

Simulazione numerica dei fenomeni di segregazione spaziale per alcuni sistemi di competizione-diffusione

Simone Zuccher

E-mail: zuccher@sci.univr.it

Web page: <http://profs.sci.univr.it/~zuccher/>

Dipartimento di Informatica
Università di Verona

12 Giugno 2007

Agenda

- 1 **Origine del problema**
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Agenda

- 1 **Origine del problema**
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 **Discretizzazione e strategie numeriche**
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Agenda

- 1 **Origine del problema**
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 **Discretizzazione e strategie numeriche**
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 **Risultati numerici**
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 **Conclusioni**

Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Agenda

- 1 **Origine del problema**
 - **Un po' di storia**
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Dinamica di una popolazione: primissimi studi

J. Mawhin. The legacy of Pierre-François Verhulst and Vito Volterra in population dynamics, In *The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin*, pages 147–160, World Sci. Publ., River Edge, NJ, **2004**.

- **1798, T. Malthus:** *An Essay on the Principle of Population*. “Without obstacles to its development, a population increases as a geometrical progression”.
- **1835, A. Quetelet:** *Sur l’homme et le développement de ses facultés. Essai de physique sociale*. “The resistance, or the sum of obstacles to the development of a population, is like the square of the speed of variation of the population”.
- **1838, P.F. Verhulst:** *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. “I have thought that I had to comply to the invitation of Mr. Quetelet of making it public”:

$$p'(t) = mp(t), \quad m > 0.$$

Dinamica di una popolazione: primissimi studi

J. Mawhin. The legacy of Pierre-François Verhulst and Vito Volterra in population dynamics, In *The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin*, pages 147–160, World Sci. Publ., River Edge, NJ, **2004**.

- **1798, T. Malthus:** *An Essay on the Principle of Population*. “Without obstacles to its development, a population increases as a geometrical progression”.
- **1835, A. Quetelet:** *Sur l'homme et le développement de ses facultés. Essai de physique sociale*. “The resistance, or the sum of obstacles to the development of a population, is like the square of the speed of variation of the population”.
- **1838, P.F. Verhulst:** *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. “I have thought that I had to comply to the invitation of Mr. Quetelet of making it public”:

$$p'(t) = mp(t), \quad m > 0.$$

Dinamica di una popolazione: primissimi studi

J. Mawhin. The legacy of Pierre-François Verhulst and Vito Volterra in population dynamics, In *The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin*, pages 147–160, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.

- **1798, T. Malthus:** *An Essay on the Principle of Population*. “Without obstacles to its development, a population increases as a geometrical progression”.
- **1835, A. Quetelet:** *Sur l’homme et le développement de ses facultés. Essai de physique sociale*. “The resistance, or the sum of obstacles to the development of a population, is like the square of the speed of variation of the population”.
- **1838, P.F. Verhulst:** *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. “I have thought that I had to comply to the invitation of Mr. Quetelet of making it public”:

$$p'(t) = mp(t), \quad m > 0.$$

Dinamica di una popolazione: primissimi studi

J. Mawhin. The legacy of Pierre-François Verhulst and Vito Volterra in population dynamics, In *The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin*, pages 147–160, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.

- **1798, T. Malthus:** *An Essay on the Principle of Population*. “Without obstacles to its development, a population increases as a geometrical progression”.
- **1835, A. Quetelet:** *Sur l’homme et le développement de ses facultés. Essai de physique sociale*. “The resistance, or the sum of obstacles to the development of a population, is like the square of the speed of variation of the population”.
- **1838, P.F. Verhulst:** *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. “I have thought that I had to comply to the invitation of Mr. Quetelet of making it public”:

$$p'(t) = mp(t), \quad m > 0.$$

Dinamica di una popolazione: modello logistico

- **P.F. Verhulst:** “As the speed of increase of the population is diminished by its very increase, we must subtract from mp an unknown function $\varphi(p)$ of p : $p'(t) = mp(t) - \varphi(p(t))$ ”.
 “[...] The simplest hypothesis consists in taking $\varphi(p) = np^2$ ”,
 ossia $p'(t) = p(t)[m - np(t)]$ (equazione logistica).
 Altre scelte sono $\varphi(p) = n[p(t)]^k$, $k = 3, 4, \dots$ oppure
 $\varphi(p) = n \log p(t)$.
- **1845, P.F. Verhulst:** *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.*

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = h - n[p(t) - b], b \text{ popolazione al tempo presente.}$$

$$\text{Se } m = h + nb \Rightarrow p'(t) = p(t)[m - np(t)].$$

Dinamica di una popolazione: modello logistico

- **P.F. Verhulst:** “As the speed of increase of the population is diminished by its very increase, we must subtract from mp an unknown function $\varphi(p)$ of p : $p'(t) = mp(t) - \varphi(p(t))$ ”.
 “[...] The simplest hypothesis consists in taking $\varphi(p) = np^2$ ”,
 ossia $p'(t) = p(t)[m - np(t)]$ (equazione logistica).
 Altre scelte sono $\varphi(p) = n[p(t)]^k$, $k = 3, 4, \dots$ oppure
 $\varphi(p) = n \log p(t)$.
- **1845, P.F. Verhulst:** *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.*

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = h - n[p(t) - b], b \text{ popolazione al tempo presente.}$$

$$\text{Se } m = h + nb \Rightarrow p'(t) = p(t)[m - np(t)].$$

Dinamica di una popolazione: modello logistico

- **P.F. Verhulst:** “As the speed of increase of the population is diminished by its very increase, we must subtract from mp an unknown function $\varphi(p)$ of p : $p'(t) = mp(t) - \varphi(p(t))$ ”.
 “[...] The simplest hypothesis consists in taking $\varphi(p) = np^2$ ”,
 ossia $p'(t) = p(t)[m - np(t)]$ (equazione logistica).
 Altre scelte sono $\varphi(p) = n[p(t)]^k$, $k = 3, 4, \dots$ oppure
 $\varphi(p) = n \log p(t)$.
- **1845, P.F. Verhulst:** *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.*

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = h - n[p(t) - b], b \text{ popolazione al tempo presente.}$$

$$\text{Se } m = h + nb \Rightarrow p'(t) = p(t)[m - np(t)].$$

Dinamica di una popolazione: modello logistico

- **P.F. Verhulst:** “As the speed of increase of the population is diminished by its very increase, we must subtract from mp an unknown function $\varphi(p)$ of p : $p'(t) = mp(t) - \varphi(p(t))$ ”.
 “[...] The simplest hypothesis consists in taking $\varphi(p) = np^2$ ”,
 ossia $p'(t) = p(t)[m - np(t)]$ (equazione logistica).
 Altre scelte sono $\varphi(p) = n[p(t)]^k$, $k = 3, 4, \dots$ oppure
 $\varphi(p) = n \log p(t)$.
- **1845, P.F. Verhulst:** *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.*

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = h - n[p(t) - b], b \text{ popolazione al tempo presente.}$$

$$\text{Se } m = h + nb \Rightarrow p'(t) = p(t)[m - np(t)].$$

Dinamica di una popolazione: raffinamenti successivi

- **1847, P.F. Verhulst:** *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population.*

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = h - f(p(t) - b) \Rightarrow p'(t) = \begin{cases} hp(t) - n[p(t) - b] & p(t) \geq b \\ hp(t) & p(t) < b \end{cases}$$

Limite superiore per la popolazione Belga: 9.4 milioni (10 milioni oggi).

- **1849, P.F. Verhulst** muore e viene dimenticato: A. Quetelet nemmeno lo cita nella sua *Physique sociale et essai sur le développement des facultés de l'homme* del 1869.

Dinamica di una popolazione: raffinamenti successivi

- **1847, P.F. Verhulst:** *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population.*

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = h - f(p(t) - b) \Rightarrow p'(t) = \begin{cases} hp(t) - n[p(t) - b] & p(t) \geq b \\ hp(t) & p(t) < b \end{cases}$$

Limite superiore per la popolazione Belga: 9.4 milioni (10 milioni oggi).

- **1849, P.F. Verhulst** muore e viene dimenticato: A. Quetelet nemmeno lo cita nella sua *Physique sociale et essai sur le développement des facultés de l'homme* del 1869.

Drosophila melanogaster



Dinamica di una popolazione: ulteriori conferme

- **1920, R. Pearl e L.J. Reed** *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation* inconsapevoli dei lavori di Verhulst riscrivono la stessa equazione (logistica), e trovano che predice benissimo la crescita della *Drosophila melanogaster*.
- **1939, V. Volterra** *Calculus of variations and the logistic curve*. L'equazione di Verhulst può essere vista come l'equazione di Eulero-Lagrange per un opportuno problema di calcolo variazionale.
 "In this manner I have also obtained some results by which dynamics is brought into relation to problems of the struggle for existence".
 In altre parole, senza conoscere i lavori di Quetelet Volterra diede alle idee di Quetelet una precisa formulazione matematica.

Dinamica di una popolazione: ulteriori conferme

- **1920, R. Pearl e L.J. Reed** *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation* inconsapevoli dei lavori di Verhulst riscrivono la stessa equazione (logistica), e trovano che predice benissimo la crescita della *Drosophila melanogaster*.

- **1939, V. Volterra** *Calculus of variations and the logistic curve*. L'equazione di Verhulst può essere vista come l'equazione di Eulero-Lagrange per un opportuno problema di calcolo variazionale.

“In this manner I have also obtained some results by which dynamics is brought into relation to problems of the struggle for existence”.

In altre parole, senza conoscere i lavori di Quetelet Volterra diede alle idee di Quetelet una precisa formulazione matematica.

Dinamica di una popolazione: ulteriori conferme

- **1920, R. Pearl e L.J. Reed** *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation* inconsapevoli dei lavori di Verhulst riscrivono la stessa equazione (logistica), e trovano che predice benissimo la crescita della *Drosophila melanogaster*.
- **1939, V. Volterra** *Calculus of variations and the logistic curve*. L'equazione di Verhulst può essere vista come l'equazione di Eulero-Lagrange per un opportuno problema di calcolo variazionale.
 “In this manner I have also obtained some results by which dynamics is brought into relation to problems of the struggle for existence”.
 In altre parole, senza conoscere i lavori di Quetelet Volterra diede alle idee di Quetelet una precisa formulazione matematica.

Dinamica di una popolazione: ulteriori conferme

- **1920, R. Pearl e L.J. Reed** *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation* inconsapevoli dei lavori di Verhulst riscrivono la stessa equazione (logistica), e trovano che predice benissimo la crescita della *Drosophila melanogaster*.
- **1939, V. Volterra** *Calculus of variations and the logistic curve*. L'equazione di Verhulst può essere vista come l'equazione di Eulero-Lagrange per un opportuno problema di calcolo variazionale.
 “In this manner I have also obtained some results by which dynamics is brought into relation to problems of the struggle for existence”.
 In altre parole, senza conoscere i lavori di Quetelet Volterra diede alle idee di Quetelet una precisa formulazione matematica.

Popolazioni interagenti: lotta per la sopravvivenza

- **1925, U. D'Ancona** (zoologo) chiede al futuro suocero (certo Vito Volterra, 65enne professore di Fisica Matematica al massimo della fama) di spiegare perché, durante la I guerra mondiale ci fu un curioso aumento del numero di pesci predatori.
- **1926, V. Volterra** *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Supponendo che il numero dei predatori sia $p(t)$ e che si nutrano solo di prede, le quali sono in numero $q(t)$ ed hanno cibo illimitato,

$$\begin{cases} p'(t) &= -a p(t) + c p(t) q(t) \\ q'(t) &= d q(t) - e p(t) q(t) \end{cases}$$

- Lo stesso sistema di equazioni era stato ricavato da **Lotka** nel **1920** (*Undamped oscillations derived from the law of mass action, Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*).

Popolazioni interagenti: lotta per la sopravvivenza

- **1925, U. D'Ancona** (zoologo) chiede al futuro suocero (certo Vito Volterra, 65enne professore di Fisica Matematica al massimo della fama) di spiegare perché, durante la I guerra mondiale ci fu un curioso aumento del numero di pesci predatori.
- **1926, V. Volterra** *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Supponendo che il numero dei predatori sia $p(t)$ e che si nutrano solo di prede, le quali sono in numero $q(t)$ ed hanno cibo illimitato,

$$\begin{cases} p'(t) &= -ap(t) + cp(t)q(t) \\ q'(t) &= dq(t) - ep(t)q(t) \end{cases}$$

- Lo stesso sistema di equazioni era stato ricavato da **Lotka** nel **1920** (*Undamped oscillations derived from the law of mass action, Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*).

Popolazioni interagenti: lotta per la sopravvivenza

- **1925, U. D'Ancona** (zoologo) chiede al futuro suocero (certo Vito Volterra, 65enne professore di Fisica Matematica al massimo della fama) di spiegare perché, durante la I guerra mondiale ci fu un curioso aumento del numero di pesci predatori.
- **1926, V. Volterra** *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Supponendo che il numero dei predatori sia $p(t)$ e che si nutrano solo di prede, le quali sono in numero $q(t)$ ed hanno cibo illimitato,

$$\begin{cases} p'(t) = -ap(t) + cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) - ep(t)q(t) \end{cases}$$

- Lo stesso sistema di equazioni era stato ricavato da **Lotka** nel **1920** (*Undamped oscillations derived from the law of mass action, Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*).

Popolazioni interagenti: competizione e cooperazione

- **1931, V. Volterra** *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* ⇒ modello di Verhulst-Volterra e in più:

Competizione.

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - b[p(t)]^2 - cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) - ep(t)q(t) - f[q(t)]^2 \end{cases} \quad \text{tutte costanti positive}$$

Esclusione competitiva. La soluzione, per $t \rightarrow \infty$, viene attratta da uno dei due punti di equilibrio $(0, d/f)$ o $(a/b, 0)$, i.e. una delle due specie si estingue e l'altra sopravvive (cfr. Darwin, 1859)

Cooperazione.

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - b[p(t)]^2 + cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) + ep(t)q(t) - f[q(t)]^2 \end{cases} \quad \text{tutte costanti positive}$$

Popolazioni interagenti: competizione e cooperazione

- **1931, V. Volterra** *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* ⇒ modello di Verhulst-Volterra e in più:

Competizione.

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - b[p(t)]^2 - cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) - ep(t)q(t) - f[q(t)]^2 \end{cases} \quad \text{tutte costanti positive}$$

Esclusione competitiva. La soluzione, per $t \rightarrow \infty$, viene attratta da uno dei due punti di equilibrio $(0, d/f)$ o $(a/b, 0)$, i.e. una delle due specie si estingue e l'altra sopravvive (cfr. Darwin, 1859)

Cooperazione.

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - b[p(t)]^2 + cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) + ep(t)q(t) - f[q(t)]^2 \end{cases} \quad \text{tutte costanti positive}$$

Popolazioni interagenti: competizione e cooperazione

- **1931, V. Volterra** *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* ⇒ modello di Verhulst-Volterra e in più:

Competizione.

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - b[p(t)]^2 - cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) - ep(t)q(t) - f[q(t)]^2 \end{cases} \quad \text{tutte costanti positive}$$

Esclusione competitiva. La soluzione, per $t \rightarrow \infty$, viene attratta da uno dei due punti di equilibrio $(0, d/f)$ o $(a/b, 0)$, i.e. una delle due specie si estingue e l'altra sopravvive (cfr. Darwin, 1859)

Cooperazione.

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - b[p(t)]^2 + cp(t)q(t) \\ q'(t) = dq(t) + ep(t)q(t) - f[q(t)]^2 \end{cases} \quad \text{tutte costanti positive}$$

Localizzazione spaziale

Fin'ora si è considerato solo il numero di individui di una popolazione (eventualmente normalizzato) al variare del tempo. Ma **le specie sono distribuite su un territorio 2D**, i.e. su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

- 1937, A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, and N. Piscounoff *Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique.*
- 1937, R.A. Fisher. *The wave of advance of advantageous genes.*

Una sola specie

$$p'(t) = d \Delta p + p[m - np]$$

Due (o più) specie (competizione/cooperazione)

$$\begin{cases} p'(t) = d_p \Delta p + a p(t) - b [p(t)]^2 \mp c p(t) q(t) \\ q'(t) = d_q \Delta q + d q(t) \mp e p(t) q(t) - f [q(t)]^2 \end{cases}$$

Localizzazione spaziale

Fin'ora si è considerato solo il numero di individui di una popolazione (eventualmente normalizzato) al variare del tempo. Ma **le specie sono distribuite su un territorio 2D**, i.e. su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

- **1937, A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, and N. Piscounoff** *Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique.*
- **1937, R.A. Fisher.** *The wave of advance of advantageous genes.*

Una sola specie

$$p'(t) = d \Delta p + p[m - np]$$

Due (o più) specie (competizione/cooperazione)

$$\begin{cases} p'(t) = d_p \Delta p + a p(t) - b [p(t)]^2 \mp c p(t) q(t) \\ q'(t) = d_q \Delta q + d q(t) \mp e p(t) q(t) - f [q(t)]^2 \end{cases}$$

Localizzazione spaziale

Fin'ora si è considerato solo il numero di individui di una popolazione (eventualmente normalizzato) al variare del tempo. Ma **le specie sono distribuite su un territorio 2D**, i.e. su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

- **1937, A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, and N. Piscounoff** *Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique.*
- **1937, R.A. Fisher.** *The wave of advance of advantageous genes.*

Una sola specie

$$p'(t) = d \Delta p + p[m - np]$$

Due (o più) specie (competizione/cooperazione)

$$\begin{cases} p'(t) = d_p \Delta p + a p(t) - b [p(t)]^2 \mp c p(t) q(t) \\ q'(t) = d_q \Delta q + d q(t) \mp e p(t) q(t) - f [q(t)]^2 \end{cases}$$

Localizzazione spaziale

Fin'ora si è considerato solo il numero di individui di una popolazione (eventualmente normalizzato) al variare del tempo. Ma **le specie sono distribuite su un territorio 2D**, i.e. su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

- **1937, A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, and N. Piscounoff** *Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique.*
- **1937, R.A. Fisher.** *The wave of advance of advantageous genes.*

Una sola specie

$$p'(t) = d \Delta p + p[m - np]$$

Due (o più) specie (competizione/cooperazione)

$$\begin{cases} p'(t) = d_p \Delta p + a p(t) - b [p(t)]^2 \mp c p(t) q(t) \\ q'(t) = d_q \Delta q + d q(t) \mp e p(t) q(t) - f [q(t)]^2 \end{cases}$$

Localizzazione spaziale

Fin'ora si è considerato solo il numero di individui di una popolazione (eventualmente normalizzato) al variare del tempo. Ma **le specie sono distribuite su un territorio 2D**, i.e. su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

- **1937, A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, and N. Piscounoff** *Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique.*
- **1937, R.A. Fisher.** *The wave of advance of advantageous genes.*

Una sola specie

$$p'(t) = d \Delta p + p[m - np]$$

Due (o più) specie (competizione/cooperazione)

$$\begin{cases} p'(t) = d_p \Delta p + a p(t) - b [p(t)]^2 \mp c p(t) q(t) \\ q'(t) = d_q \Delta q + d q(t) \mp e p(t) q(t) - f [q(t)]^2 \end{cases}$$

Agenda

- 1 **Origine del problema**
 - Un po' di storia
 - **Formulazione del problema**
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

La segregazione spaziale

Problema: cosa succede sul lungo periodo ($t \rightarrow \infty$) a **specie competitive** distribuite su un **territorio bidimensionale** per le quali la mutua interazione è particolarmente intensa?

- Sistemi di questo tipo, nel limite di **forte competizione**, tendono ad esibire un **comportamento asintotico** (stazionario) che prevede la **presenza esclusiva** di una sola specie in una particolare regione del territorio disponibile.
- Chiamiamo questa configurazione limite **segregazione spaziale**.
- Le regioni occupate dalle varie specie risultano separate da una linea (**interfaccia**) **regolare**.
- Le condizioni al contorno possono fissare il **valore delle popolazioni** al contorno (Dirichlet) oppure fissare il **flusso delle popolazioni** al contorno (Neumann).

La segregazione spaziale

Problema: cosa succede sul lungo periodo ($t \rightarrow \infty$) a **specie competitive** distribuite su un **territorio bidimensionale** per le quali la mutua interazione è particolarmente intensa?

- Sistemi di questo tipo, nel limite di **forte competizione**, tendono ad esibire un **comportamento asintotico** (stazionario) che prevede la **presenza esclusiva** di una sola specie in una particolare regione del territorio disponibile.
- Chiamiamo questa configurazione limite **segregazione spaziale**.
- Le regioni occupate dalle varie specie risultano separate da una linea (**interfaccia**) **regolare**.
- Le condizioni al contorno possono fissare il **valore delle popolazioni** al contorno (Dirichlet) oppure fissare il **flusso delle popolazioni** al contorno (Neumann).

La segregazione spaziale

Problema: cosa succede sul lungo periodo ($t \rightarrow \infty$) a **specie competitive** distribuite su un **territorio bidimensionale** per le quali la mutua interazione è particolarmente intensa?

- Sistemi di questo tipo, nel limite di **forte competizione**, tendono ad esibire un **comportamento asintotico** (stazionario) che prevede la **presenza esclusiva** di una sola specie in una particolare regione del territorio disponibile.
- Chiamiamo questa configurazione limite **segregazione spaziale**.
- Le regioni occupate dalle varie specie risultano separate da una linea (**interfaccia**) **regolare**.
- Le condizioni al contorno possono fissare il **valore delle popolazioni** al contorno (Dirichlet) oppure fissare il **flusso delle popolazioni** al contorno (Neumann).

La segregazione spaziale

Problema: cosa succede sul lungo periodo ($t \rightarrow \infty$) a **specie competitive** distribuite su un **territorio bidimensionale** per le quali la mutua interazione è particolarmente intensa?

- Sistemi di questo tipo, nel limite di **forte competizione**, tendono ad esibire un **comportamento asintotico** (stazionario) che prevede la **presenza esclusiva** di una sola specie in una particolare regione del territorio disponibile.
- Chiamiamo questa configurazione limite **segregazione spaziale**.
- Le regioni occupate dalle varie specie risultano separate da una linea (**interfaccia**) **regolare**.
- Le condizioni al contorno possono fissare il **valore delle popolazioni** al contorno (Dirichlet) oppure fissare il **flusso delle popolazioni** al contorno (Neumann).

La segregazione spaziale

Problema: cosa succede sul lungo periodo ($t \rightarrow \infty$) a **specie competitive** distribuite su un **territorio bidimensionale** per le quali la mutua interazione è particolarmente intensa?

- Sistemi di questo tipo, nel limite di **forte competizione**, tendono ad esibire un **comportamento asintotico** (stazionario) che prevede la **presenza esclusiva** di una sola specie in una particolare regione del territorio disponibile.
- Chiamiamo questa configurazione limite **segregazione spaziale**.
- Le regioni occupate dalle varie specie risultano separate da una linea (**interfaccia**) **regolare**.
- Le condizioni al contorno possono fissare il **valore delle popolazioni** al contorno (Dirichlet) oppure fissare il **flusso delle popolazioni** al contorno (Neumann).

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{cases}$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{array} \right.$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{array} \right.$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{array} \right.$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{array} \right.$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{array} \right.$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Ma in pratica, cosa vogliamo fare?

Sistema di **competizione-diffusione** per due specie su $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_u \Delta u + \lambda u(1 - u) - \kappa uv^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_t = d_v \Delta v + \lambda v(1 - v) - \kappa vu^\delta, & \text{in } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = \psi(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ v(x, y, t) = \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial((0, 1) \times (0, 1)) \times [0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{in } (0, 1) \times (0, 1). \end{array} \right.$$

- $u(x, y, t), v(x, y, t) \in [0, 1]$ densità di popolazione
- d_u, d_v, λ e κ tutte **costanti** positive
- nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$
- $\delta = 1$: accoppiamento quadratico (piuttosto studiato, analiticamente e numericamente)
- $\delta = 2$: accoppiamento cubico (poco studiato, nessun lavoro numerico)

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (1/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura & H. Ninomiya,
 Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with
 Dirichlet boundary conditions, *Nonlinear Analysis. Real World
 Applications.*, 5(4):645–665, **2004**.

- Esiste una sequenza di soluzioni (u_κ, v_κ) convergenti, per qualsiasi $T > 0$, in $L^2(\Omega \times (0, T))$ per $\kappa \rightarrow \infty$ ad uno **stato segregato** limitato (u_∞, v_∞) ($d_u \neq d_v$ e CC non stazionarie; soluzione numerica con CC stazionarie).
- Le soluzioni così trovate sono tali che $w = u_\infty - v_\infty$ soddisfa il **free-boundary problem**

$$\begin{cases} w_t - \Delta D(w) = \lambda w(1 - |w|), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ Dw(x, y, t) = d_u \psi(x, y, t) - d_v \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ w(x, y, 0) = u_0(x, y) - v_0(x, y), & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

essendo

$$D(\sigma) = \begin{cases} d_u \sigma, & \text{if } \sigma \geq 0, \\ d_v \sigma, & \text{if } \sigma < 0. \end{cases}$$

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (1/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura & H. Ninomiya,
 Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with
 Dirichlet boundary conditions, *Nonlinear Analysis. Real World
 Applications.*, 5(4):645–665, **2004**.

- Esiste una sequenza di soluzioni (u_κ, v_κ) convergenti, per qualsiasi $T > 0$, in $L^2(\Omega \times (0, T))$ per $\kappa \rightarrow \infty$ ad uno **stato segregato** limitato (u_∞, v_∞) ($d_u \neq d_v$ e CC non stazionarie; soluzione numerica con CC stazionarie).
- Le soluzioni così trovate sono tali che $w = u_\infty - v_\infty$ soddisfa il *free-boundary problem*

$$\begin{cases} w_t - \Delta D(w) = \lambda w(1 - |w|), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ Dw(x, y, t) = d_u \psi(x, y, t) - d_v \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ w(x, y, 0) = u_0(x, y) - v_0(x, y), & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

essendo

$$D(\sigma) = \begin{cases} d_u \sigma, & \text{if } \sigma \geq 0, \\ d_v \sigma, & \text{if } \sigma < 0. \end{cases}$$

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (1/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura & H. Ninomiya,
Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with
Dirichlet boundary conditions, *Nonlinear Analysis. Real World
Applications.*, 5(4):645–665, **2004**.

- Esiste una sequenza di soluzioni (u_κ, v_κ) convergenti, per qualsiasi $T > 0$, in $L^2(\Omega \times (0, T))$ per $\kappa \rightarrow \infty$ ad uno **stato segregato** limitato (u_∞, v_∞) ($d_u \neq d_v$ e CC non stazionarie; soluzione numerica con CC stazionarie).
- Le soluzioni così trovate sono tali che $w = u_\infty - v_\infty$ soddisfa il **free-boundary problem**

$$\begin{cases} w_t - \Delta D(w) = \lambda w(1 - |w|), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ Dw(x, y, t) = d_u \psi(x, y, t) - d_v \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ w(x, y, 0) = u_0(x, y) - v_0(x, y), & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

essendo

$$D(\sigma) = \begin{cases} d_u \sigma, & \text{if } \sigma \geq 0, \\ d_v \sigma, & \text{if } \sigma < 0. \end{cases}$$

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (1/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura & H. Ninomiya, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with Dirichlet boundary conditions, *Nonlinear Analysis. Real World Applications.*, 5(4):645–665, 2004.

- Esiste una sequenza di soluzioni (u_κ, v_κ) convergenti, per qualsiasi $T > 0$, in $L^2(\Omega \times (0, T))$ per $\kappa \rightarrow \infty$ ad uno **stato segregato** limitato (u_∞, v_∞) ($d_u \neq d_v$ e CC non stazionarie; soluzione numerica con CC stazionarie).
- Le soluzioni così trovate sono tali che $w = u_\infty - v_\infty$ soddisfa il **free-boundary problem**

$$\begin{cases} w_t - \Delta D(w) = \lambda w(1 - |w|), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ Dw(x, y, t) = d_u \psi(x, y, t) - d_v \zeta(x, y, t), & \text{su } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ w(x, y, 0) = u_0(x, y) - v_0(x, y), & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

essendo

$$D(\sigma) = \begin{cases} d_u \sigma, & \text{if } \sigma \geq 0, \\ d_v \sigma, & \text{if } \sigma < 0. \end{cases}$$

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (2/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, On long-time dynamics for competition-diffusion systems with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions, *Topological Methods Nonlinear Analysis*, **in press**.

- Nel caso $d_u = d_v$ e CC stazionarie, il sistema può essere ricondotto ad **una sola equazione parabolica** in cui sparisce la dipendenza esplicita da κ .
- L'analisi sul lungo periodo viene effettuata utilizzando la stabilità di Lyapunov ma, a causa del termine κUV , il sistema **non ammette un funzionale di Lyapunov "naturale"** (decrescente lungo le traiettorie del sistema originale) e pertanto un'analisi diretta non è possibile.

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (2/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, On long-time dynamics for competition-diffusion systems with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions, *Topological Methods Nonlinear Analysis*, **in press**.

- Nel caso $d_u = d_v$ e CC stazionarie, il sistema può essere ricondotto ad **una sola equazione parabolica** in cui sparisce la dipendenza esplicita da κ .
- L'analisi sul lungo periodo viene effettuata utilizzando la stabilità di Lyapunov ma, a causa del termine κUV , il sistema **non ammette un funzionale di Lyapunov "naturale"** (decrescente lungo le traiettorie del sistema originale) e pertanto un'analisi diretta non è possibile.

Cosa si sa sul modello quadratico ($\delta = 1$)? (2/2)

E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, On long-time dynamics for competition-diffusion systems with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions, *Topological Methods Nonlinear Analysis*, **in press**.

- Nel caso $d_u = d_v$ e CC stazionarie, il sistema può essere ricondotto ad **una sola equazione parabolica** in cui sparisce la dipendenza esplicita da κ .
- L'analisi sul lungo periodo viene effettuata utilizzando la stabilità di Lyapunov ma, a causa del termine κUV , il sistema **non ammette un funzionale di Lyapunov "naturale"** (decescente lungo le traiettorie del sistema originale) e pertanto un'analisi diretta non è possibile.

Cosa si sa sul modello cubico ($\delta = 2$)?

- Al contrario del modello quadratico, quello cubico ammette un **funzionale di Lyapunov "naturale"**.
- A causa dell'accoppiamento cubico (κUV^2 e κVU^2), il sistema **non può** essere ricondotto ad una sola **equazione parabolica** (*free-boundary problem*) nel limite $\kappa \rightarrow \infty$.

M. Squassina, On the long term spatial segregation for a competition-diffusion system, **submitted, 2007**:

- Per dati iniziali a supporto disgiunto (i.e. segregati) e CC di Dirichlet e stazionarie, per $\kappa \rightarrow \infty$ la **soluzione converge ad uno stato segregato**.
- Attenzione: **CC non omogenee** complicano le cose a causa dei termini di contorno che si originano dall'integrazione per parti.

Cosa si sa sul modello cubico ($\delta = 2$)?

- Al contrario del modello quadratico, quello cubico ammette un **funzionale di Lyapunov “naturale”**.
- A causa dell'accoppiamento cubico (κuv^2 e κvu^2), il sistema **non può** essere ricondotto ad una sola **equazione parabolica** (*free-boundary problem*) nel limite $\kappa \rightarrow \infty$.

M. Squassina, On the long term spatial segregation for a competition-diffusion system, **submitted, 2007**:

- Per dati iniziali a supporto disgiunto (i.e. segregati) e CC di Dirichlet e stazionarie, per $\kappa \rightarrow \infty$ la **soluzione converge ad uno stato segregato**.
- Attenzione: **CC non omogenee** complicano le cose a causa dei termini di contorno che si originano dall'integrazione per parti.

Cosa si sa sul modello cubico ($\delta = 2$)?

- Al contrario del modello quadratico, quello cubico ammette un **funzionale di Lyapunov “naturale”**.
- A causa dell'accoppiamento cubico (κuv^2 e κvu^2), il sistema **non può** essere ricondotto ad una sola **equazione parabolica** (*free-boundary problem*) nel limite $\kappa \rightarrow \infty$.

M. Squassina, On the long term spatial segregation for a competition-diffusion system, **submitted, 2007**:

- Per dati iniziali a supporto disgiunto (i.e. segregati) e CC di Dirichlet e stazionarie, per $\kappa \rightarrow \infty$ la **soluzione converge ad uno stato segregato**.
- Attenzione: **CC non omogenee** complicano le cose a causa dei termini di contorno che si originano dall'integrazione per parti.

Cosa si sa sul modello cubico ($\delta = 2$)?

- Al contrario del modello quadratico, quello cubico ammette un **funzionale di Lyapunov “naturale”**.
- A causa dell'accoppiamento cubico (κuv^2 e κvu^2), il sistema **non può** essere ricondotto ad una sola **equazione parabolica** (*free-boundary problem*) nel limite $\kappa \rightarrow \infty$.

M. Squassina, On the long term spatial segregation for a competition-diffusion system, **submitted, 2007**:

- Per dati iniziali a supporto disgiunto (i.e. segregati) e CC di Dirichlet e stazionarie, per $\kappa \rightarrow \infty$ la **soluzione converge ad uno stato segregato**.
- Attenzione: **CC non omogenee** complicano le cose a causa dei termini di contorno che si originano dall'integrazione per parti.

Cosa si sa sul modello cubico ($\delta = 2$)?

- Al contrario del modello quadratico, quello cubico ammette un **funzionale di Lyapunov “naturale”**.
- A causa dell'accoppiamento cubico (κuv^2 e κvu^2), il sistema **non può** essere ricondotto ad una sola **equazione parabolica** (*free-boundary problem*) nel limite $\kappa \rightarrow \infty$.

M. Squassina, On the long term spatial segregation for a competition-diffusion system, **submitted, 2007**:

- Per dati iniziali a supporto disgiunto (i.e. segregati) e CC di Dirichlet e stazionarie, per $\kappa \rightarrow \infty$ la **soluzione converge ad uno stato segregato**.
- Attenzione: **CC non omogenee** complicano le cose a causa dei termini di contorno che si originano dall'integrazione per parti.

Obiettivi di questo lavoro

- **Simulazioni numeriche** di entrambi i modelli nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri (coefficienti di diffusione) e delle condizioni iniziali (segregate o meno).
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie (interfaccia) in modo immediato, direttamente dalla soluzione numerica, senza ricorrere ad ulteriori equazioni.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione.

È noto che questo integrale deve andare a zero almeno come κ^{-1} , ma si suppone che possa andarci anche più velocemente, i.e. come $\kappa^{-\sigma}$, $\sigma > 1$. Vogliamo vedere **come varia σ** al variare del modello e dei parametri.

Nota: la **determinazione analitica** della velocità di convergenza è un'impresa **molto difficile**.

Obiettivi di questo lavoro

- **Simulazioni numeriche** di entrambi i modelli nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri (coefficienti di diffusione) e delle condizioni iniziali (segregate o meno).
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie (interfaccia) in modo immediato, direttamente dalla soluzione numerica, senza ricorrere ad ulteriori equazioni.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione.

È noto che questo integrale deve andare a zero almeno come κ^{-1} , ma si suppone che possa andarci anche più velocemente, i.e. come $\kappa^{-\sigma}$, $\sigma > 1$. Vogliamo vedere **come varia σ** al variare del modello e dei parametri.

Nota: la **determinazione analitica** della velocità di convergenza è un'impresa **molto difficile**.

Obiettivi di questo lavoro

- **Simulazioni numeriche** di entrambi i modelli nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri (coefficienti di diffusione) e delle condizioni iniziali (segregate o meno).
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie (interfaccia) in modo immediato, direttamente dalla soluzione numerica, senza ricorrere ad ulteriori equazioni.
- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione.

È noto che questo integrale deve andare a zero almeno come κ^{-1} , ma si suppone che possa andarci anche piu' velocemente, i.e. come $\kappa^{-\sigma}$, $\sigma > 1$. Vogliamo vedere **come varia σ** al variare del modello e dei parametri.

Nota: la **determinazione analitica** della velocità di convergenza è un'impresa **molto difficile**.

Obiettivi di questo lavoro

- **Simulazioni numeriche** di entrambi i modelli nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri (coefficienti di diffusione) e delle condizioni iniziali (segregate o meno).
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie (interfaccia) in modo immediato, direttamente dalla soluzione numerica, senza ricorrere ad ulteriori equazioni.
- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione.

È noto che questo integrale deve andare a zero almeno come κ^{-1} , ma si suppone che possa andarci anche più velocemente, i.e. come $\kappa^{-\sigma}$, $\sigma > 1$. Vogliamo vedere **come varia σ** al variare del modello e dei parametri.

Nota: la **determinazione analitica** della velocità di convergenza è un'impresa **molto difficile**.

Obiettivi di questo lavoro

- **Simulazioni numeriche** di entrambi i modelli nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri (coefficienti di diffusione) e delle condizioni iniziali (segregate o meno).
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie (interfaccia) in modo immediato, direttamente dalla soluzione numerica, senza ricorrere ad ulteriori equazioni.
- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione.

È noto che questo integrale deve andare a zero almeno come κ^{-1} , ma si suppone che possa andarci anche più velocemente, i.e. come $\kappa^{-\sigma}$, $\sigma > 1$. Vogliamo vedere **come varia σ** al variare del modello e dei parametri.

Nota: la **determinazione analitica** della velocità di convergenza è un'impresa **molto difficile**.

Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - **Il metodo numerico**
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Discretizzazione

- **Differenze finite centrate** (second'ordine) sia nello spazio che nel tempo su griglia non equispaziata.
- **Discretizzazione spaziale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{h}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\dots, u_l, v_l, \dots]^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}) &= [\dots, d_u \Delta u_l + \lambda u_l (1 - u_l) - \kappa u_l v_l^\delta, d_v \Delta v_l + \lambda v_l (1 - v_l) - \kappa v_l u_l^\delta, \dots]^T, \\ &\text{con } l = i + N_x(j - 1), \quad i = 1 \dots N_x, \quad j = 1 \dots N_y. \end{aligned}$$

- **Discretizzazione temporale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{h}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}^n)] \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

- Codice scritto per $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ variabili, risultati ottenuti per $N_x = N_y = 120$ ($\Delta x = \Delta y \approx 8.265 \cdot 10^{-3}$) e $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

Discretizzazione

- **Differenze finite centrate** (second'ordine) sia nello spazio che nel tempo su griglia non equispaziata.
- **Discretizzazione spaziale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{h}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\dots, u_l, v_l, \dots]^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}) &= [\dots, d_u \Delta u_l + \lambda u_l (1 - u_l) - \kappa u_l v_l^\delta, d_v \Delta v_l + \lambda v_l (1 - v_l) - \kappa v_l u_l^\delta, \dots]^T, \\ &\text{con } l = i + N_x(j - 1), \quad i = 1 \dots N_x, \quad j = 1 \dots N_y. \end{aligned}$$

- **Discretizzazione temporale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{h}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}^n)] \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

- Codice scritto per $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ variabili, risultati ottenuti per $N_x = N_y = 120$ ($\Delta x = \Delta y \approx 8.265 \cdot 10^{-3}$) e $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

Discretizzazione

- **Differenze finite centrate** (second'ordine) sia nello spazio che nel tempo su griglia non equispaziata.
- **Discretizzazione spaziale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{h}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\dots, u_l, v_l, \dots]^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}) &= [\dots, d_u \Delta u_l + \lambda u_l (1 - u_l) - \kappa u_l v_l^\delta, d_v \Delta v_l + \lambda v_l (1 - v_l) - \kappa v_l u_l^\delta, \dots]^T, \\ &\text{con } l = i + N_x(j - 1), \quad i = 1 \dots N_x, \quad j = 1 \dots N_y. \end{aligned}$$

- **Discretizzazione temporale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{h}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}^n)] \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

- Codice scritto per $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ variabili, risultati ottenuti per $N_x = N_y = 120$ ($\Delta x = \Delta y \approx 8.265 \cdot 10^{-3}$) e $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

Discretizzazione

- **Differenze finite centrate** (second'ordine) sia nello spazio che nel tempo su griglia non equispaziata.
- **Discretizzazione spaziale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{h}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\dots, u_l, v_l, \dots]^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}) &= [\dots, d_u \Delta u_l + \lambda u_l (1 - u_l) - \kappa u_l v_l^\delta, d_v \Delta v_l + \lambda v_l (1 - v_l) - \kappa v_l u_l^\delta, \dots]^T, \\ &\text{con } l = i + N_x(j - 1), \quad i = 1 \dots N_x, \quad j = 1 \dots N_y. \end{aligned}$$

- **Discretizzazione temporale**

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{h}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}^n)] \\ \mathbf{u}(\Omega, 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

- Codice scritto per $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ variabili, risultati ottenuti per $N_x = N_y = 120$ ($\Delta x = \Delta y \approx 8.265 \cdot 10^{-3}$) e $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

Strategie numeriche

- **Metodo di Newton** con calcolo esplicito (analitico) dello Jacobiano ad ogni iterazione. Convergenza se $\|\mathbf{u}_r^{n+1} - \mathbf{u}_{r-1}^{n+1}\|_2 < 10^{-12}$.
- **Soluzione stazionaria** raggiunta se $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2 < \epsilon$, $\epsilon = 10^{-4}$.
- **Matrice a banda, molto sparsa**, i.e. il numero degli elementi diversi da zero è $\mathcal{O}(m)$ invece di $\mathcal{O}(m^2)$. Nel nostro caso $m = 2N_x N_y = 28800 \Rightarrow m^2 = 829440000 \approx 8.3 \cdot 10^8$. Pertanto:
 - **Formato CSR** (Compressed Storage Row): richiede solo un array di *double* e un array di *integer* di lunghezza pari al numero di elementi non-zero, e un array di *integer* pari alla dimensione del sistema m .
 - Invece della decomposizione LU, **solutore semi-iterativo** per matrici sparse e non simmetriche, ovvero BiCGStab (BiConiugate Gradient Stabilized).

Strategie numeriche

- **Metodo di Newton** con calcolo esplicito (analitico) dello Jacobiano ad ogni iterazione. Convergenza se $\|\mathbf{u}_r^{n+1} - \mathbf{u}_{r-1}^{n+1}\|_2 < 10^{-12}$.
- **Soluzione stazionaria** raggiunta se $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2 < \epsilon$, $\epsilon = 10^{-4}$.
- **Matrice a banda, molto sparsa**, i.e. il numero degli elementi diversi da zero è $\mathcal{O}(m)$ invece di $\mathcal{O}(m^2)$. Nel nostro caso $m = 2N_x N_y = 28800 \Rightarrow m^2 = 829440000 \approx 8.3 \cdot 10^8$. Pertanto:
 - **Formato CSR** (Compressed Storage Row): richiede solo un array di *double* e un array di *integer* di lunghezza pari al numero di elementi non-zero, e un array di *integer* pari alla dimensione del sistema m .
 - Invece della decomposizione LU, **solutore semi-iterativo** per matrici sparse e non simmetriche, ovvero BiCGStab (BiConiugate Gradient Stabilized).

Strategie numeriche

- **Metodo di Newton** con calcolo esplicito (analitico) dello Jacobiano ad ogni iterazione. Convergenza se $\|\mathbf{u}_r^{n+1} - \mathbf{u}_{r-1}^{n+1}\|_2 < 10^{-12}$.
- **Soluzione stazionaria** raggiunta se $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2 < \epsilon$, $\epsilon = 10^{-4}$.
- **Matrice a banda, molto sparsa**, i.e. il numero degli elementi diversi da zero è $\mathcal{O}(m)$ invece di $\mathcal{O}(m^2)$. Nel nostro caso $m = 2N_x N_y = 28800 \Rightarrow m^2 = 829440000 \approx 8.3 \cdot 10^8$. Pertanto:
 - **Formato CSR** (Compressed Storage Row): richiede solo un array di *double* e un array di *integer* di lunghezza pari al numero di elementi non-zero, e un array di *integer* pari alla dimensione del sistema m .
 - Invece della decomposizione LU, **solutore semi-iterativo** per matrici sparse e non simmetriche, ovvero BiCGStab (BiConiugate Gradient Stabilized).

Strategie numeriche

- **Metodo di Newton** con calcolo esplicito (analitico) dello Jacobiano ad ogni iterazione. Convergenza se $\|\mathbf{u}_r^{n+1} - \mathbf{u}_{r-1}^{n+1}\|_2 < 10^{-12}$.
- **Soluzione stazionaria** raggiunta se $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2 < \epsilon$, $\epsilon = 10^{-4}$.
- **Matrice a banda, molto sparsa**, i.e. il numero degli elementi diversi da zero è $\mathcal{O}(m)$ invece di $\mathcal{O}(m^2)$. Nel nostro caso $m = 2N_x N_y = 28800 \Rightarrow m^2 = 829440000 \approx 8.3 \cdot 10^8$. Pertanto:
 - **Formato CSR** (Compressed Storage Row): richiede solo un array di *double* e un array di *integer* di lunghezza pari al numero di elementi non-zero, e un array di *integer* pari alla dimensione del sistema m .
 - Invece della decomposizione LU, **solutore semi-iterativo** per matrici sparse e non simmetriche, ovvero BiCGStab (BiConiugate Gradient Stabilized).

Strategie numeriche

- **Metodo di Newton** con calcolo esplicito (analitico) dello Jacobiano ad ogni iterazione. Convergenza se $\|\mathbf{u}_r^{n+1} - \mathbf{u}_{r-1}^{n+1}\|_2 < 10^{-12}$.
- **Soluzione stazionaria** raggiunta se $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2 < \epsilon$, $\epsilon = 10^{-4}$.
- **Matrice a banda, molto sparsa**, i.e. il numero degli elementi diversi da zero è $\mathcal{O}(m)$ invece di $\mathcal{O}(m^2)$. Nel nostro caso $m = 2N_x N_y = 28800 \Rightarrow m^2 = 829440000 \approx 8.3 \cdot 10^8$. Pertanto:
 - **Formato CSR** (Compressed Storage Row): richiede solo un array di *double* e un array di *integer* di lunghezza pari al numero di elementi non-zero, e un array di *integer* pari alla dimensione del sistema m .
 - Invece della decomposizione LU, **solutore semi-iterativo** per matrici sparse e non simmetriche, ovvero BiCGStab (BiConiugate Gradient Stabilized).

Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 **Discretizzazione e strategie numeriche**
 - Il metodo numerico
 - **Condizioni iniziali e al contorno**
- 3 Risultati numerici
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Condizioni al contorno

$$\psi(x, 0, t) = \begin{cases} \beta - \frac{\beta}{\alpha}x, & \text{if } 0 \leq x < \alpha, \\ 0, & \text{if } \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi(x, 1, t) = \begin{cases} \beta - \frac{\beta}{1-\alpha}x, & \text{if } 0 \leq x < 1 - \alpha, \\ 0, & \text{if } 1 - \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi(0, y, t) = \beta,$$

$$\psi(1, y, t) = 0,$$

$$\zeta(x, 0, t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x < \alpha, \\ -\frac{\alpha\beta}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha}x, & \text{if } \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\zeta(x, 1, t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x < 1 - \alpha, \\ \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}x, & \text{if } 1 - \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\zeta(0, y, t) = 0,$$

$$\zeta(1, y, t) = \beta.$$

Condizioni al contorno

$$\psi(x, 0, t) = \begin{cases} \beta - \frac{\beta}{\alpha}x, & \text{if } 0 \leq x < \alpha, \\ 0, & \text{if } \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi(x, 1, t) = \begin{cases} \beta - \frac{\beta}{1-\alpha}x, & \text{if } 0 \leq x < 1 - \alpha, \\ 0, & \text{if } 1 - \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi(0, y, t) = \beta,$$

$$\psi(1, y, t) = 0,$$

$$\zeta(x, 0, t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x < \alpha, \\ -\frac{\alpha\beta}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha}x, & \text{if } \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\zeta(x, 1, t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x < 1 - \alpha, \\ \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}x, & \text{if } 1 - \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\zeta(0, y, t) = 0,$$

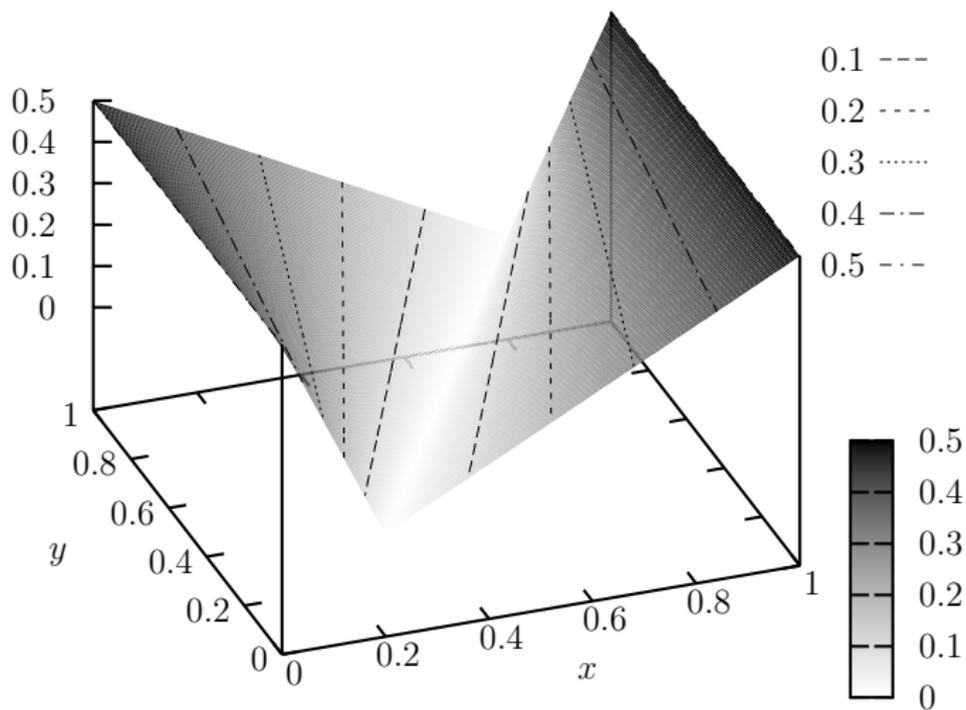
$$\zeta(1, y, t) = \beta.$$

Condizioni iniziali

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq y \leq \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha}, \\ \beta \left(1 - \frac{x}{y(1 - 2\alpha) + \alpha} \right), & \text{if } \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha} < y \leq 1, \end{cases}$$

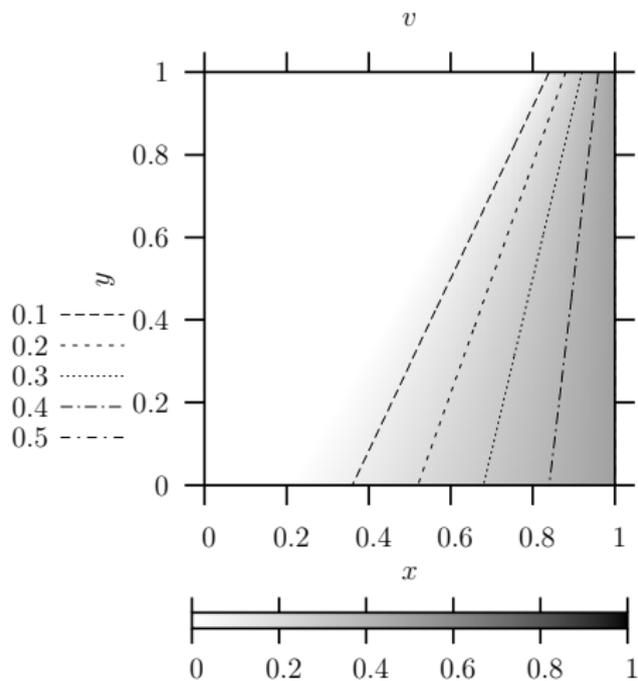
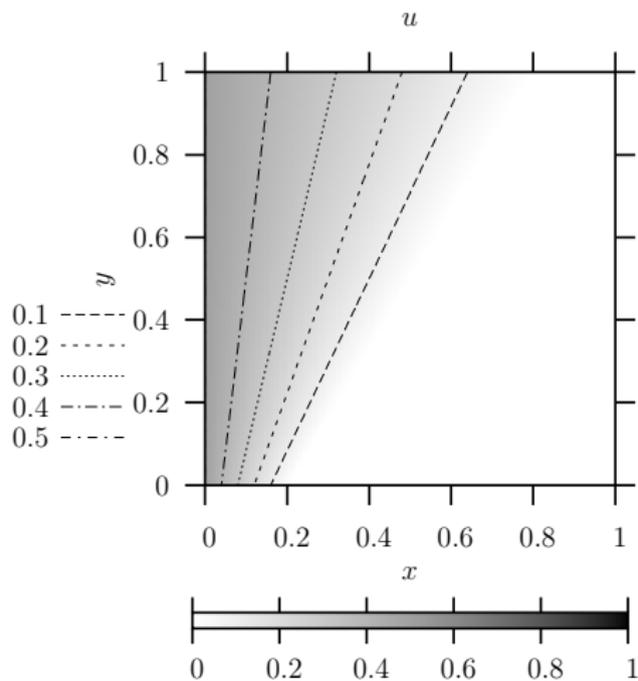
$$v_0(x, y) = \begin{cases} \frac{x - (y(1 - 2\alpha) + \alpha)}{1 - (y(1 - 2\alpha) + \alpha)} \beta, & \text{if } 0 \leq y \leq \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha}, \\ 0, & \text{if } \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha} < y \leq 1. \end{cases}$$

Condizioni iniziali segregate.



$\alpha = 0.2, \beta = 0.5, u$ a destra, v a sinistra.

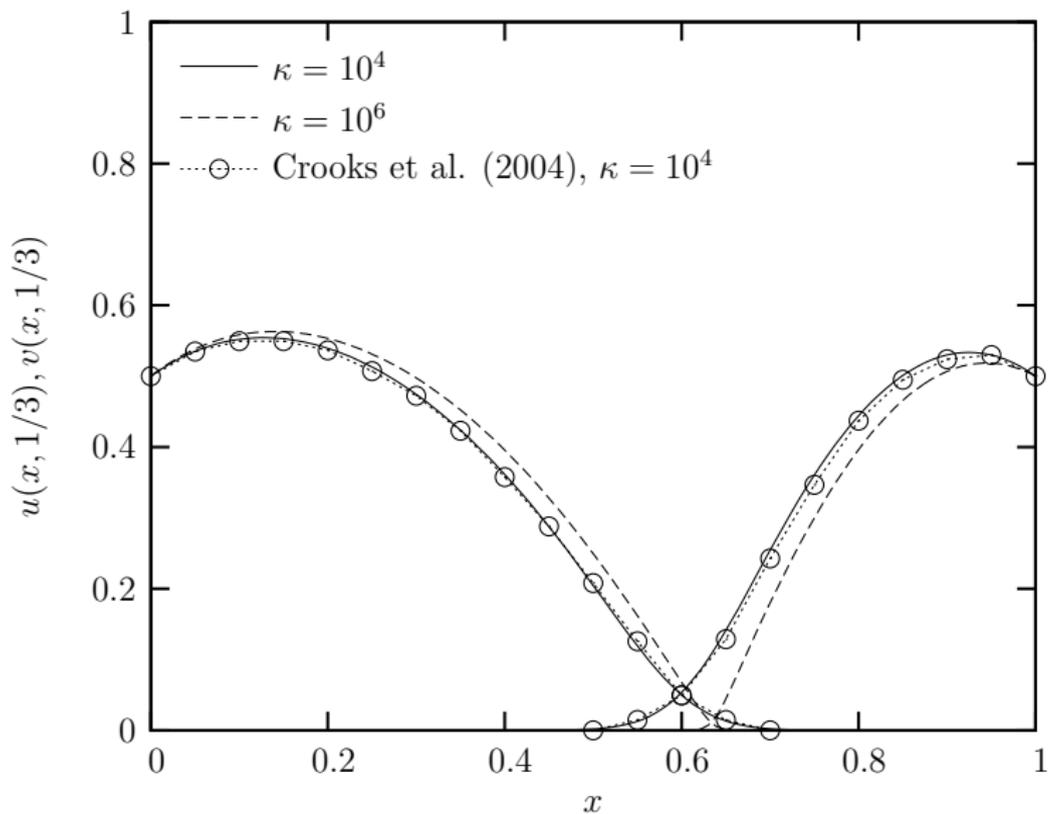
Condizioni iniziali segregate.



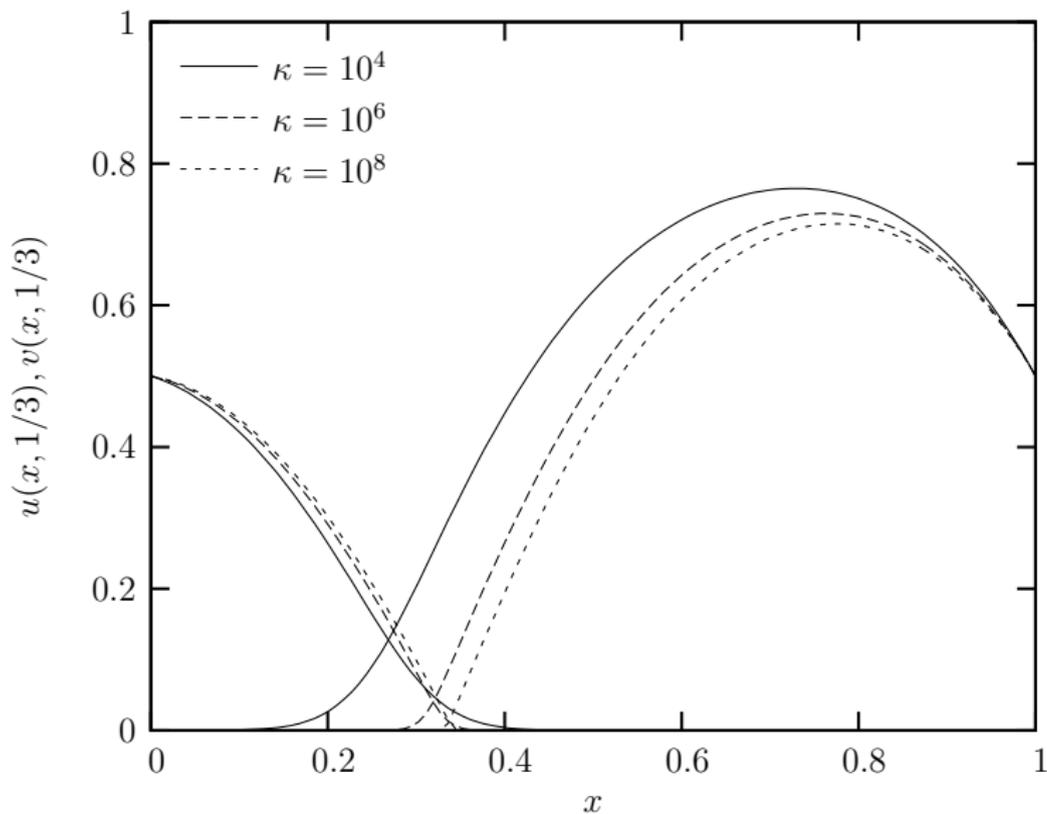
Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici**
 - **Distribuzione spaziale delle popolazioni**
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Sezioni sol. stazionaria: $\delta = 1, d_u = 1.5, d_v = 1.0, \lambda = 50.$



Sezioni sol. stazionaria: $\delta = 2$, $d_u = 1.5$, $d_v = 1.0$, $\lambda = 50$.



Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 Risultati numerici**
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking**
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

La linea di confine (interfaccia)

Domanda

Anziché ricorrere a metodi analitici per determinare la linea di confine tra le due specie (e il caso cubico?), è possibile ricavarla facilmente dalla **soluzione numerica**? Se sì, come?

Idea

- Per $\kappa, t \rightarrow \infty$ (grandi), la soluzione numerica tende ad uno stato segregato, i.e. la regione in cui u e v sono **entrambe non nulle** è relativamente sottile.
- La quantità $\varphi(x, y) := u^2(x, y)v^2(x, y)$ è un ottimo indicatore delle **zone di sovrapposizione** di u e v ed è una **funzione** piuttosto **regolare** di (x, y) .
- La linea γ che congiunge **i massimi di $\varphi(x, y)$ a y fissata** è una buona approssimazione dell'interfaccia tra le due specie per quel particolare valore di κ e t . In formule:

$$y \mapsto \gamma(y), \quad \varphi(\gamma(y), y) := \max_{\xi \in [0,1]} \varphi(\xi, y).$$

La linea di confine (interfaccia)

Domanda

Anziché ricorrere a metodi analitici per determinare la linea di confine tra le due specie (e il caso cubico?), è possibile ricavarla facilmente dalla **soluzione numerica**? Se sì, come?

Idea

- Per $\kappa, t \rightarrow \infty$ (grandi), la soluzione numerica tende ad uno stato segregato, i.e. la regione in cui u e v sono **entrambe non nulle** è relativamente sottile.
- La quantità $\varphi(x, y) := u^2(x, y)v^2(x, y)$ è un ottimo indicatore delle **zone di sovrapposizione** di u e v ed è una **funzione** piuttosto **regolare** di (x, y) .
- La linea γ che congiunge **i massimi di $\varphi(x, y)$ a y fissata** è una buona approssimazione dell'interfaccia tra le due specie per quel particolare valore di κ e t . In formule:

$$y \mapsto \gamma(y), \quad \varphi(\gamma(y), y) := \max_{\xi \in [0,1]} \varphi(\xi, y).$$

La linea di confine (interfaccia)

Domanda

Anziché ricorrere a metodi analitici per determinare la linea di confine tra le due specie (e il caso cubico?), è possibile ricavarla facilmente dalla **soluzione numerica**? Se sì, come?

Idea

- Per $\kappa, t \rightarrow \infty$ (grandi), la soluzione numerica tende ad uno stato segregato, i.e. la regione in cui u e v sono **entrambe non nulle** è relativamente sottile.
- La quantità $\varphi(x, y) := u^2(x, y)v^2(x, y)$ è un ottimo indicatore delle **zone di sovrapposizione** di u e v ed è una **funzione** piuttosto **regolare** di (x, y) .
- La linea γ che congiunge **i massimi di $\varphi(x, y)$ a y fissata** è una buona approssimazione dell'interfaccia tra le due specie per quel particolare valore di κ e t . In formule:

$$y \mapsto \gamma(y), \quad \varphi(\gamma(y), y) := \max_{\xi \in [0, 1]} \varphi(\xi, y).$$

La linea di confine (interfaccia)

Domanda

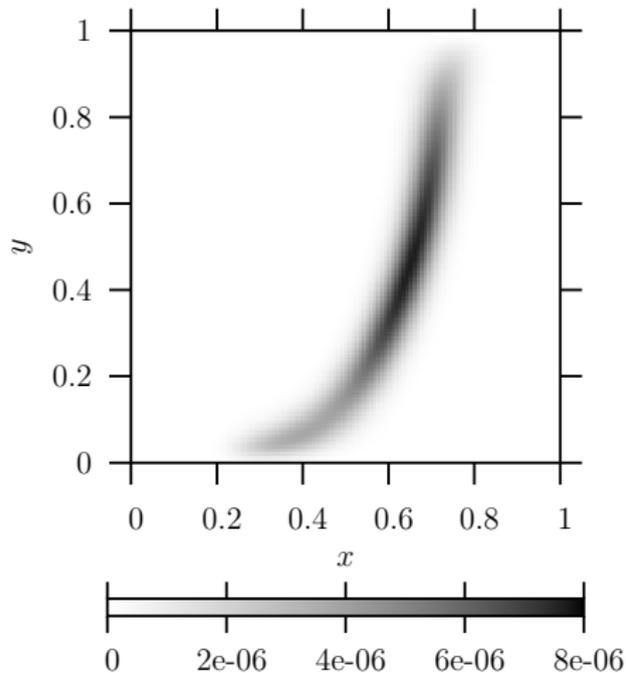
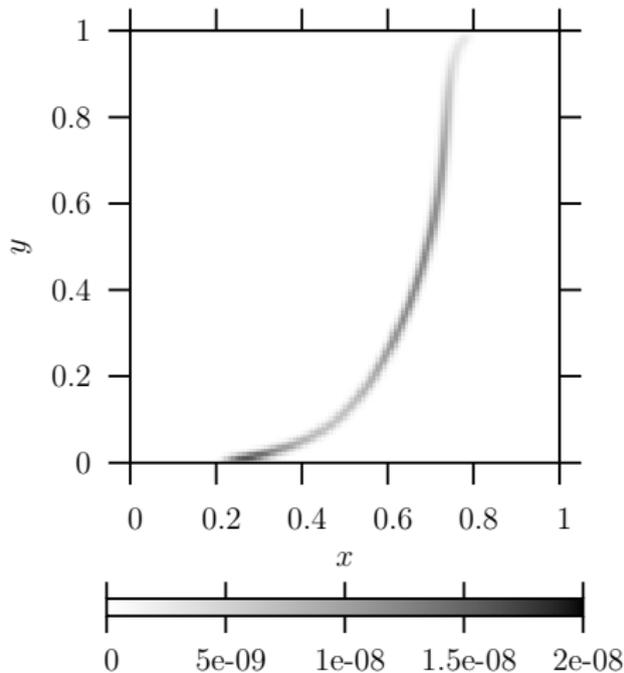
Anziché ricorrere a metodi analitici per determinare la linea di confine tra le due specie (e il caso cubico?), è possibile ricavarla facilmente dalla **soluzione numerica**? Se sì, come?

Idea

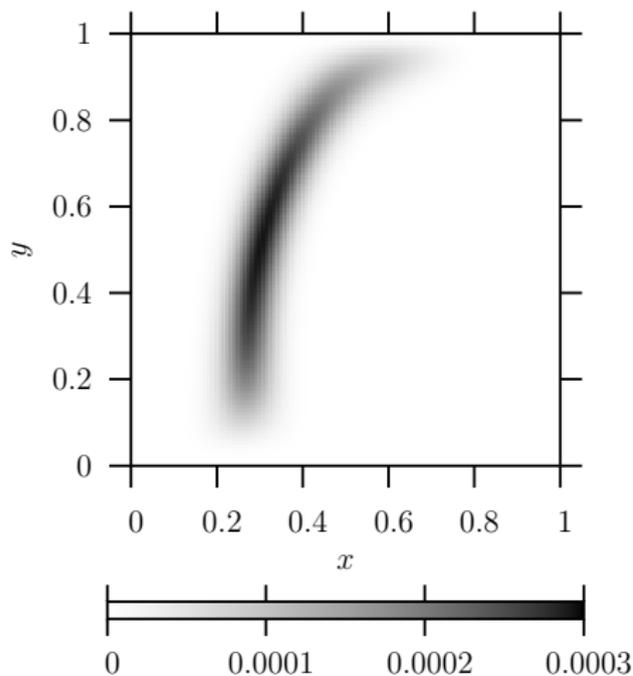
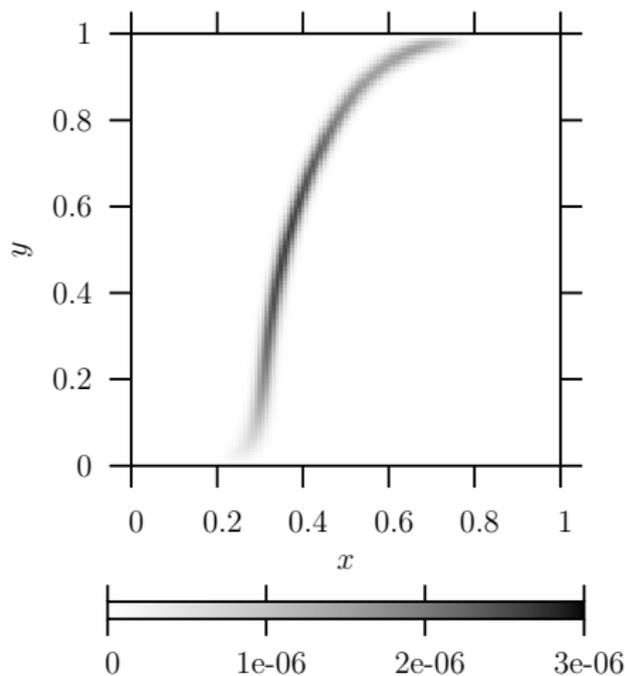
- Per $\kappa, t \rightarrow \infty$ (grandi), la soluzione numerica tende ad uno stato segregato, i.e. la regione in cui u e v sono **entrambe non nulle** è relativamente sottile.
- La quantità $\varphi(x, y) := u^2(x, y)v^2(x, y)$ è un ottimo indicatore delle **zone di sovrapposizione** di u e v ed è una **funzione** piuttosto **regolare** di (x, y) .
- La linea γ che congiunge **i massimi di $\varphi(x, y)$ a y fissata** è una buona approssimazione dell'interfaccia tra le due specie per quel particolare valore di κ e t . In formule:

$$y \mapsto \gamma(y), \quad \varphi(\gamma(y), y) := \max_{\xi \in [0, 1]} \varphi(\xi, y).$$

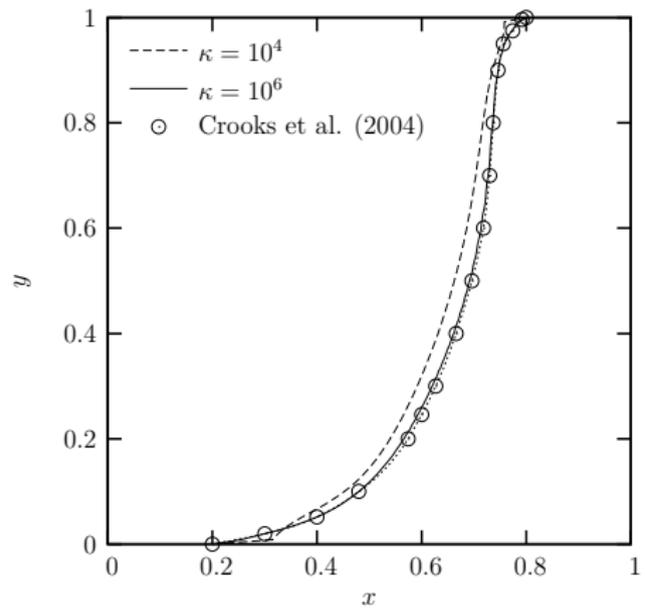
Soluzione stazionaria: $\delta = 1$, $d_u = 1.5$, $d_v = 1.0$, $\lambda = 50$.

 $\kappa = 10^4$

 $\kappa = 10^6$


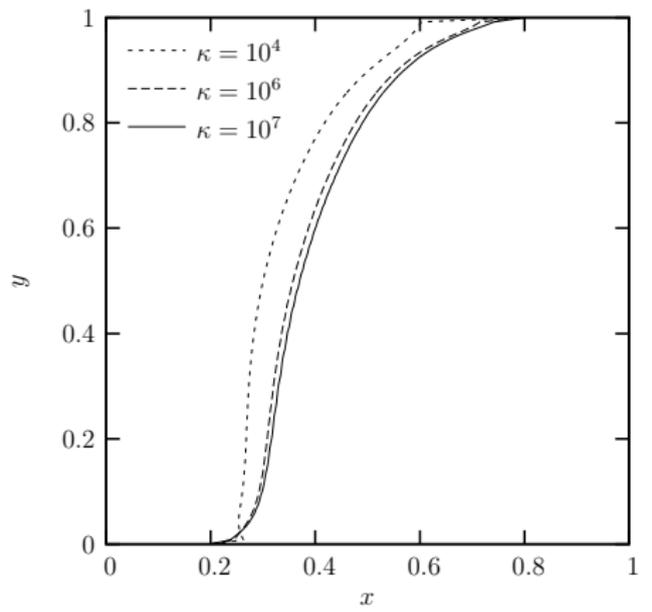
Soluzione stazionaria: $\delta = 2$, $d_u = 1.5$, $d_v = 1.0$, $\lambda = 50$.

 $\kappa = 10^4$  $\kappa = 10^6$ 

Interfaccia, soluzione stazionaria: $d_u = 1.5, d_v = 1.0, \lambda = 50.$



$\delta = 1$

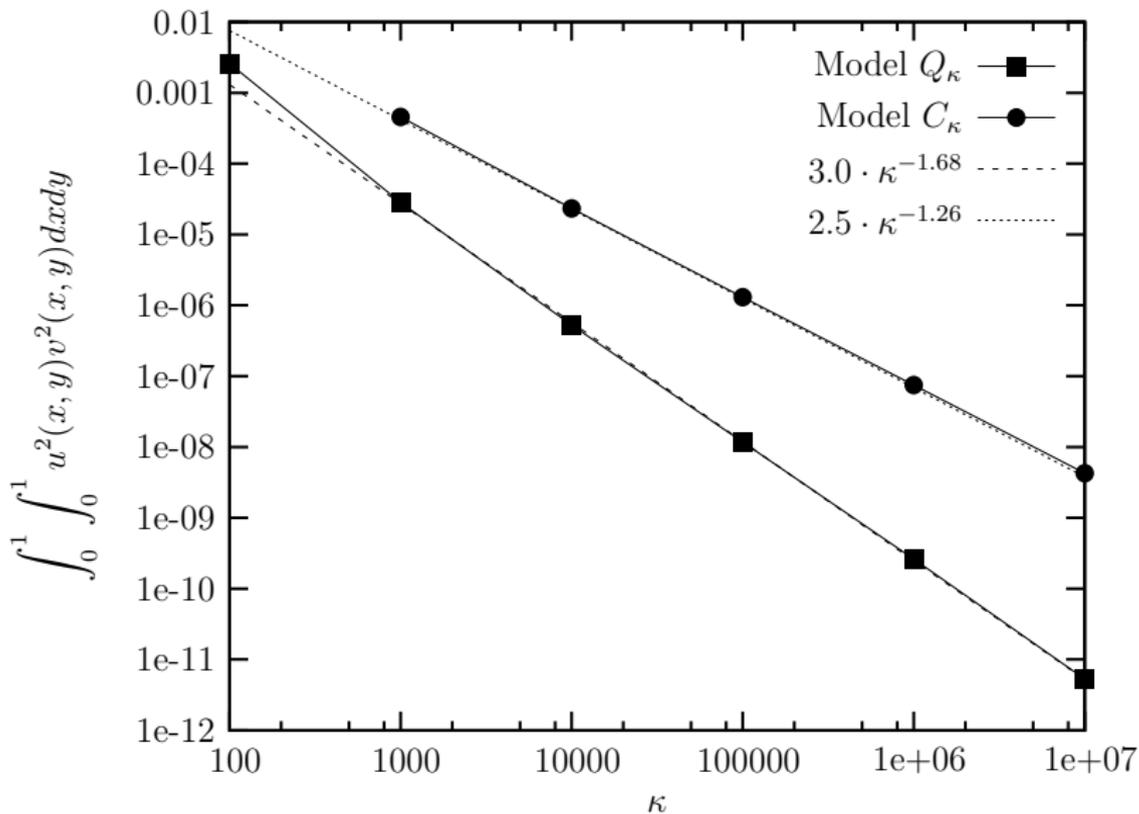


$\delta = 2$

Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 **Risultati numerici**
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - **Velocità di segregazione**
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

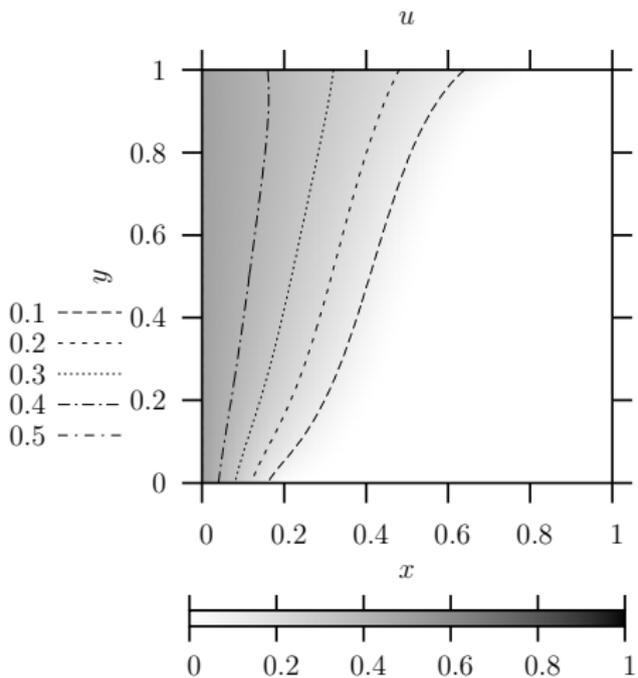
Sezioni sol. stazionaria: $\delta = 1, 2$; $d_u = 1.5$, $d_v = 1.0$, $\lambda = 50$.



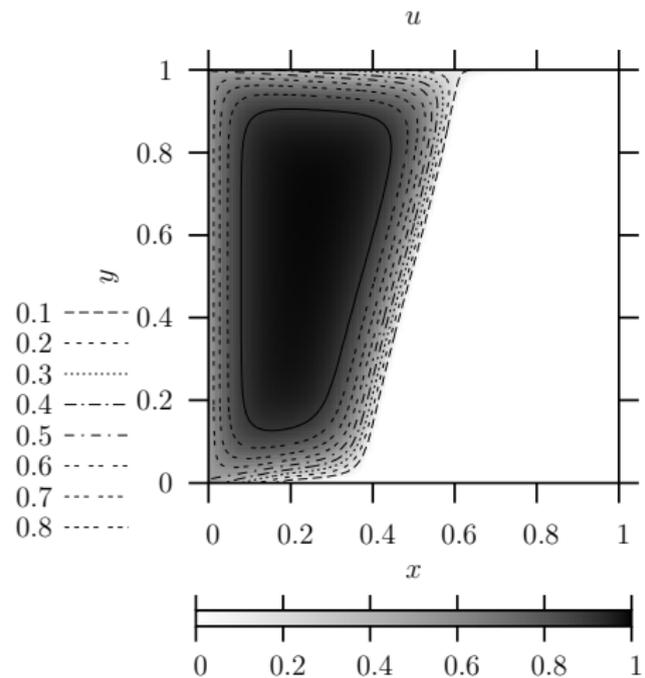
Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 **Risultati numerici**
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - **Dipendenza dai coefficienti di diffusione**
 - Dati iniziali non segregati
- 4 Conclusioni

Soluzione stazionaria: $\delta = 1, \kappa = 10^6, \lambda = 50.$

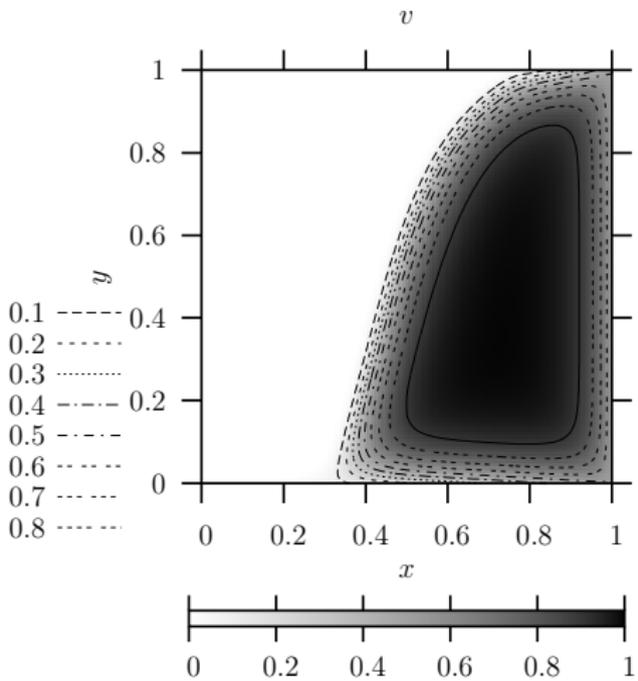
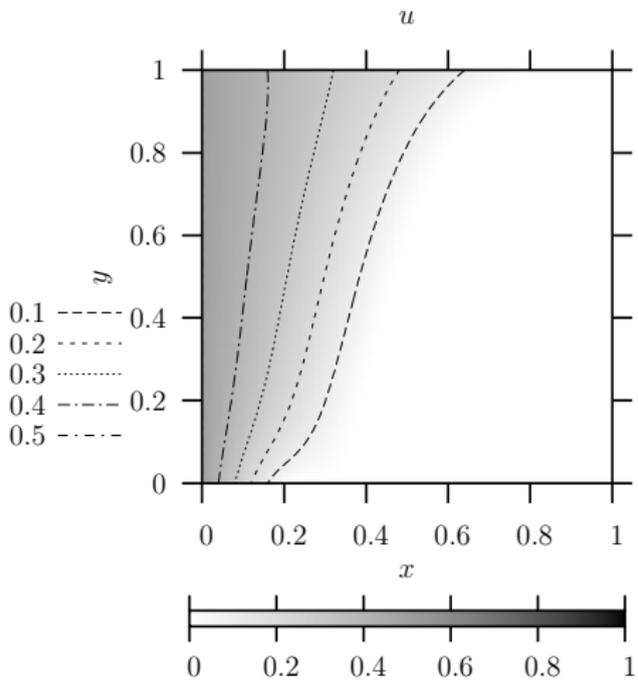


$d_u = d_v = 10$

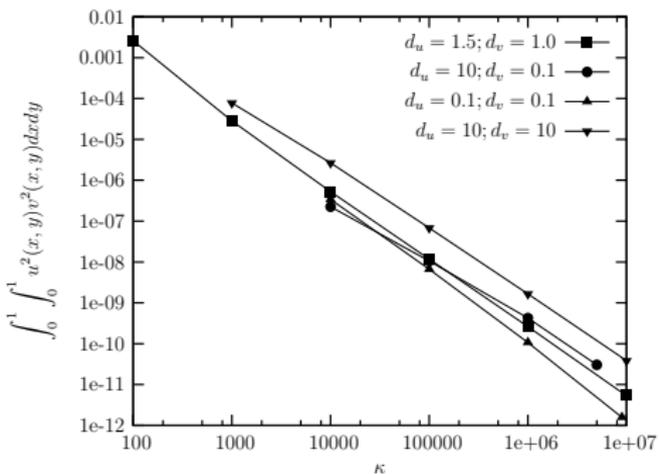


$d_u = d_v = 0.1$

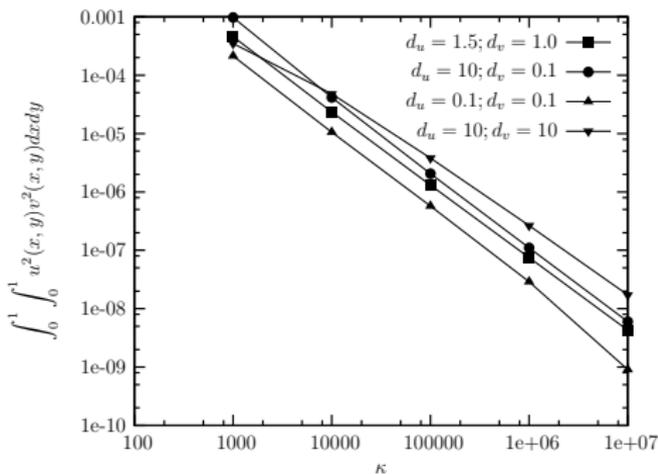
Soluzione stazionaria: $\delta = 2, \kappa = 10^6, d_u = 10, d_v = 0.1, \lambda = 50.$



Velocità di segregazione: $d_u = 1.5, d_v = 1.0, \lambda = 50.$



$\delta = 1$

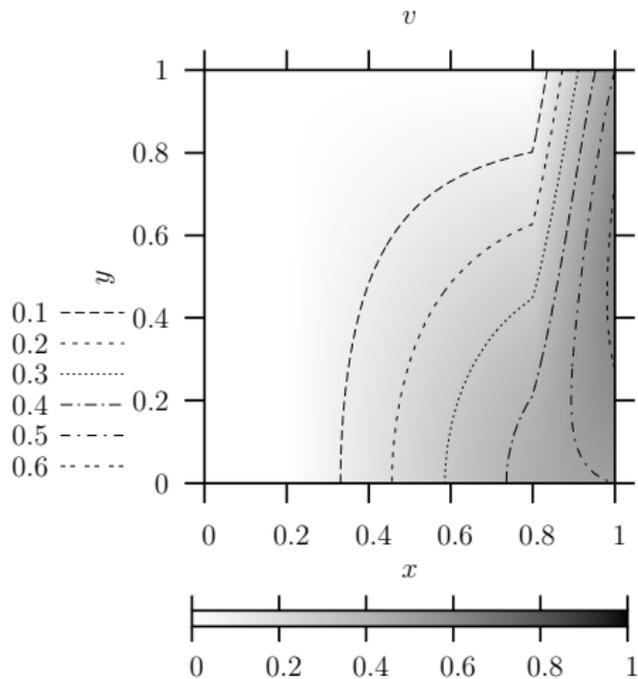
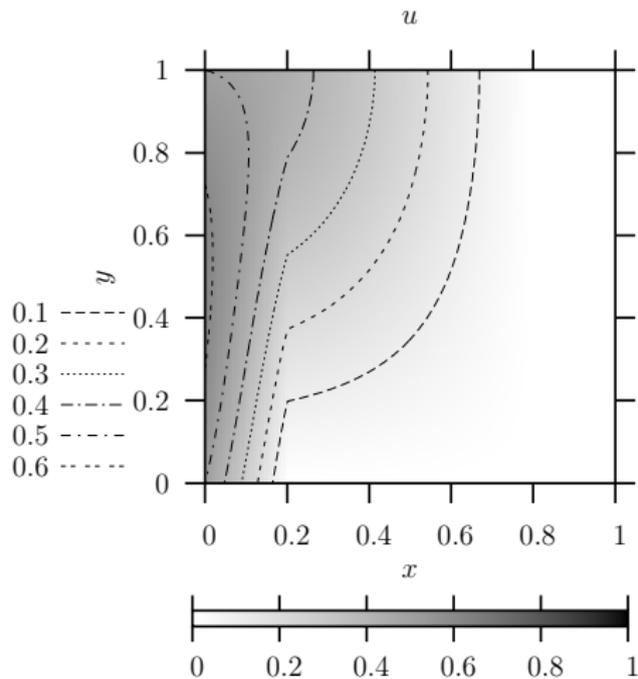


$\delta = 2$

Agenda

- 1 Origine del problema
 - Un po' di storia
 - Formulazione del problema
- 2 Discretizzazione e strategie numeriche
 - Il metodo numerico
 - Condizioni iniziali e al contorno
- 3 **Risultati numerici**
 - Distribuzione spaziale delle popolazioni
 - Front tracking
 - Velocità di segregazione
 - Dipendenza dai coefficienti di diffusione
 - **Dati iniziali non segregati**
- 4 Conclusioni

Dati iniziali non segregati.



Conclusioni

- Approccio numerico al problema di **competizione-diffusione** per due specie altamente competitive su un territorio bidimensionale: il **calcolo** può essere **fatto in modo efficiente**.
- **Confronto tra due modelli** nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri e delle condizioni iniziali: il modello cubico può essere interpretato come quello quadratico con competizione inter-specifica variabile $\kappa(x, y)$.
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie direttamente dalla soluzione numerica: si **riproducono** fedelmente i **risultati analitici**.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_\kappa(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_\kappa^2(x, y, t) v_\kappa^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione: la segregazione avviene ad una **velocità maggiore di κ^{-1}** .

- Il problema è governato dalle **condizioni al contorno** e non dalle condizioni iniziali.

Conclusioni

- Approccio numerico al problema di **competizione-diffusione** per due specie altamente competitive su un territorio bidimensionale: il **calcolo** può essere **fatto in modo efficiente**.
- **Confronto tra due modelli** nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri e delle condizioni iniziali: il modello cubico può essere interpretato come quello quadratico con competizione inter-specifica variabile $\kappa(x, y)$.
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie direttamente dalla soluzione numerica: si **riproducono** fedelmente i **risultati analitici**.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_\kappa(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_\kappa^2(x, y, t) v_\kappa^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione: la segregazione avviene ad una **velocità maggiore di κ^{-1}** .

- Il problema è governato dalle **condizioni al contorno** e non dalle condizioni iniziali.

Conclusioni

- Approccio numerico al problema di **competizione-diffusione** per due specie altamente competitive su un territorio bidimensionale: il **calcolo** può essere **fatto in modo efficiente**.
- **Confronto tra due modelli** nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri e delle condizioni iniziali: il modello cubico può essere interpretato come quello quadratico con competizione inter-specifica variabile $\kappa(x, y)$.
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie direttamente dalla soluzione numerica: si **riproducono** fedelmente i **risultati analitici**.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_\kappa(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_\kappa^2(x, y, t) v_\kappa^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione: la segregazione avviene ad una **velocità maggiore di κ^{-1}** .

- Il problema è governato dalle **condizioni al contorno** e non dalle condizioni iniziali.

Conclusioni

- Approccio numerico al problema di **competizione-diffusione** per due specie altamente competitive su un territorio bidimensionale: il **calcolo** può essere **fatto in modo efficiente**.
- **Confronto tra due modelli** nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri e delle condizioni iniziali: il modello cubico può essere interpretato come quello quadratico con competizione inter-specifica variabile $\kappa(x, y)$.
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie direttamente dalla soluzione numerica: si **riproducono** fedelmente i **risultati analitici**.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_\kappa(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_\kappa^2(x, y, t) v_\kappa^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione: la segregazione avviene ad una **velocità maggiore di κ^{-1}** .

- Il problema è governato dalle **condizioni al contorno** e non dalle condizioni iniziali.

Conclusioni

- Approccio numerico al problema di **competizione-diffusione** per due specie altamente competitive su un territorio bidimensionale: il **calcolo** può essere **fatto in modo efficiente**.
- **Confronto tra due modelli** nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri e delle condizioni iniziali: il modello cubico può essere interpretato come quello quadratico con competizione inter-specifica variabile $\kappa(x, y)$.
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie direttamente dalla soluzione numerica: si **riproducono** fedelmente i **risultati analitici**.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione: la segregazione avviene ad una **velocità maggiore di κ^{-1}** .

- Il problema è governato dalle **condizioni al contorno** e non dalle condizioni iniziali.

Conclusioni

- Approccio numerico al problema di **competizione-diffusione** per due specie altamente competitive su un territorio bidimensionale: il **calcolo** può essere **fatto in modo efficiente**.
- **Confronto tra due modelli** nel limite $\kappa, t \rightarrow \infty$ al variare dei parametri e delle condizioni iniziali: il modello cubico può essere interpretato come quello quadratico con competizione inter-specifica variabile $\kappa(x, y)$.
- Determinazione della **linea di confine** tra le due specie direttamente dalla soluzione numerica: si **riproducono** fedelmente i **risultati analitici**.

- **Calcolo**, per entrambi i modelli, **dell'integrale**

$$J_{\kappa}(t) = \int_0^1 \int_0^1 u_{\kappa}^2(x, y, t) v_{\kappa}^2(x, y, t) dx dy,$$

che rappresenta una misura della velocità di segregazione: la segregazione avviene ad una **velocità maggiore di κ^{-1}** .

- Il problema è governato dalle **condizioni al contorno** e non dalle condizioni iniziali.

Domande?



Riferimento

M. Squassina & S. Zuccher, Numerical computations for the spatial segregation limit of some 2D competition-diffusion systems. Submitted, 2007.

Domande?



Riferimento

M. Squassina & S. Zuccher, Numerical computations for the spatial segregation limit of some 2D competition-diffusion systems. Submitted, 2007.