzamento. Automorfismi di rivestimenti.

Il programma del corso è interamente contenuto in:

M.SPERA "Topologia e geometria differenziale" [note manoscritte reperibili in rete sulla pagina web del corso], cui vanno aggiunte le note del Dott. N. Sansonetto. Si segnalano però, per i dovuti approfondimenti, i seguenti testi.

Bibliografia

V.I. ARNOLD, Méthodes Mathématiques de la Méchanique Classique, MIR, Moscou, 1976.

D. BACHMAN, A Geometric Approach to Differential Forms, Birkhäuser, Boston, 2006.

W. BOOTHBY, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, New York, 1975.

R. BOTT, L.T. TU, Differential forms in algebraic topology Springer, New York, 1982.

G. BREDON, Topology and Geometry, Springer, New York, 1992.

F.CROOM, A first course in Algebraic Topology, Springer, 1977.

S.S. CHERN, Complex manifolds without potential theory, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

S.S. CHERN, H. CHEN, K.S. LAM, Lectures on differential geometry, World Scientific, Singapore, 2000.

M. DO CARMO, Riemannian Geometry, Birkhauser, Boston, 1992.

M. DO CARMO, Differential Forms and Applications, Springer, Berlin, 1994.

B.DUBROVIN, A.FOMENKO, S. NOVIKOV, Géométrie Contemporaine, (3 vol.) MIR, Moscou, 1982

A.T. FOMENKO, T.L. KUNII, Topological Modeling for Visualization. Springer-Verlag, 1997.

J. GALLIER, Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering, Springer, Berlin, 2000.

S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE , Riemannian Geometry, Springer, 1987.

G. GENTILI, F. PODESTA', E. VESENTINI, Lezioni di geometria differenziale. Bollati-Boringhieri, Torino, 1995.

S. GOLDBERG, Curvature and Homology, Dover, New York, 1962.

P. GRIFFITHS, J. HARRIS, Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York, 1978.

A. HATCHER, Algebraic Topology (scaricabile liberamente dalla pagina web dell'autore)

K. JÄNICH, Topologia, Zanichelli, Bologna, 1994

J. KELLEY, General topology Springer, New York, 1955

F.KIRWAN, Complex algebraic curves LMS, London, 1992

S. LANG, Fundamentals of Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

J.M. LEE,, Introduction to Topological Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

J.M. LEE, Introduction to Smooth manifolds, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.

W. LUECK, Algebraische Topologie, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2005.

W.MASSEY, Algebraic Topology: An Introduction, Springer, Berlin, 1969.

E. SERNESI, Geometria 2 Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

I.M. SINGER, J.A. THORPE Lezioni di topologia elementare e di geometria, Boringhieri, Torino, 1980.

M.SPERA "Geometria" [note manoscritte reperibili in rete sulla pagina web del corso di Geometria 2008/09], "Elementi di Topologia" [note manoscritte reperibili in rete sulla pagina web del relativo corso di dottorato in Informatica 2008/09]

M.SPERA "Geometria superiore-I modulo" (UCSC Brescia a.a. 1998/99), "Topologia-modulo B" - Padova a.a 1995/96 — 97/98 [note manoscritte]