

# Traslazioni

Debora Botturi

ALTAIR

<http://metropolis.sci.univr.it>



## Introduzione

- Argomenti
- Osservazioni
- Velocità ed accelerazione di una massa che trasla
- Esempio: massa che trasla con condizioni iniziali date

## Modellazione

---

# Introduzione



# Argomenti

Introduzione

● Argomenti

- Osservazioni
- Velocità ed accelerazione di una massa che trasla
- Esempio: massa che trasla con condizioni iniziali date

Modellazione

- Leggi di base del moto;
- Gravità, inerzia, molle, smorzatori, cavi e pulegge, frizioni, etc;
- Tecniche di analisi per sistemi;
- Progettazione

Obiettivo: ricavare equazioni differenziali che descrivono i sistemi traslazionali.



# Osservazioni

## Introduzione

### ● Argomenti

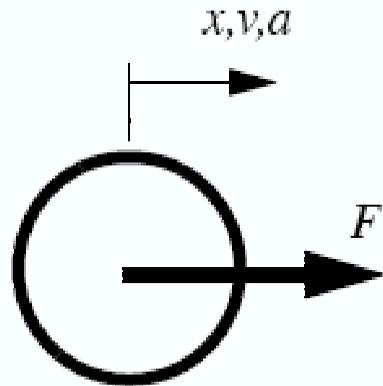
### ● Osservazioni

- Velocità ed accelerazione di una massa che trasla
- Esempio: massa che trasla con condizioni iniziali date

## Modellazione

- Se velocità ed accelerazione di un corpo sono zero allora il corpo si dice statico;
- Se le forze applicate ad un corpo sono bilanciate, e quindi si cancellano tra loro, il corpo si dice non accelerato;
- Al contrario se le forze non sono bilanciate il corpo sarà accelerato;
- Se tutte le forze agiscono sul centro di massa il corpo trasla;
- Le forze che non agiscono sul centro di massa del corpo causano una rotazione.

# Velocità ed accelerazione di una massa che trasla



*equations of motion*

$$v(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)x(t) \quad (1)$$

$$a(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)v(t) \quad (2)$$

*OR*

$$x(t) = \int v(t)dt = \iint a(t)dt \quad (3)$$

$$v(t) = \int a(t)dt \quad (4)$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{M} \quad (5)$$

*where,*

$x, v, a = \text{position, velocity and acceleration}$

$M = \text{mass of the body}$

$F = \text{an applied force}$

Introduzione

- Argomenti
- Osservazioni
- Velocità ed accelerazione di una massa che trasla
- Esempio: massa che trasla con condizioni iniziali date

Modellazione

# Esempio: massa che trasla con condizioni iniziali date

Given an initial ( $t=0$ ) state of  $x=5m$ ,  $v=2m/s$ ,  $a=3ms^{-2}$ , find the system state 5 seconds later assuming constant acceleration.

The initial conditions for the system at time  $t=0$  are,

$$\begin{aligned}x_0 &= 5m \\v_0 &= 2ms^{-1} \\a_0 &= 3ms^{-2}\end{aligned}$$

Note: units are very important and should normally be carried through all calculations.

The constant acceleration can be integrated to find the velocity as a function of time.

$$v(t) = \int a_0 dt = a_0 t + C = a_0 t + v_0 \quad (6)$$

Note:

$$\begin{aligned}v(t) &= a_0 t + C \\v_0 &= a_0(0) + C \\v_0 &= C\end{aligned}$$

Next, the velocity can be integrated to find the position as a function of time.

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (a_0 t + v_0) dt = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + x_0 \quad (7)$$

This can then be used to calculate the position of the mass after 5 seconds.

$$\begin{aligned}x(5) &= \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + x_0 \\&= \frac{3ms^{-2}}{2} (5s)^2 + 2ms^{-1} (5s) + 5m \\&= 37.5m + 10m + 5m = 52.5m\end{aligned}$$

Introduzione

- Argomenti
- Osservazioni
- Velocità ed accelerazione di una massa che trasla
- Esempio: massa che trasla con condizioni iniziali date

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

# Modellazione



# Osservazioni

Introduzione

Modellazione

● Osservazioni

- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

- ✦ Quando si vuole procedere alla modellazione di un sistema traslazionale comunemente si considerano parti del sistema separatamente.
- ✦ Componenti comuni sono:
  - ✦ campo gravitazionale ed altri campi -> applicano forze non di contatto
  - ✦ inerzia -> si oppone all'accelerazione ed alla decelerazione
  - ✦ molle -> resistono alla deflessione
  - ✦ smorzatori -> resistono al moto
  - ✦ frizioni -> si oppongono al moto relativo tra corpi in contatto
  - ✦ cavi e pulegge -> ridirigono le forze
  - ✦ punti di contatto/giunti -> trasmettono le forze attraverso 3 o più gradi di libertà

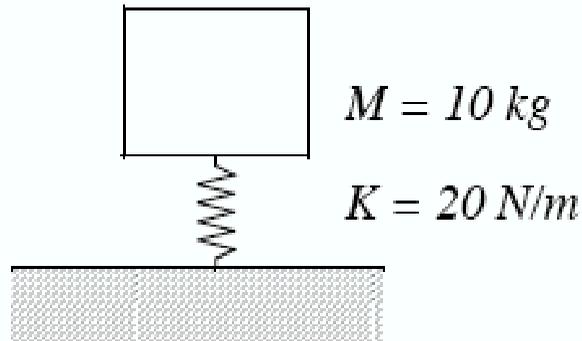


# Esempio di scomposizione di un sistema meccanico

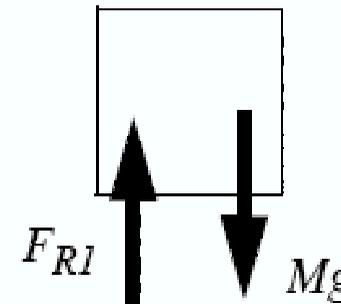
Introduzione

Modellazione

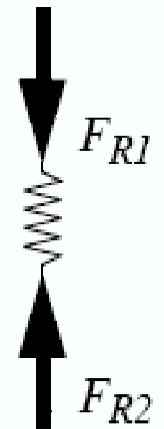
- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge



*FBD Mass:*



*FBD Spring:*



# Massa e Inerzia

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

- ✦ In un sistema statico la somma delle forze é zero, niente é in moto
- ✦ In un sistema dinamico la somma delle forze non é zero, le masse accelerano (la risultante delle forze non bilanciate agiscono sulle masse causando l'accelerazione delle stesse)
- ✦ Per il calcolo creiamo una forza di reazione virtuale chiamata forza inerziale (o di D'Alembert)
- ✦ Questa forza puó essere inclusa nei calcoli del modello nei due modi seguenti:

$$(1) \quad \sum F = Ma \quad (Newton)$$

$$(2) \quad \sum F - Ma = 0 \quad (D'Alembert)$$



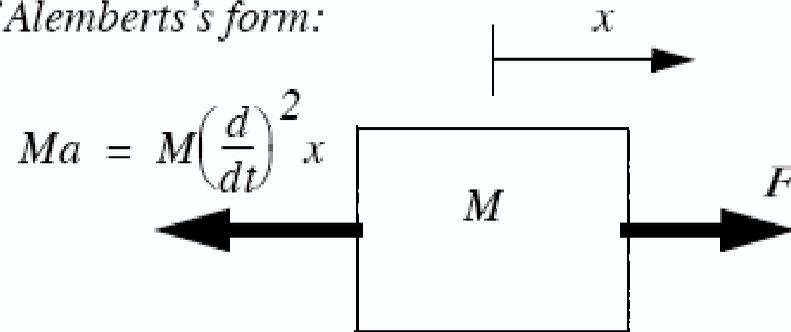
# Esempio di applicazioni

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- **Esempio di applicazioni**
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

*D'Alembert's form:*



$$Ma = M\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x$$

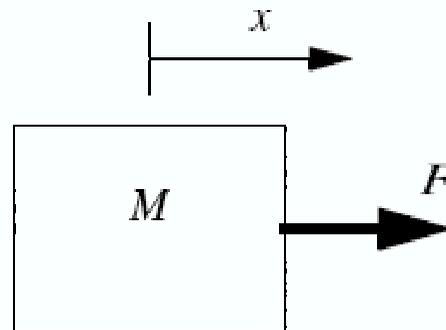
$$\rightarrow \sum F_x = F - M\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x = 0$$

or

$$\leftarrow \sum F_x = -F + M\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x = 0$$

Nota: Se si usa le forma di D'Alembert la direzione delle forze deve essere opposta alla direzione positiva della massa.

*Newton's form:*



$$\rightarrow \sum F_x = F = M\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x$$

or

$$\leftarrow \sum F_x = -F = -M\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x$$

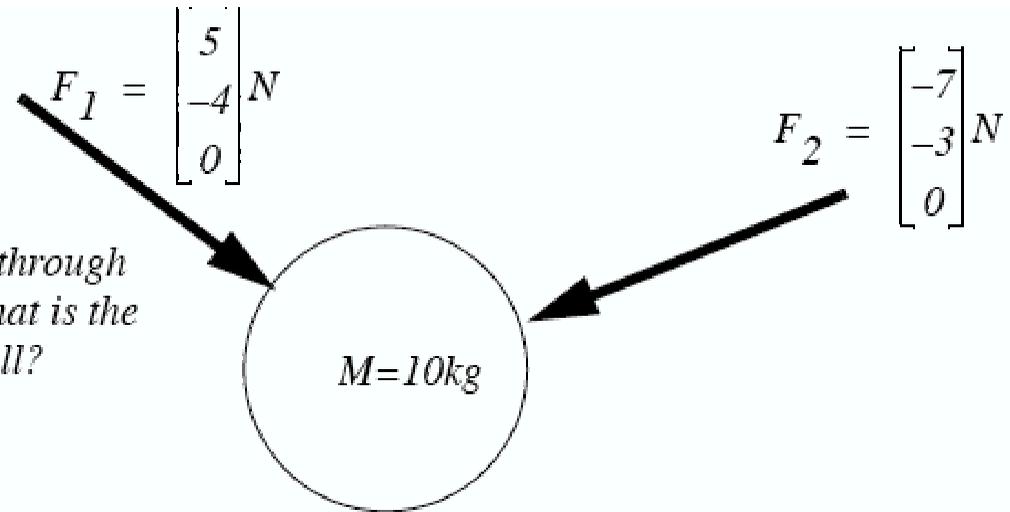
Nota: Se si usa la forma di Newton il segno della forza di inerzia deve essere positivo se la direzione positiva per la sommatoria e la massa sono concordi, altrimenti se sono opposti il segno della forza di inerzia deve essere negativo.

# Esempio di calcolo dell'accelerazione

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- **Esempio di calcolo dell'accelerazione**
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge



*If both forces shown act through the center of mass, what is the acceleration of the ball?*

$$\sum F = F_1 + F_2 = Ma$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} N + \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} N = (10Kg)a$$

$$\therefore a = \left(\frac{1}{10Kg}\right) \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.7 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{Kgm}{s^2}\right) \frac{1}{Kg} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.7 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

**Esercizio:**  
scrivere un programma che somma le forze e calcola l'accelerazione

# Gravitá ed altri campi

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravitá ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravitá
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

- ✦ La gravitá é una debole forza di attrazione tra masse.
- ✦ Noi siamo in prossimitá di una grande massa (la terra) che produce una grande forza di attrazione che dobbiamo considerare nell'analisi delle forze agenti su un corpo rigido
- ✦ La magnitudo della forza é proporzionale alla massa dell'oggetto, la direzione é verso il centro della terra (in giú)
- ✦ La relazione tra massa (Kg) e forza (N) nel sistema metrico é la costante gravitazionale  $9.81N / Kg$
- ✦ Come la gravitá anche i campi magnetici ed elettrostatici possono applicare forze agli oggetti.



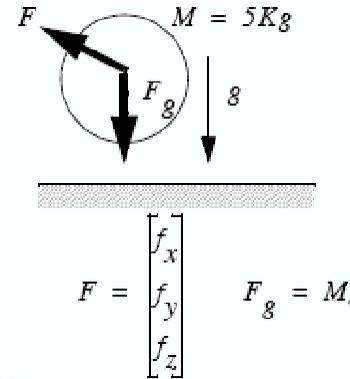
Debora Botturi

Laboratorio di Sistemi e Segnali



# Esempio di calcolo includendo la gravità

Assume we have a mass that is acted upon by gravity and a second constant force vector. To find the position of the mass as a function of time we first define the gravity vector and position components for the system.



$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \frac{N}{Kg} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Next, sum the forces and set them equal to inertial resistance.

$$\sum F = Mg + F = M \left( \frac{d}{dt} \right)^2 X(t)$$

$$5Kg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = 5Kg \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} + 0.2Kg^{-1} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Integrate twice to find the position components.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} + 0.2Kg^{-1} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{bmatrix} = \left( \frac{d}{dt} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} + 0.2Kg^{-1} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1f_x t^2 + v_{x0} t + x_0 \\ 0.1f_y t^2 + v_{y0} t + y_0 \\ \left( \frac{-9.81}{2} + 0.1f_z \right) t^2 + v_{z0} t + z_0 \end{bmatrix} m$$

Note: When an engineer solves a problem they will always be looking at the equations and unknowns. In this case there are three equations, and there are 9 constants/givens  $f_x, f_y, f_z, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0$  and  $z_0$ . There are 4 variables/unknowns  $x, y, z$  and  $t$ . Therefore with 3 equations and 4 unknowns only one value (4-3) is required to find all of the unknown values.

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- **Esempio di calcolo includendo la gravità**

● Esercizio

● Molle

● Osservazioni

● Deformazioni

● Deformazioni

● Esempio di molla

interconnessa

● Esempio di molla

interconnessa

● Osservazioni

● Esercizio: deformazione di

due molle

● Esercizio: molla fra due

masse

● Smorzatori

● Smorzatori Ideali

● Effetto smorzatore

● Esercizio: smorzatore

● Cavi e Pulegge

● Cavi e Pulegge



# Esercizio

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità

● Esercizio

- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

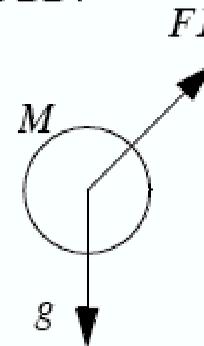
Given,

$$F_I = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{N}{Kg}$$

$$M = 2Kg$$

FBD:



Find the acceleration.

ans.

$$a = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -7.81 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

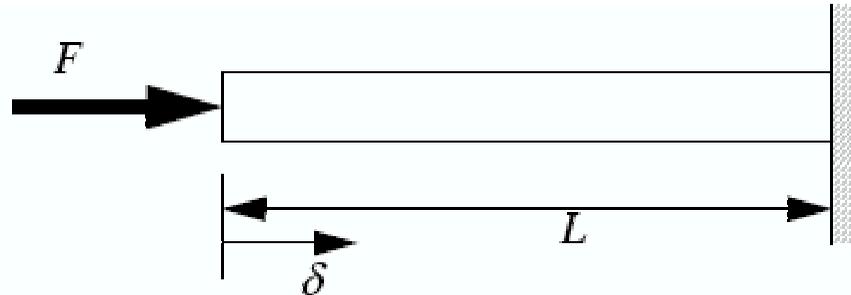
# Molle

- Le molle sono tipicamente costruite di materiale elastico (metallo e plastica) che si oppone alla forza di deformazione
- Le proprietà di una molla sono determinate dal modulo di Young (E) e dalla geometria della stessa molla
- La relazione tra forza e spostamento è determinata dalla meccanica del materiale
- Nella pratica le molle sono molto più complesse, ma i parametri (E, A ed L) sono combinati in una forma più conveniente secondo la legge di Hooke

$$\delta = \left(\frac{L}{EA}\right) F$$

$$F = \left(\frac{EA}{L}\right) \delta$$

$$F = K\delta \quad (\text{Hooke's law})$$



Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio

● Molle

- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge



# Osservazioni

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

- ✦ La legge di hooke ha alcune limitazioni:
  - ✦ L'equazione di base é lineare, ma durante la deformazione il modulo di elasticità cambia
  - ✦ Anche la geometria dell'oggetto cambia durante la deformazione cambiando l'effettiva durezza della molla
  - ✦ Le molle sono generalmente considerate senza massa, ignorando gli effetti dell'inerzia (ritardi nella propagazione della forza)
  - ✦ In applicazioni in cui sono previsti cambiamenti veloci la massa della molla diventa significativa e quindi non si può modellare come una molla ideale

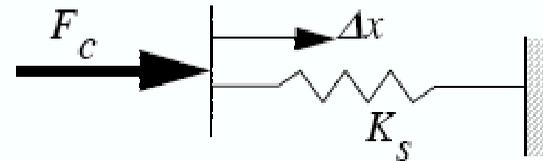
NOTA: I simboli per molle, resistenze ed induttanze sono spesso identici o simili.



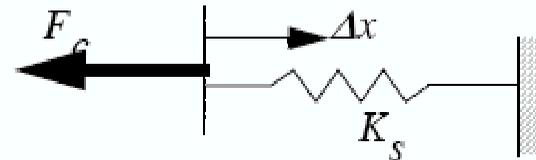
# Deformazioni

Una molla ha una naturale o non deformata lunghezza, quando a questa lunghezza non é ne in tensione ne compressa.  
Considerando  $\Delta x$  la lunghezza della deformazione possiamo avere per una molla e con un lato fissato:

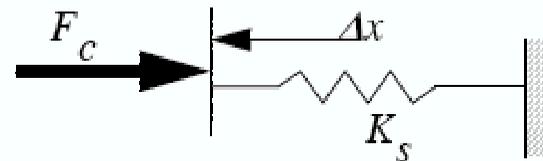
*compression as positive:*



$$F_c = K_s \Delta x$$

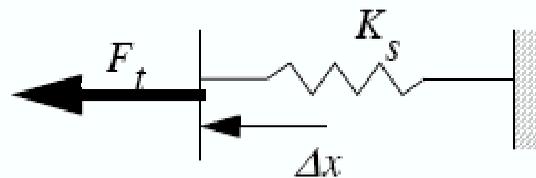


$$F_c = -K_s \Delta x$$

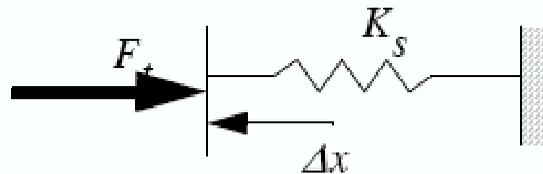


$$F_c = -K_s \Delta x$$

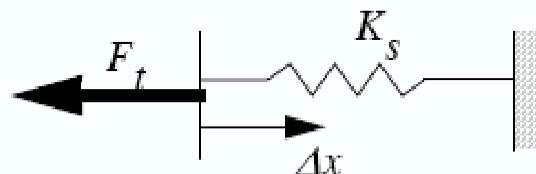
*tension as positive:*



$$F_t = K_s \Delta x$$



$$F_t = -K_s \Delta x$$



$$F_t = -K_s \Delta x$$

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge



# Deformazioni

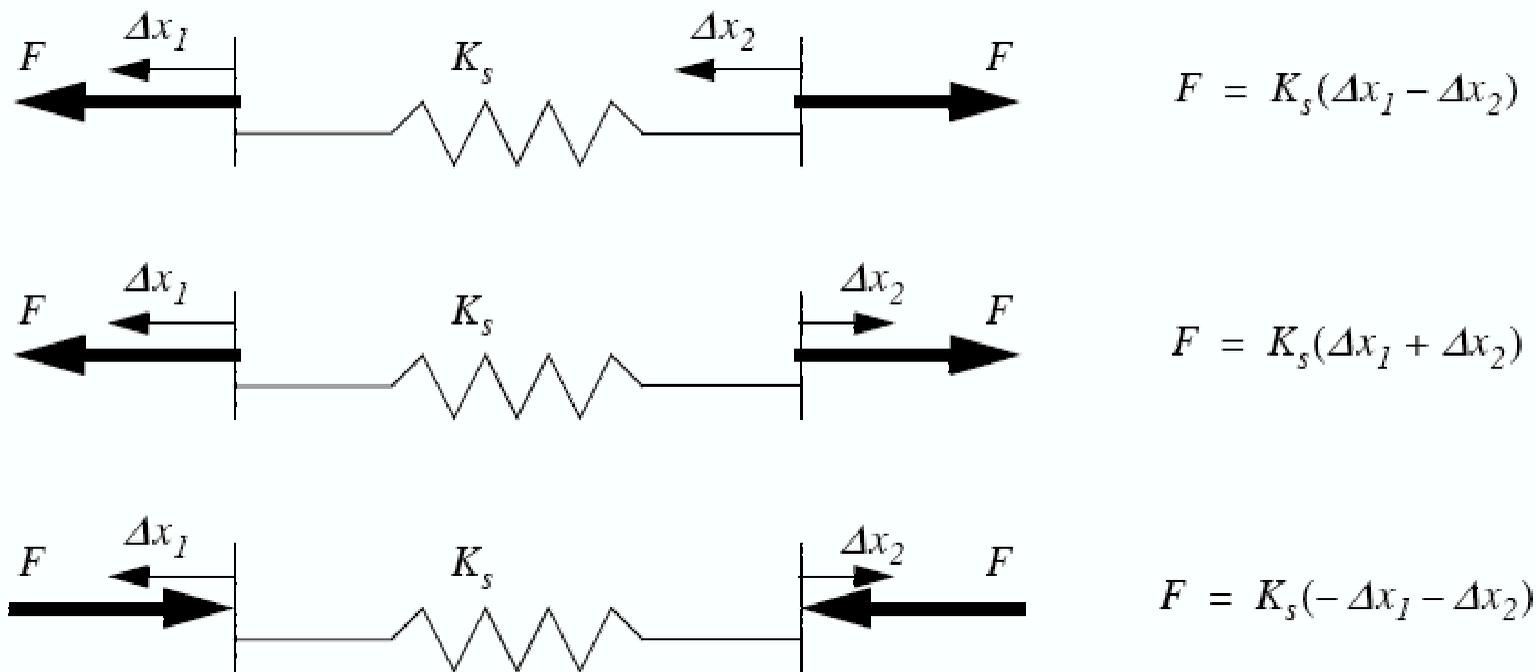
Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

Nel caso di movimenti da entrambe le parti della molla, il segno della forza applicata alla molla viene scelto in riferimento alla assunta compressione o tensione.

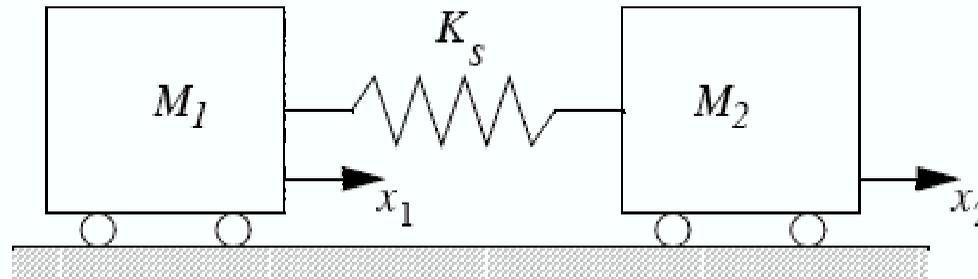
NOTA: É utile assumere per una molla se é compressa oppure in tensione e poi prendere le decisioni sui segni basandosi su quella assunzione.



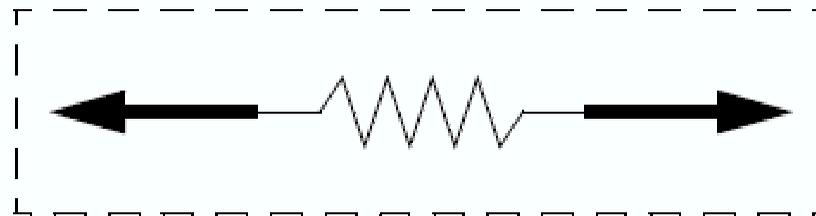
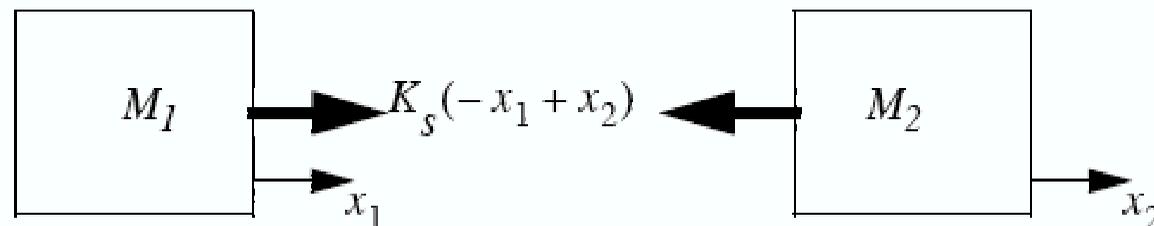
# Esempio di molla interconnessa

In questo esempio assumiamo la molla in tensione ed i segni della forza sono negativi per i termini che risultano in compressione.

Consider the two masses below separated by a spring.



The system can be reduced to free body diagrams assuming the spring is tension.



Introduzione

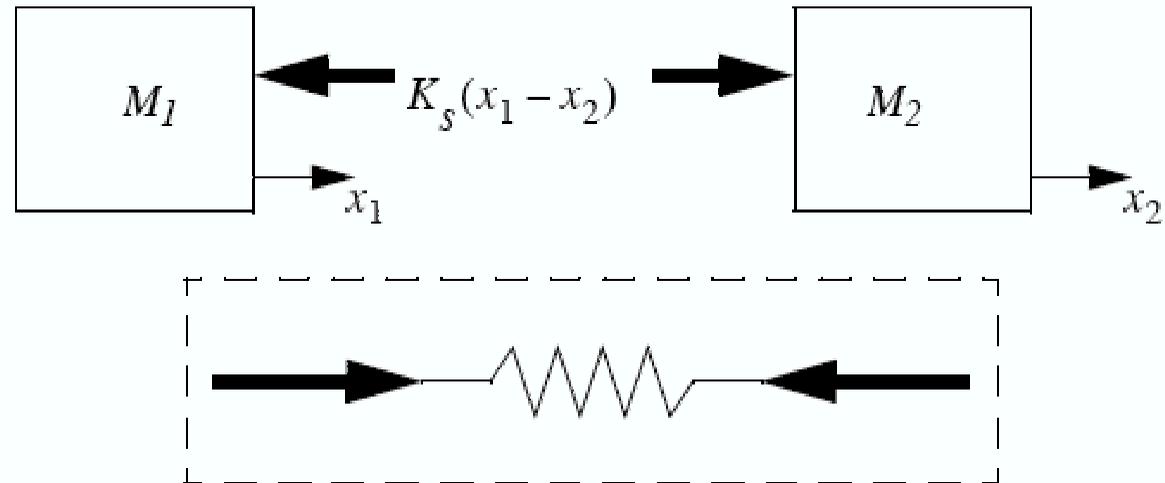
Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- **Esempio di molla interconnessa**
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

# Esempio di molla interconnessa

In questo esempio assumiamo la molla compressa ed i segni della forza sono negativi per i termini che risultano in tensione.

The system can be reduced to free body diagrams assuming the spring is in compression.



## Introduzione

## Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- **Esempio di molla interconnessa**
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

# Osservazioni

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

A volte la lunghezza della molla é importante e la deformazione da sola insufficiente. In questo caso consideriamo:

$$\Delta x = l_1 - l_0$$

$\Delta x$  = deformazione

$l_0$  = lunghezza quando non deformata

$l_1$  = lunghezza quando deformata

La molla puó essere usata anche come elemento che immagazzina energia:

$$E_p = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$



# Esercizio: deformazione di due molle

Introduzione

Modellazione

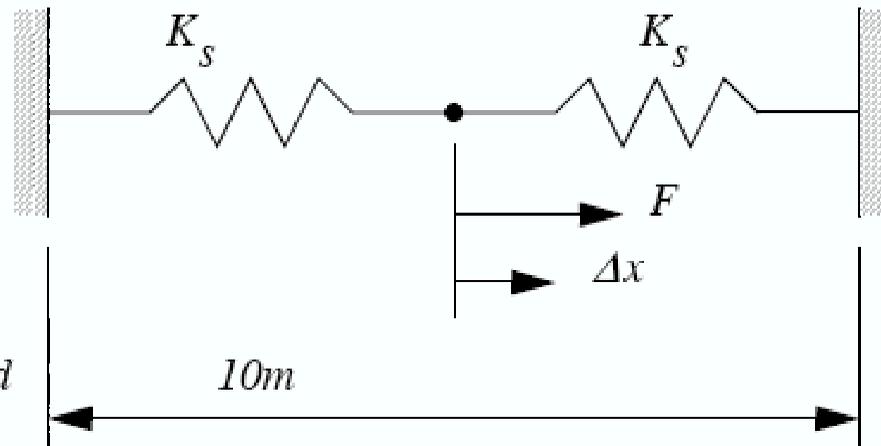
- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- **Esercizio: deformazione di due molle**
- Esempio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esempio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

*Given,*

$$K_s = 10 \frac{N}{m}$$

$$\Delta x = 0.1m$$

*Find  $F$  assuming the springs are normally 4m long when unloaded*



$$F = 2N$$

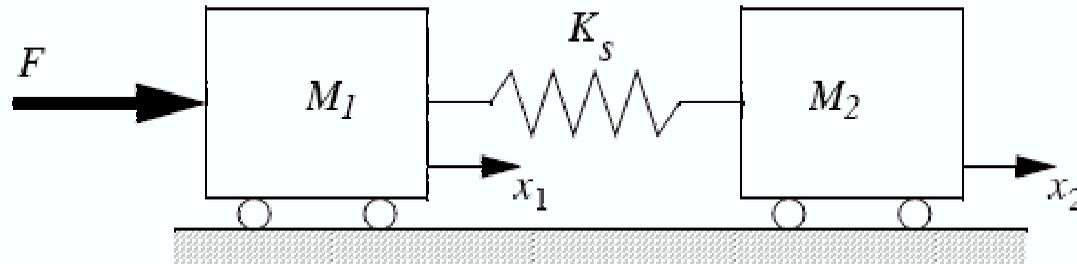
# Esercizio: molla fra due masse

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- **Esercizio: molla fra due masse**
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

Trovare le equazioni del moto per le due masse:



soluzione:

$$\ddot{x}_1(M_1) + x_1(K_s) + x_2(-K_s) = F$$

$$x_1(K_s) + \ddot{x}_2(-M_2) + x_2(-K_s) = F$$

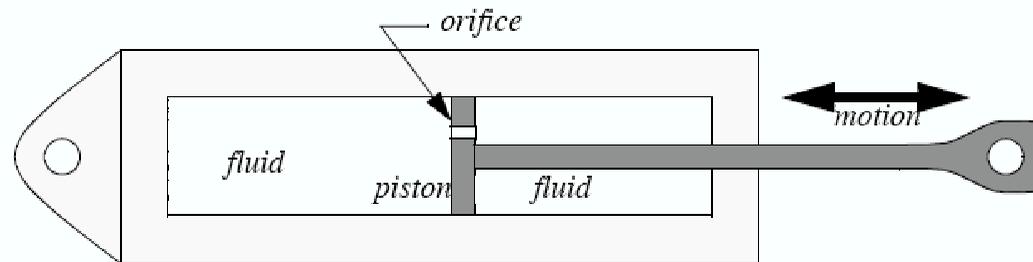
# Smorzatori

## Introduzione

## Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

- Lo smorzatore é un componente che resiste al moto
- La forza di resistenza é relativa allo spostamento
- Lo smorzatore dissipa energia
- Smorzatori e molle sono spesso usati in maniera complementare nella progettazione
- Lo smorzamento puó essere un fenomeno che occorre in maniera naturale in un sistema oppure puó essere aggiunto nella fase di progettazione



# Smorzatori Ideali

Introduzione

Modellazione

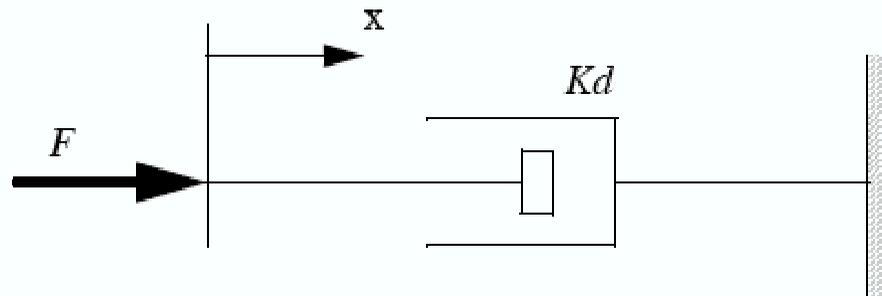
- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

➤ In questo caso forza e spostamento sono entrambi di compressione

➤ La forza é calcolata:

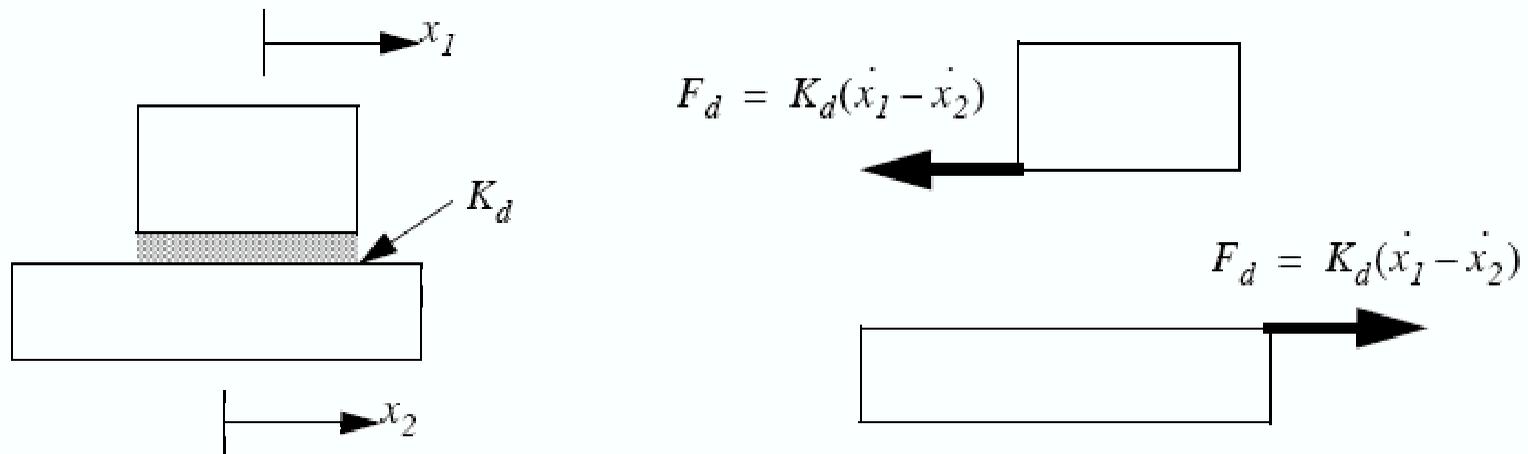
$$F = K_d \frac{d}{dt} x$$

➤ Il simbolo mostrato in figura sotto é tipicamente utilizzato per lo smorzatore



# Effetto smorzatore

- La stessa forza smorzante si ha quando c'è moto relativo tra due oggetti
- Se i due oggetti sono lubrificati con un fluido viscoso (es. olio) ci sarà un effetto di smorzamento
- Fluidi come olii hanno una viscosità significativa e resistono al moto
- Le forze di smorzamento sono in funzione della velocità relativa tra due oggetti



Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

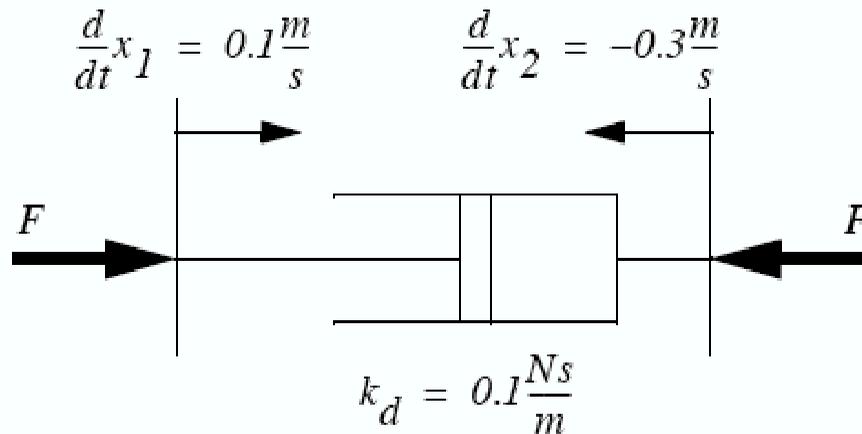
# Esercizio: smorzatore

Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- **Esercizio: smorzatore**
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

Trovare le forze agenti sullo smorzatore:

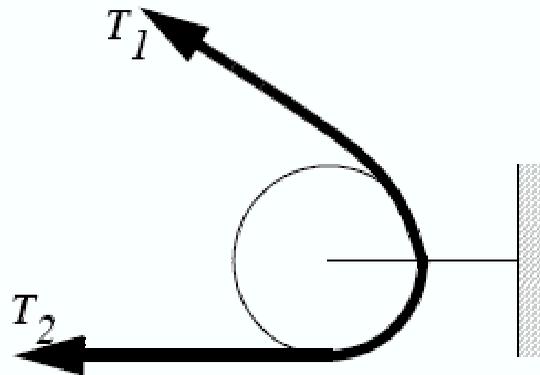


soluzione:

$$F = -0.02N$$

# Cavi e Pulegge

- I cavi trasmettono forze di tensione o spostamenti
- Il punto centrale del cavo é il punto di applicazione delle forze
- Se le forze diventano di compressione il cavo non trasmette piú nessuna forza
- Un cavo per se stesso puó essere considerato come un vettore di forza, assieme alla puleggia puó ridirigere una forza o moltiplicarla
- Tipicamente si assume una puleggia senza massa e senza frizione quindi le tensioni ai due capi del cavo sono uguali ( $T_1 = T_2$ )



Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

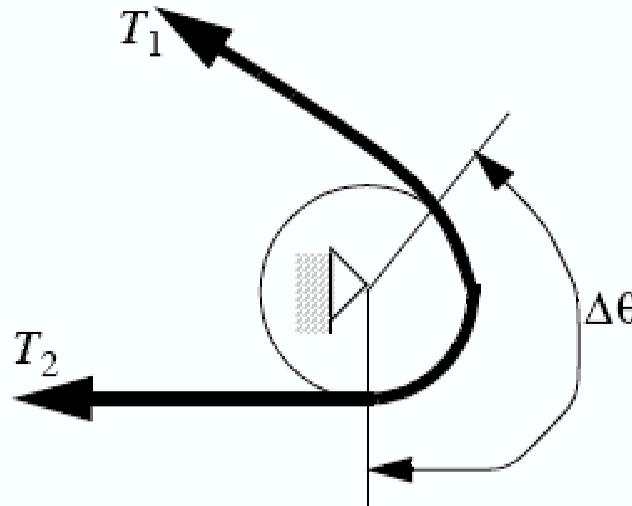
# Cavi e Pulegge

## Introduzione

## Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

- Se abbiamo una puleggia che é fissata e non puó ruotare, il cavo deve scivolare sulla superficie della puleggia.
- Nel caso sopra dobbiamo usare il coefficiente di attrito per determinare le relative forze tra le due parti della puleggia



$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_k(\Delta\theta)}$$

# Esercizio: forze di frizione

Introduzione

Modellazione

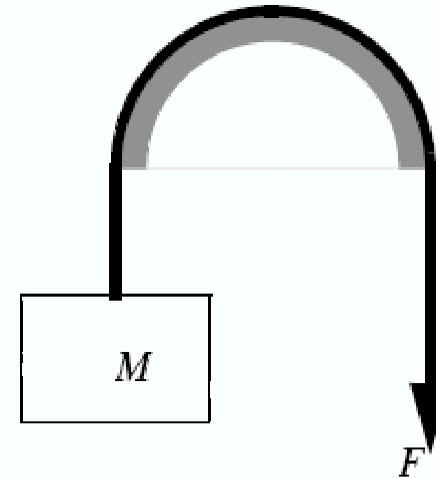
- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

Given,

$$\mu_s = 0.35 \quad \mu_k = 0.2$$

$$M = 1\text{Kg}$$

Find  $F$  to start the mass moving up and down, and then the force required to maintain a low velocity motion.



forze per superare l'attrito statico:

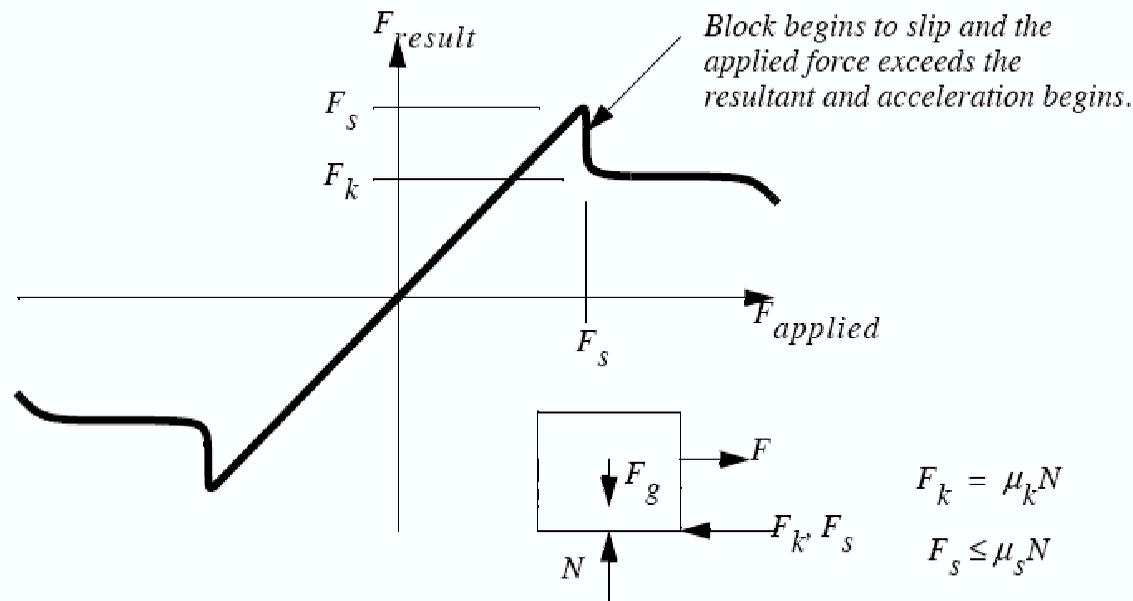
$$F_{up} = 9.81e^{0.35(\Delta\theta)} N \quad F_{down} = \frac{9.81N}{e^{0.35(\Delta\theta)}}$$

forze richieste per mantenere un moto a bassa velocità:

$$F_{up} = 9.81e^{0.2(\Delta\theta)} N \quad F_{down} = \frac{9.81N}{e^{0.2(\Delta\theta)}}$$

# Frizione

- Nel caso non ci sia lubrificante tra le due superfici in contatto siamo in presenza di frizione secca
- In questo caso le due superfici restano ferme (non scorrono) fino a che non si raggiunge una forza massima e che superala frizione.
- Quando le due superfici iniziano a scorrere la frizione sarà costante
- Le forze di frizione si oppongono al moto ed alle forze applicate



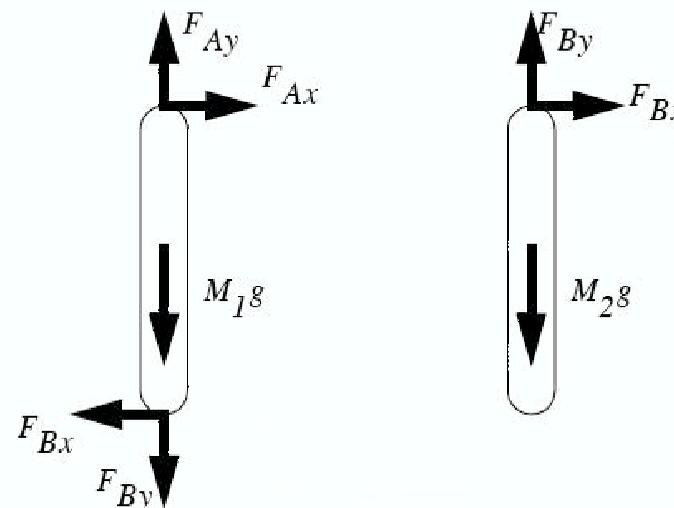
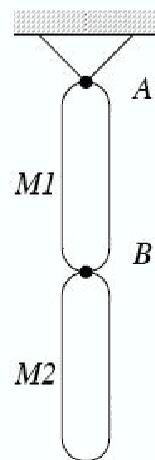
Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

# Punti di contatto

- Un sistema é costruito da componenti connesse
- Le connessioni possono essere rigide o mobili
- Nelle connessioni rigide tutte le forze sono trasmesse ed i due pezzi agiscono come un unico corpo rigido
- Nelle connessioni mobili c' é almeno un grado di libertá
- Se limitiamo il movimento alla traslazione abbiamo tre gradi di libertá,  $x$ ,  $y$  e  $z$  (in ogni direzione c' é un grado di libertá e le forze o momenti non possono essere trasmessi)
- Quindi si devono considerare i corpi rigidi anche se connessi in maniera separata e le forze di contatto per ogni corpo sono da considerarsi per ogni punto di contatto
- Le forze sulle connessioni dovrebbero avere eguale modulo ma direzione opposta



Introduzione

Modellazione

- Osservazioni
- Esempio di scomposizione di un sistema meccanico
- Massa e Inerzia
- Esempio di applicazioni
- Esempio di calcolo dell'accelerazione
- Gravità ed altri campi
- Esempio di calcolo includendo la gravità
- Esercizio
- Molle
- Osservazioni
- Deformazioni
- Deformazioni
- Esempio di molla interconnessa
- Esempio di molla interconnessa
- Osservazioni
- Esercizio: deformazione di due molle
- Esercizio: molla fra due masse
- Smorzatori
- Smorzatori Ideali
- Effetto smorzatore
- Esercizio: smorzatore
- Cavi e Pulegge
- Cavi e Pulegge

